

**К РЕШЕНИЮ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ СОПЛА ЛАВАЛЯ
ДЛЯ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ ПРИ МАЛОМ ОТСТАВАНИИ ЧАСТИЦ***А. Н. Крайко, Р. А. Ткаленко**(Москва)*

В рамках двухжидкостной (двухскоростной и двухтемпературной) модели сплошной среды рассматривается течение смеси газа и частиц в дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой частях сопла Лавала. Предполагается, что частицы малы и, как следствие, коэффициенты φ^f и φ^g , определяющие их взаимодействие с газом, велики (при стоксовском режиме обтекания указанные коэффициенты обратно пропорциональны квадрату радиуса частицы). Последнее обеспечивает малость скоростного и теплового отставания частиц от газа. Решение ищется в виде разложения по малым параметрам $\varepsilon_1 = 1/\varphi^f$ и $\varepsilon_2 = 1/\varphi^g$.

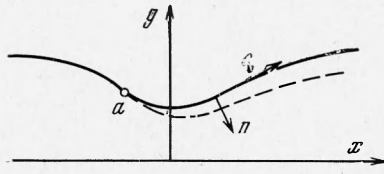
В первом случае задача является задачей особых возмущений, что связано с образованием из-за отставания частиц пристеночного слоя чистого газа. При $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ толщина этого слоя стремится к нулю, однако разность значений параметров газа на стенке и на границе слоя остается конечной. Получены уравнения, описывающие с точностью до ε_1 и ε_2 течение смеси газа и частиц в ядре потока, и уравнения, определяющие параметры газа в пристеночном слое. Показано, что, как и в обычном пограничном слое, изменение давления поперек пристеночного слоя есть величина более высокого порядка, чем изменение других параметров. Для решения уравнений, определяющих характеристики смеси в ядре, применяется разложение по малому параметру $\varepsilon = 1/R$, где R — радиус кривизны стенки сопла в минимальном сечении (отнесенный к радиусу этого сечения).

При решении задач о двухфазном течении в соплах Лавала с использованием одномерного приближения разложение по ε_1 и ε_2 или по одному из этих параметров применялось в [1-3]. Способ разложения по ε , примененный ниже, аналогичен предложенному в [4] для решения прямой задачи теории сопла Лавала при течении чистого газа. Опубликованные точные (в рамках двухжидкостной модели) результаты, относящиеся к течению смесей газа и частиц в соплах, ограничиваются рассмотрением только сверхзвуковой части сопла, для расчета параметров газа и частиц в которой широко используются прямые [5-11] и обратные [12-14] схемы метода характеристик.

В то же время авторам не известны работы, в которых без использования каких-либо дополнительных допущений было бы получено решение прямой (или обратной) задачи теории сопла Лавала в случае неравновесного двухфазного течения не только для сверхзвуковой, но и для дозвуковой и трансзвуковой частей сопла. Из имеющихся приближенных подходов отметим нашедший весьма широкое распространение метод интегрирования уравнений движения и энергии частиц (указанные уравнения суть уравнения в полных производных вдоль линий тока частиц) в поле равновесных параметров смеси (см., например, [15]), а также метод, предложенный в [16]. Авторы [16] предполагают, что поля давления и углов наклона вектора скорости газа для равновесного и неравновесного двухфазных течений тождественны. Отметим, что если в случае сравнительно небольших относительных расходов частиц использование указанных приближенных подходов представляется в какой-то степени оправданным, то при больших относительных расходах частиц положенные в их основу допущения могут приводить к заметным ошибкам.

Наличие пристеночного слоя чистого газа затрудняет также постановку и решение обратной задачи теории сопла Лавала, а при малом отставании частиц, когда указанный слой тонок, — применение метода установления, оказавшихся весьма эффективными в случае чистого газа [17-19]. Не исключено, что соотношения, полученные ниже для пристеночного слоя, окажется целесообразным использовать и в сочетании с перечисленными выше методами. В связи с этим подчеркнем, что для тонкого по сравнению с характерным размером сопла пристеночного слоя указанные соотношения справедливы при любых ε_1 . Последнее связано с тем, что из-за отсутствия частиц в пристеночном слое параметр ε_1 появляется в уравнениях лишь через толщину слоя, которая, как будет видно из дальнейшего, при малом отставании частиц пропорциональна ε_1 .

1. Пользуясь прямоугольной или цилиндрической системами координат, рассмотрим течение смеси газа и инородных частиц в плоском или осесимметричном сопле Лавала (фиг. 1).



Фиг. 1

Начало координат поместим в плоскости минимального сечения сопла, ось x направим слева направо (в сторону течения) по оси или плоскости симметрии, а ось y — перпендикулярно оси x . При отсутствии внешних источников тепла и сил и при пренебрежении объемом частиц рассматриваемое течение в рамках двухжидкостной модели (см.,

например, [20], а также [5-14]) описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
 & u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho_s}{\rho} \varphi^f (u - u_s) = 0 \\
 & u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\rho_s}{\rho} \varphi^f (v - v_s) = 0 \\
 & \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \rho v \frac{\partial v}{y} = 0 \\
 (1.1) \quad & u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{u}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{v}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \\
 & - \frac{\rho_s}{\rho} [\varphi^f (u - u_s)^2 + \varphi^f (v - v_s)^2 + \varphi^q (T_s - T)] = 0 \\
 & u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} = \varphi^f (u - u_s), \quad u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial y} = \varphi^f (v - v_s) \\
 & \frac{\partial \rho_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial \rho_s v_s}{\partial y} + \rho_s v_s \frac{\partial v_s}{y} = 0, \quad u_s \frac{\partial e_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial e_s}{\partial y} = \varphi^q (T - T_s) \\
 & p = \rho T, \quad h = \frac{\kappa}{\kappa - 1} T, \quad e_s = \delta T_s
 \end{aligned}$$

Здесь p — давление; h — удельная энтальпия; T — температура; ρ — плотность; u и v — проекции вектора скорости газа на оси x и y ; T_s , ρ_s , u_s и v_s — соответствующие величины для «газа», частиц; e_s — удельная внутренняя энергия частиц; коэффициенты φ^f и φ^q , которые примем постоянными, что отвечает стоксовскому режиму обтекания каждой частицы, характеризуют динамическое и тепловое взаимодействие между газом и частицами; $\nu = 0$ и 1 соответственно в плоском и осесимметричном случаях. Предполагалось, что газ совершенный с постоянными теплоемкостями и показателем адиабаты κ , внутренняя энергия частиц — линейная функция их температуры (δ — константа, равная удельной теплоемкости частиц).

Все величины в (1.1) и далее удобно считать безразмерными. Пусть L , q_* и ρ_* — характерные величины с размерностями длины, скорости и плотности, а R — размерное значение газовой постоянной. Тогда приведение к безразмерному виду достигается отнесением пространственных переменных к L , скоростей — к q_* , плотностей — к ρ_* , давления — к $\rho_* q_*^2$, энтальпии и внутренней энергии — к q_*^2 , температур — к q_*^2/R и теплоемкости частиц — к R . За L примем радиус (или полувисоту) минимального сечения сопла, а в качестве q_* и ρ_* будем брать критические скорость и плотность при равновесном течении, т. е. течении без отставания частиц, когда $u_s \equiv u$, $v_s \equiv v$ и $T_s \equiv T$.

Граничными условиями для системы (1.1) служат условие непротекания на стенке, заданной уравнением $y = y_w(x)$ и условие симметрии при $y = 0$, которые имеют вид

$$(1.2) \quad v(x, y_w) = y_w'(x) u(x, y_w), \quad v(x, 0) = 0$$

и равенства

$$(1.3) \quad u_s = u, \quad v_s = v, \quad T_s = T \quad (x \rightarrow -\infty)$$

Штрихом в (1.2) и далее обозначается полная производная по соответствующему аргументу (в данном случае по x).

Равенства (1.3) имеют место, когда слева сопло примыкает к полубесконечной цилиндрической трубе (здесь вертикальные составляющие скоростей газа и частиц стремятся к нулю при отличных от нуля предельных значениях горизонтальных компонент) и когда при $x \rightarrow -\infty$ сопло неограниченно расширяется (при этом к нулю стремятся обе составляющие скоростей). Кроме условий (1.2) и (1.3) должны быть заданы параметры торможения смеси (энтропия и полная энтальпия), а также отношение плотностей частиц и газа (ρ_s / ρ) на входе в сопло (при $x \rightarrow -\infty$). Ограничиваясь случаем, когда эти величины постоянны по сечению («однородный» поток на входе), и учитывая выбор q_* и ρ_* , запишем эти условия в виде

$$(1.4) \quad \frac{\kappa_e p}{(\kappa_e - 1) \rho_\Sigma} + \frac{q^2}{2} = \frac{\kappa_e + 1}{2(\kappa_e - 1)}, \quad \frac{p}{(\rho_\Sigma)^{\kappa_e}} = \frac{1}{\kappa_e}$$

$$\frac{\rho_s}{\rho} = \frac{1 - m}{m} \quad (x \rightarrow -\infty)$$

$$(\rho_\Sigma = \rho + \rho_s, \quad q = (u^2 + v^2)^{1/2})$$

Здесь ρ_Σ — суммарная плотность смеси, q — модуль скорости (q стремится к u или к 0 при $x \rightarrow -\infty$), m — заданная константа, не превышающая единицу (относительная массовая концентрация или расход газа), κ_e — показатель адиабаты равновесной двухфазной смеси

$$\kappa_e = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left(\alpha = \frac{\kappa}{\kappa - 1} + \frac{1 - m}{m} \delta \right)$$

2. Известно, что при конечных φ^f из-за отставания частиц от газа вблизи выпуклых участков стенки образуется свободный от частиц пристеночный слой, ограниченный сверху стенкой сопла, на которой выполняется условие непротекания для газа (1.2). Снизу указанный слой чистого газа ограничен линией $y = y_d(x)$ — предельной линией тока частиц, которая на фиг. 1 изображена штриховой линией, определяемой уравнением

$$(2.1) \quad y_d' = (v_s / u_s)_d$$

Здесь индексом d отмечены параметры на линии раздела. В общем случае в соответствии со свойствами системы (1.1) плотность частиц ρ_s при переходе через указанную границу меняется скачком от некоторого конечного значения до нуля, что приводит к разрыву первых производных параметров газа. Как будет видно из дальнейшего, при малых отставаниях частиц газ около выпуклых участков стенки (при $y_w''(x) \geq 0$) втекает в пристеночный слой, вызывая его утолщение.

Для описания течения в области, свободной от частиц, будем использовать связанную с контуром сопла систему координат τn , где τ направлено вдоль стенки (слева направо, как показано на фиг. 1), а n — по нормали к ней в сторону газа. Если σ — угол между внутренней нормалью к контуру (т. е. — \mathbf{n}) и осью y , то связь между x и y и τ и n дается равенствами

$$(2.2) \quad x = x_w(\tau) + n \sin \sigma, \quad y = y_w(\tau) - n \cos \sigma$$

$$\frac{dx_w}{d\tau} = \cos \sigma \equiv (1 + y_w'^2)^{-1/2}, \quad \frac{dy_w}{d\tau} = \sin \sigma \equiv y_w' \cos \sigma$$

Связь между проекциями u и v и U и V вектора скорости газа в системах xy , τn соответственно определяется формулами

$$\begin{aligned} U &= u \cos \sigma + v \sin \sigma, & V &= u \sin \sigma - v \cos \sigma \\ u &= U \cos \sigma + V \sin \sigma, & v &= U \sin \sigma - V \cos \sigma \end{aligned}$$

С учетом приведенных соотношений уравнения, описывающие течение газа в пристеночном слое, где $\rho_s \equiv 0$, принимают вид

$$(2.3) \quad \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial \tau} + V(1+nK) \frac{\partial U}{\partial n} + UVK + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \tau} &= 0 \\ U \frac{\partial V}{\partial \tau} + V(1+nK) \frac{\partial V}{\partial n} - U^2 K + \frac{1+nK}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 \\ U \frac{\partial h}{\partial \tau} + V(1+nK) \frac{\partial h}{\partial n} - \frac{U}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{V(1+nK)}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (y^{\nu} \rho U) + \frac{\partial}{\partial n} [y^{\nu} (1+nK) \rho V] &= 0 \quad \left(K = \frac{y_w'''}{(1+y_w''^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Здесь K — кривизна стенки сопла.

Из первых трех уравнений системы (2.3) обычным путем получается условие сохранения полной энтальпии, а из третьего уравнения с учетом определения энтропии и отсутствия в пристеночном слое необратимых процессов — условие сохранения энтропии вдоль каждой линии тока

$$(2.4) \quad 2h + U^2 + V^2 = 2H(\psi), \quad s = S(\psi)$$

Здесь s — удельная энтропия газа (известная функция p и ρ); функция тока ψ в согласии с последним уравнением из (2.3) вводится дифференциальным равенством

$$(2.5) \quad d\psi = -cy^{\nu} \rho U dn + cy^{\nu} (1+nK) \rho V d\tau$$

и заданием значения функции тока ψ_w на стенке; функции $H(\psi)$ и $S(\psi)$ определяются значениями полной энтальпии и энтропии в точке пересечения данной линии тока с границей раздела. Константу c в (2.5) удобно брать такой, чтобы при $\psi = 0$ на оси симметрии значение функции тока газа на стенке, т. е. ψ_w , равнялось единице.

В новых переменных условие непротекания на стенке сопла — первое равенство из (1.2) — записывается в форме

$$(2.6) \quad V_w \equiv V(\tau, 0) = 0$$

3. Решение системы (1.1), описывающей течение двухфазной смеси вне пристеночной области чистого газа, будем искать, раскладывая все зависимые переменные по параметрам $\varepsilon_1 = 1/\varphi^f$ и $\varepsilon_2 = 1/\varphi^g$. Соответствующие разложения примем в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \omega &= \omega_e + \Delta\omega + \dots, & \rho &= \rho_e (1 + \Delta\rho + \dots) \\ \rho_s &= \rho_{se} (1 + \Delta\rho_s + \dots) \end{aligned}$$

где ω — любой параметр, кроме ρ и ρ_s ; $\Delta\varphi = \varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2$ и многоточием обозначены члены более высокого (по ε_1 и ε_2) порядка малости.

Слагаемые с индексом e в (3.1) отвечают равновесному течению, которое реализуется при $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \equiv 0$, когда отсутствует отставание частиц по скорости и температуре. Как известно (см., например, [20]), указанные параметры определяются уравнениями течения совершенного газа с показателем адиабаты κ_e , плотностью $\rho_{\Sigma e}$ и энтальпией

$$h_{\Sigma e} = \kappa_e p_e / (\kappa_e - 1) \rho_{\Sigma e}$$

Для равномерного потока при $x = -\infty$, т. е. при выполнении условий (1.4), задача расчета равновесного двухфазного течения, как и в случае чистого газа, сводится к интегрированию двух дифференциальных уравнений (неразрывности и безвихренности), которые можно записать в форме (ср. с [4])

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \left(1 - u_e^2 - \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1} v_e^2\right) \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left(1 - v_e^2 + \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1} u_e^2\right) \frac{\partial v_e}{\partial y} + \\ & + \left[1 - \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1} (u_e^2 + v_e^2)\right] \frac{v v_e}{y} - \frac{4 u_e v_e}{\kappa_e + 1} \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0 \\ & \frac{\partial u_e}{\partial y} - \frac{\partial v_e}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

При этом прочие параметры выражаются через u_e и v_e конечными соотношениями

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \rho_{\Sigma e} &= \left(\frac{\kappa_e + 1}{2} - \frac{\kappa_e - 1}{2} q_e^2\right)^{1/(\kappa_e - 1)}, \quad q_e^2 = u_e^2 + v_e^2, \quad \rho_e = m \rho_{\Sigma e} \\ \rho_{ce} &= (1 - m) \rho_{\Sigma e}, \quad p_e = \frac{(\rho_{\Sigma e})^{\kappa_e}}{\kappa_e}, \quad T_e = \frac{p_e}{\rho_e} \\ h_e &= \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} T_e, \quad u_{se} = u_e, \quad v_{se} = v_e, \quad T_{se} = T_e \end{aligned}$$

Уравнения для вычисления следующих членов разложений ρ_1, p_1, \dots и ρ_2, p_2, \dots находятся подстановкой (3.1) в систему (1.1) и приравниванием членов при первых степенях ε_1 и ε_2 соответственно. Получающиеся в результате линейные уравнения для коэффициентов при ε_1 и ε_2 можно объединить, записав в виде уравнений для $\Delta \rho, \Delta p, \dots$, и преобразовать к системе пяти линейных дифференциальных уравнений для $\Delta \rho, \Delta p, \Delta u, \Delta v$ и $\Delta \rho_s$ и пяти конечных соотношений для вычисления прочих параметров. Дифференциальные уравнения можно представить в форме

$$(3.4) \quad L_i(\omega_e, \Delta \omega, \Delta \rho, \Delta \rho_s) = 0$$

Здесь L_i — дифференциальные операторы ($i = 1, \dots, 5$), квазилинейные по ω_e и линейные по остальным переменным; под ω_e понимается u_e и v_e , а под ω — любой из параметров p, u и v или их совокупность. В согласии с определением $\Delta \phi$ слагаемые в (3.4), содержащие только равновесные величины (т. е. ω_e и их производные), входят в уравнения с множителями ε_1 и ε_2 .

Конечные соотношения, определяющие отклонения от равновесия оставшихся параметров смеси, имеют вид

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \Delta T &= \frac{\Delta p}{\rho_e} - \frac{p_e}{\rho_e} \Delta \rho, \quad \Delta h = \frac{\kappa p_e}{(\kappa - 1) \rho_e} \left(\frac{\Delta p}{p_e} - \Delta \rho\right) \\ \Delta u_s &= \Delta u - \varepsilon_1 u_e u_e', \quad \Delta v_s = \Delta v - \varepsilon_1 u_e v_e' \\ \Delta T_s &= \Delta T + \varepsilon_2 \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e m} \delta u_e q_e q_e^2 \end{aligned}$$

где штрихом обозначены полные производные по x вдоль линий тока равновесного течения, определяемых уравнением $y' = v_e / u_e$.

Уравнение (2.1), которое определяет форму границы раздела, с учетом третьего и четвертого соотношений из (3.5) и условия непротекания из (1.2) с точностью до малых более высокого порядка дает равенство

$$(3.6) \quad y_w' - y_d' = \varepsilon_1 u_w y_w''$$

показывающее, что толщина пристеночного слоя по y , т. е. разность $(y_w - y_d)$, а следовательно, и по n имеет порядок ε_1 и в данном приближении увеличивается (уменьшается) на участках положительной (отрицательной) кривизны стенки. В согласии с (3.6) слой, свободный от частиц, впервые появляется в точке, где $y_w'' = 0$, если всюду слева от нее y_w'' отрицательно (точка a на фиг. 1). Если вдоль всего контура $y_w'' \geq 0$, как, например, в случае рассмотренного ниже сопла с гиперболической образующей, то пристеночный слой чистого газа имеет нулевую толщину лишь в бесконечно удаленной точке (при $x \rightarrow -\infty$). Как будет видно из дальнейшего, изменения (поперек пристеночного слоя) всех, кроме давления, термодинамических параметров газа и компоненты скорости U суть величины порядка $O(1)$. Учитывая, что толщина указанного слоя $n_d = O(\varepsilon_1)$, получим сначала уравнения, позволяющие находить соответствующие параметры с точностью до $O(\varepsilon_1^0) \equiv O(1)$. В конце следующего раздела будет показано, что простая модификация полученных уравнений позволяет проводить расчет параметров в пристеночном слое с точностью до $O(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Из $n_d \sim \varepsilon_1$, последнего уравнения системы (2.3) и условия непротекания (2.6), как и в случае обычного пограничного слоя, следует, что в пристеночном слое $V \sim \varepsilon_1$. Отсюда и из второго уравнения системы (2.3) найдем, что изменение p поперек слоя имеет порядок ε_1 , т. е. $p_w - p_d = O(\varepsilon_1)$. Поэтому с точностью до $O(1)$

$$(3.7) \quad p(\tau, n) = p_{we}(\tau) \quad (0 \leq n \leq n_d)$$

а оставшиеся уравнения системы (2.3) или эквивалентные им уравнения (2.4) принимают вид

$$(3.8) \quad 2h(p_{we}, \rho) + U^2 = 2H(\psi), \quad s(p_{we}, \rho) = S(\psi)$$

Функции $H(\psi)$ и $S(\psi)$ в правых частях (3.8) в данном приближении вычисляются по равновесным значениям полной энтальпии и энтропии газа на стенке сопла (для равновесного течения различные соответствующих величин на стенке и на линии раздела имеет порядок ε_1 , т. е.

$$(3.9) \quad 2H(\psi) = (2h + U^2)_{we}, \quad S(\psi) = s_{we}$$

Связь между x , функциями которого являются величины, стоящие в правых частях (3.9), и ψ устанавливается после определения $\psi_d = \psi_d(x)$. Последнее в каждом сечении $\tau = \tau(x_w) = \text{const}$ находится путем интегрирования от $n = 0$, где $\psi(\tau, 0) = \psi_w$, до $n = n_d$ уравнения (2.5), которое с точностью до ε_1 записывается в форме

$$(3.10) \quad d\psi = -c y_w' \rho U dn$$

При этом n_d вычисляется по y_d , найденному из (3.6) с использованием формул (2.2). Последовательный расчет сечений $\tau = \text{const}$ в порядке возрастания τ от точки появления пристеночной области, основанный на использовании уравнений (3.6) — (3.10), позволяет определять функции $H(\psi)$ и $S(\psi)$ и распределение по n всех параметров (кроме $V \sim \varepsilon_1$) в каждом сечении.

Наличие пристеночной области низкоэнтропийного газа оказывает влияние на все течение, вызывая в нем изменения параметров на величины порядка ε_1 . После расчета данной области учет этого влияния, как и в случае обычного пограничного слоя, проводится с использованием толщины вытеснения

$$\delta^*(\tau) = \int_0^{n_d} \left[1 - \frac{\rho U}{(\rho U)_{we}} \right] dn$$

и последующего пересчета равновесного течения. Указанный пересчет проводится для контура, получающегося из исходного добавлением (с учетом знака) величины δ^* , которая в каждой точке откладывается по нормали n . При этом в случае положительных (отрицательных) δ^* ордината стенки, т. е. y_w , уменьшается (увеличивается). Если подобный пересчет не проводится, то, как и для пограничного слоя, это означает, что полученные результаты отвечают контуру, деформированному аналогичным образом на $(-\delta^*)$.

Как видно из приведенного анализа, все сказанное в данном пункте о пристеночном слое остается справедливым при любых ε_1 , произвольном законе сопротивления частиц и т. д., если только толщина слоя мала (в случае достаточно плавного расширения газа это нередко имеет место и при сравнительно больших ε_1). При этом в соответствующих рассуждениях под ε_1 следует понимать толщину пристеночного слоя (отнесенную к характерному размеру сопла). В то же время для справедливости уравнений, описывающих течение в ядре потока, требование малости ε_1 и ε_2 обязательно, хотя полученные результаты применимы при произвольном (т. е. не стоксовском) законе сопротивления и теплообмена для частиц. Последнее связано с тем, что при малом динамическом и тепловом запаздывании частиц любой из указанных законов после соответствующей линеаризации дает формулы, отвечающие стоксовскому режиму обтекания.

4. В расчетах, результаты которых приводятся ниже, равновесные распределения параметров, т. е. решение системы (3.2), вычислялись по формулам, аналогичным формулам работы [4], в которой использовались разложения по параметру $\varepsilon = 1/R$, где R — радиус кривизны стенки сопла в минимальном сечении (при $x = 0$), отнесенный к радиусу (при $v = 1$) или полувысоте (при $v = 0$) сопла в том же сечении. После введения новых переменных ($z = xR^{-1/2}$ и $w = vR^{1/2}$) эти формулы с точностью до ε имеют вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_e(z, y) &= a_0(z) + \varepsilon [b_0(z) + y^2 b_1(z)] \\ w_e(z, y) &= y a_1(z) + \varepsilon y [b_2(z) + y^2 b_3(z)] \end{aligned}$$

здесь и далее используемые обозначения отличаются от [4].

Функция a_0 , дающая распределение по z осевой составляющей скорости в одномерном приближении, находится из обыкновенного дифференциального уравнения

$$(4.2) \quad (1 - a_0^2) a_0' + (1 + v) \left(1 - \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1} a_0^2 \right) a_0 (\ln y_w)' = 0$$

которое интегрируется при начальном условии $a_0(0) = 1$. Функция a_1 выражается через a_0 соотношением $a_1 = a_0 (\ln y_w)'$.

Подчеркнем, что в данном разделе штрихом обозначаются производные по z . После определения a_0 и a_1 функции b_i в (4.1), находятся из решения одного дифференциального и трех конечных (относительно искомым функциям) уравнений

$$(4.3) \quad \begin{aligned} (1 - a_0^2) b_0' &= 2a_0 b_0 \left[a_0' + (1 + v) \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1} a_1 \right] - (1 + v) \left(1 - \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1} a_0^2 \right) b_2 \\ b_1 &= a_1' / 2 \\ (3 + v) \left(1 - \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1} a_0^2 \right) b_3 &= \frac{8}{\kappa_e + 1} a_0 a_1 b_1 - (1 - a_0^2) b_1' + \\ &+ 2a_0 b_1 \left[a_0' + \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1} (1 + v) a_1 \right] + a_1^2 \left[\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1} a_0' + \left(1 + \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1} v \right) a_1 \right] \\ b_2 &= (b_0 + y_w^2 b_1) (\ln y_w)' - y_w^2 b_3 \end{aligned}$$

Так как при $z = 0$ множитель при b_0' в первом уравнении обращается в нуль, то начальное условие, обеспечивающее конечность и непрерывность решения, получается приравниванием нулю правой части этого уравнения в том же сечении. Отсюда, учитывая, что $y_w'(0) = 0$ и найдя $a_0'(0)$ из (4.2), получим

$$(4.4) \quad \begin{aligned} b_0(0) &= -\frac{1 + v}{2(3 + v)}, \quad b_1(0) = \frac{1}{2}, \quad b_2(0) = -b_3(0) = -\frac{\kappa_e + 1}{2(3 + v)} a_0'(0) \\ a_1(0) &= 0, \quad a_0'(0) = \left(\frac{1 + v}{\kappa_e + 1} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Интегрирование уравнения (4.2) и первого уравнения системы (4.3) проводится от минимального сечения ($z = 0$) независимо в сторону отрицательных и положительных z . Отход от начального сечения выполняется с использованием для a_0 и b_0 разложений по z . Беря достаточно малое z , можно ограничиться двумя слагаемыми. Величина $b_0'(0)$, которую необходимо в таком случае добавить к (4.4), равна

$$b_0'(0) = -\frac{3+2\nu}{2(3+\nu)} a_0'(0)$$

Приведем также используемые при расчете выражения, дающие при $z = 0$ значения производных ряда других коэффициентов

$$(4.5) \quad \begin{aligned} a_1'(0) &= 1, & b_1'(0) &= a_0'(0), & b_2'(0) &= -\frac{3+2(1+\nu)(\kappa_e+3)}{3(3+\nu)} \\ b_3'(0) &= \frac{2[3+(1+\nu)(\kappa_e+3)]}{3(3+\nu)}, & a_0''(0) &= \frac{3-2\kappa_e}{3} a_0'^2(0) \\ a_0'''(0) &= \frac{9-12\kappa_e+\kappa_e^2}{6} a_0'^3(0) - \frac{3}{2} a_0'(0) \end{aligned}$$

Уравнения (3.4) и (3.5) после перехода к переменным z и w , замены ε_i на $\varepsilon_i^\circ = \varepsilon_i \sqrt{\varepsilon}$, постановки выражений (4.1) для равновесных распределений параметров, использования условий (1.2) и отбрасывания членов порядка ε^2 , $\varepsilon \varepsilon_i^\circ$ и выше сводятся к следующей системе обыкновенных дифференциальных и конечных уравнений:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \Delta \rho' &= \kappa_e p_{e0} (1 - M_0^2)^{-1} \Gamma_1, & \Delta p' &= \kappa_e p_{e0} M_0^2 \Delta \rho' + \Gamma_2 \\ \Delta u' &= -a_0 \Delta \rho' + \Delta u (\ln a_0)', & \Delta \rho_s &= \Delta \rho + \Gamma_3 \\ \Delta w &= y \Delta u (\ln y_w)', & \Delta T &= \frac{\Delta p}{p_{e0}} - \frac{p_{e0}}{p_{e0}} \Delta \rho \\ \Delta h &= \frac{\kappa p_{e0}}{(\kappa-1) p_{e0}} \left(\frac{\Delta p}{p_{e0}} - \Delta \rho \right), & \Delta u_s &= \Delta u - \varepsilon_1^\circ a_0 a_0' \\ \Delta w_s &= \Delta w - \varepsilon_1^\circ a_0 (a_0' y_w' + a_0 y_w'') y / y_w \\ \Delta T_s &= \Delta T + \varepsilon_2^\circ \frac{\kappa_e - 1}{\kappa m} \delta a_0^2 a_0' \end{aligned}$$

Здесь и далее $M_0^2 = a_0^2 \rho_{\Sigma e 0} / \kappa_e p_{e0}$ — квадрат числа Маха равновесного одномерного течения; индекс нуль приписан параметрам, при вычислении которых по формулам (3.3) опускается v_e , а u_e заменяется на a_0 , что отвечает равновесным значениям соответствующих величин, получающимся в одномерном приближении. Функции Γ_i в (4.6) равны

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left[\frac{\Delta p}{p_{e0}} - m \Delta \rho - (1-m) \Delta \rho_s - 2 \frac{\Delta u}{a_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta (\kappa_e - 1)^2 (1-m)}{m \kappa_e} (\Delta \rho - \Delta \rho_s) \right] \rho_{\Sigma e 0} a_0 a_0' + \Phi_1 + \Phi_2 \\ \Gamma_2 &= \Phi_1 - \left[2 \frac{\Delta u}{a_0} + m \Delta \rho + (1-m) \Delta \rho_s \right] \rho_{\Sigma e 0} a_0 a_0' \\ \Gamma_3 &= \varepsilon_1^\circ \left[(1+\nu) \left(a_1' + \frac{a_1'^2}{a_0} \right) + a_0'' + (1-M_0^2) \frac{a_0'^2}{a_1} \right] \\ \Phi_1 &= \varepsilon_1^\circ (1-m) (2a_0'^2 + a_0 a_0'') \rho_{\Sigma e 0} a_0 \\ \Phi_2 &= (1-m) (1-\kappa_e) \times \\ &\quad \times \left\{ \varepsilon_1^\circ a_0'^2 + \delta \frac{1-\kappa_e}{m \kappa_e} [\varepsilon_2^\circ \delta a_0 a_0'' + (\varepsilon_1^\circ + 2\varepsilon_2^\circ \delta) a_0'^2] \right\} \rho_{\Sigma e 0} a_0 \end{aligned}$$

При $\Gamma_1(0) \neq 0$ правая часть первого уравнения системы (4.6) в сечении $z = 0$, где $M_0 = 1$, обращается в бесконечность. Поэтому, как и в случае (4.3), для обеспечения ограниченности и непрерывности решения необходимо положить $\Gamma_1(0) = 0$, что дает одно граничное условие для интегрирования (4.6). Прочие граничные условия в согласии с (1.3) и (1.4) формулируются в виде линейных связей между Δu , Δp , ... при $z = -\infty$. Так, например, из (1.3) следует, что при $z = -\infty$ имеем

$$\Delta u_s = \Delta u, \quad \Delta w_s = \Delta w, \quad \Delta T_s = \Delta T$$

В данном приближении эти равенства выполняются автоматически в силу трех последних уравнений (4.6), поскольку в рассматриваемых случаях при $z = -\infty$ исчезают добавки, стоящие в правых частях указанных уравнений. В то же время связи, следующие из (1.4), не выполняются тождественно, давая три недостающих граничных условия при $z = -\infty$. Решение получающейся в результате краевой задачи (с одним условием при $z = 0$ и тремя при $z = -\infty$), которое сопряжено со значительными трудностями, можно (как это и будет делаться ниже) заменить решением задачи Коши, задавая недостающие граничные условия при $z = 0$, например, положив здесь Δp , Δp_s и Δu равными нулю. В итоге будем иметь

$$(4.7) \quad \Delta p = \Delta p_s = \Delta u = 0, \quad \Delta p = -(\Phi_1 + \Phi_2)/\kappa_e a_0' \quad (z = 0)$$

Отход от сечения $z = 0$, как и в случае уравнений (4.2) и (4.3), проводится с использованием разложений в ряды. Производная $\Delta p'$ при $z = 0$, необходимая для этого, в соответствии с (4.6) и (4.7) дается равенством

$$\Delta p' = \Gamma_4/2 (1 + \kappa_e) a_0'$$

где все величины берутся при $z = 0$, а

$$\begin{aligned} \Gamma_4 &= \left\{ (1-m) \left[1 + \delta \frac{(\kappa_e - 1)^2}{m\kappa_e} \right] \Phi_3 - \kappa_e \Phi_1 \right\} a_0' - \Phi_1' - \Phi_2' - \kappa_e a_0'' - \kappa_e^2 a_0''^2 \\ \Phi_1' &= \varepsilon_1^\circ (1-m) (5a_3' a_0'' + a_0''') \\ \Phi_2' &= 2\varepsilon_1^\circ (1-m) (1 - \kappa_e) a_3' a_0'' + \delta \frac{(1-m)(\kappa_e - 1)^2}{m\kappa_e} [\varepsilon_2^\circ a_1'' \delta + \\ &+ (2\varepsilon_1^\circ + 5\varepsilon_2^\circ \delta) a_3' a_0''] \\ \Phi_3 &= \varepsilon_1^\circ [(1 + \nu)(a_1' + a_1^2) + a_1''] \end{aligned}$$

Значения производных a_0'' и a_0''' при $z = 0$ вычисляются при этом по формулам (4.5). Нетрудно видеть, что все отличные от Δp , Δp , Δu и Δp_s величины в дифференциальных уравнениях (4.6) и начальных условиях (4.7) не зависят от y . Отсюда и из оставшихся соотношений системы (4.6) следует, что от y зависят лишь Δw и Δw_s , а прочие добавки есть функции только z .

Естественно, что полученные в результате решения задачи Коши значения параметров при $z = -\infty$ не удовлетворяют условиям (1.4), которые в таком случае используются для вычисления поправленных (на величины порядка ε_1° и ε_2°) значений m , а также критической скорости q_* и плотности ρ_* смеси. Последние находятся из первых двух уравнений (1.4), записанных в виде

$$\frac{\kappa_e p}{(\kappa_e - 1) \rho_\Sigma} + \frac{q^2}{2} = \frac{(\kappa_e + 1) q_*^2}{2(\kappa_e - 1)}; \quad \frac{p}{(\rho_\Sigma)^{\kappa_e}} = \frac{q_*^2}{\kappa_e \rho_*^{\kappa_e - 1}}$$

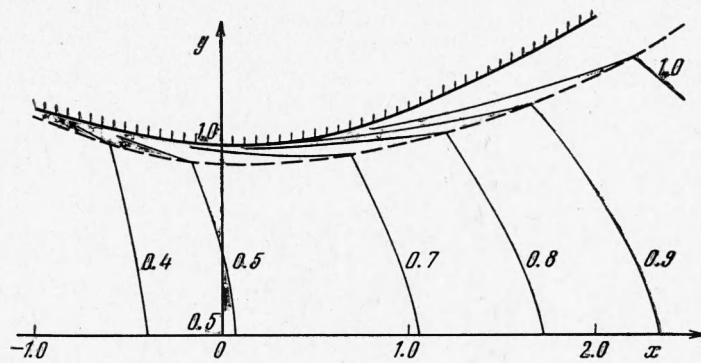
Укажем, каким образом при расчете параметров в пристеночном слое, практически не меняя полученных ранее соотношений, можно учесть поправки порядка $O(\varepsilon_i)$. Напомним, что в соответствии с (3.7) давление поперек пристеночного слоя в рассмотренном выше нулевом приближении постоянно и равно своему равновесному значению на стенке. Учет членов более высокого порядка малости дает

$$\partial p / \partial n = \rho U^2 K$$

где, как и в (2.3), K — кривизна стенки.

Так как для сопел с достаточно плавным контуром кривизна в любой точке того же порядка, что и в минимальном сечении (или даже меньше), то $K \sim \varepsilon$. Поэтому с учетом толщины пристеночного слоя ($n_d \sim \varepsilon_1$) раз-

ность ($p_w - p_d$) равна нулю и в следующем приближении. Вследствие этого для учета членов первого порядка в правую часть (3.7), а также в (3.8) и (3.9) вместо величин с индексом w нужно подставлять значения соответствующих параметров на линии раздела, найденных с учетом Δp , $\Delta \rho$, ... и вытесняющего эффекта пристеночного слоя. Вытесняющий эффект, как и Δp , $\Delta \rho$, ... при этом с точностью до величин более высокого порядка достаточно вычислить в одномерном приближении. Так как разность ($\psi - \psi_w$) для определения U и ρ с точностью до ε_i включительно следует находить с точностью до ε_1^2 , то y_w в (3.10) необходимо в соответствии с (2.2) заменить на $y = y_w - n \cos \sigma$. При этом y_d , а следовательно, и n_d определяется совместным интегрированием (2.1), а также пятого и шестого уравнений из (1.1), в которые подставляются u и v , вычисленные (для ядра потока) с точностью до ε_1 и ε_2 включительно. Наконец, $V \sim \varepsilon_1$ находит-



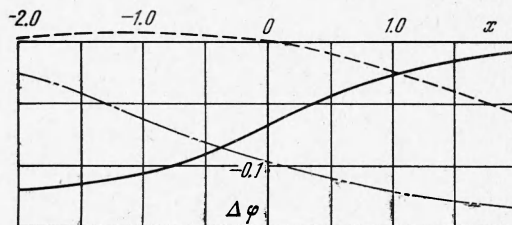
Фиг. 2

ся интегрированием по n последнего уравнения системы (2.3), которое с учетом других уравнений этой системы можно преобразовать к виду

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \psi} \right)_{\tau} = \frac{M^2 - 1}{c y_w \rho^2 U^2} \frac{d p_{we}}{d \tau} + \frac{V}{U} \left(\frac{\partial U}{\partial \psi} \right)_{\tau} \quad \left(M^2 = \frac{\rho U^2}{\kappa p_{we}} \right)$$

Все величины в этом уравнении, за исключением V , берутся из нулевого приближения. На стенке (при $\psi = \psi_w$) в согласии с (2.6) V равно нулю.

5. Разработанный в данной работе подход был применен для расчета течения двухфазной смеси в осесимметричном «гиперболическом» сопле, контур которого задавался формулой $y_w = (1 + 0.2 x^2)^{1/2}$, чему соответствует $\varepsilon = 0.2$. Контур симметричен относительно оси y и при $|x| \rightarrow \infty$ имеет асимптотами прямые с



Фиг. 3

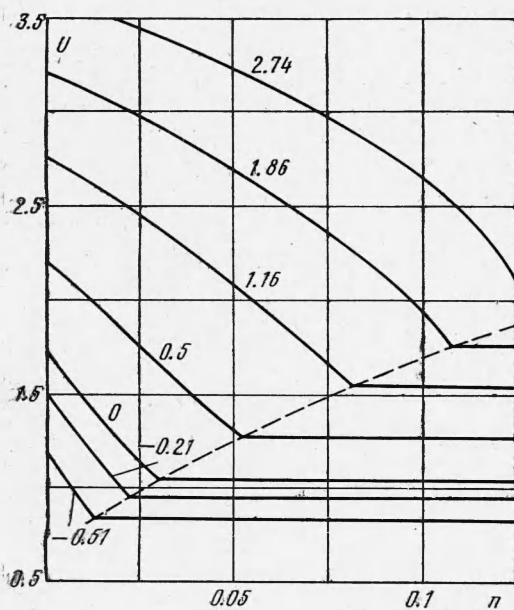
имеет асимптотами прямые с $|y_w'| = \sqrt{5}$. Константы, входящие в уравнения, были взяты равными $\kappa = 1.2$, $\delta = 1.0$, $m = 0.25$ и $\varphi' = \varphi'' = 10$, что дает $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$ и $\kappa_e = 1.125$.

Расчеты выполнялись на ЭВМ М-20, в ядре потока и в пристеночном слое учитывались члены нулевого и первого (по ε_1 , ε_2 и ε) порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений (4.2), (4.3) и (4.6) от сечения $x = 0$ осуществлялось методом Рунге —

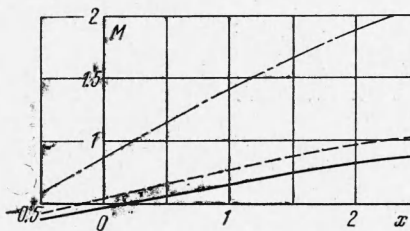
Кутта. Расчет пристеночного слоя, который в данном случае в действительности появляется уже при $x = -\infty$, начинался в сечении $x_0 = -1.0$, где полагалось $n_d = 0$. Этот выбор, как показали аналогичные расчеты с $x_0 = -0.5$ и -2.0 , обеспечивает точность, вполне достаточную при графическом представлении точность результатов.

Некоторые из результатов расчета показаны на фиг. 2—5. На фиг. 2, на которой масштаб по оси y вдвое больше, чем по x , а сама ось x совмещена с прямой $y = 0.5$, изображены контур сопла, граница раздела (штриховая линия) и линии постоянства числа Маха (соответствующие значения даны цифрами около кривых). Число Маха $M = q/a$ при этом вычислялось по скорости звука в газе $a = (\kappa p/\rho)^{1/2}$, которая, как известно [4-14, 20], определяет тип системы (1.1). В рассмотренном случае в области, занятой частицами, скорость газа (а тем более скорость частиц) остается дозвуковой весьма далеко в расширяющейся части сопла. В то же время отношение q/a_{Σ} , где $a_{\Sigma} = (\kappa_e p/\rho_{\Sigma})^{1/2}$ — «равновесная скорость звука в смеси» (указанный смысл a_{Σ} имеет лишь в тех точках потока, в которых нет теплового и скоростного отставания частиц), достигает единицы вблизи минимального сечения сопла.

На фиг. 3 сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиями пред-



Фиг. 4



Фиг. 5

ставлены кривые, дающие изменение по x неравновесных добавок ($\Delta \phi$) давления и осевых компонент скоростей газа и частиц соответственно. Максимум разности $u - u_s = \Delta u - \Delta u_s$ имеет место вблизи минимального сечения сопла, что согласуется с известными результатами одномерных расчетов. Отметим, кстати, что, как показывает выполненный выше анализ, в данном приближении учет эффектов отставания частиц также является по существу одномерным. Величины Δu и Δu_s , как и сами скорости газа и частиц при $x \rightarrow -\infty$, для рассмотренного сопла стремятся к нулю, в то время как $\Delta p(-\infty) = -0.13$.

Более полное, чем фиг. 2, представление о неравномерности потока в пристеночном слое дает фиг. 4, на которой изменение U по n показано для различных сечений сопла (цифры около кривых — значения x_w). При рассмотрении фиг. 4 следует помнить, что U отнесено к критической скорости равновесного двухфазного потока. Штриховая линия на фиг. 4 отвечает границе раздела. Ниже нее линии, дающие распределение U по n при $\tau = \text{const}$, в пределах графика почти параллельны оси абсцисс, что связано с малой неравномерностью параметров в ядре потока. Последнее видно и из рассмотрения фиг. 5, на которой изображено изменение M вдоль оси симметрии (сплошная кривая), линии раздела (пунктир) и стенки сопла (штрихпунктир). Для сверхзвуковой части потока в сопле Лавали сильная неравномерность параметров в пристеночном слое при большом содержании частиц подтверждается также результатами работ [10, 11, 14, 21]. С уменьшением расхода частиц (с ростом m) указанная неравномерность убывает.

В связи с образованием при двухфазном течении в сопле сравнительно тонкого пристеночного слоя естественно возникает вопрос о роли вязкости и теплопроводности газа, которые в использованной выше модели учитываются лишь при взаимодействии фаз. В действительности указанные диссипативные эффекты существенны только вблизи стенок, что служит причиной образования вязкого пограничного слоя. Очевидно, что выполненный выше анализ течения в пристеночном слое чистого газа справедлив лишь тогда, когда этот слой существенно толще вязкого пограничного

слоя, образующегося на стенке сопла. Так как толщина последнего определяется числом Рейнольдса — безразмерным параметром, который не зависит от безразмерных параметров, характеризующих взаимодействие фаз, то возможны обе ситуации.

Поступила 3 VII 1972.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rannie W. D.* Perturbation analysis of one-dimensional heterogeneous flow in rocket nozzles. In: Detonation and two-phase flow. N. Y., Acad. Press, 1962, pp. 117—144. (Рус. перев.: Исследование методом возмущений одномерного гетерогенного течения в ракетных соплах. Сб. «Детонация и двухфазное течение». М., «Мир», 1966, стр. 121—154).
2. *Marble F. E.* Nozzle contours for minimum particle-lag loss. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 12, pp. 2793—2801.
3. *Стернин Л. Е.* Экстремальные контуры сопел для потоков газа с отставанием частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5, стр. 14—22.
4. *Kliegel J. R., Quan V.* Convergent-divergent nozzle flows. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 9, pp. 1728—1734.
5. *Kliegel J. R., Nickerson G. R.* Flow of gas-particle mixtures in axially symmetric nozzles. ARS Rept, 1961, No. 1713—61.
6. *Kliegel J. R., Nickerson G. R.* Flow of gas-particle mixtures in axially symmetric nozzles. In: Detonation and two-phase flow. N. Y., Acad. Press., 1962, pp. 173—194. (Рус. перев.: Течение смеси газа и частиц в осесимметричном сопле. Сб. Детонация и двухфазное течение. М., «Мир», 1966, стр. 183—201.)
7. *Kliegel J. R.* Gas-particle nozzle flows. 9-th Sympos. (Internat.) on Combustion. N. Y., Acad. Press. Inc., 1963, pp. 811—826. (Рус. перев.: Течение смеси газа с частицами в сопле. Сб. «Вопросы ракетной техники», № 10 (130). М., «Мир», 1965, стр. 3—29).
8. *Hoffman J. D., Lorenc S. A.* A parametric study of gas-particle flows in conical nozzles. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 1, pp. 103—106.
9. *Lorenc S. A., Hoffman J. D.* Correlation of performance of conical and contoured nozzles for gas-particle flow. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 1, pp. 169—171.
10. *Верещака Л. П., Галюн Н. С., Крайко А. Н., Стернин Л. Е.* Результаты расчета методом характеристик течения газа с частицами в осесимметричных соплах и сравнение с результатами одномерного приближения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3, стр. 123—128.
11. *Верещака Л. П., Крайко А. Н., Стернин Л. Е.* Метод характеристик для расчета сверхзвуковых течений газа с инородными частицами в плоских и осесимметричных соплах М., ВЦ АН СССР, 1969.
12. *Дритов Г. В., Тишин А. П.* Расчет неравновесного течения газа с частицами конденсата в сопле Лавалья. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5, стр. 36—42.
13. *Дритов Г. В., Тишин А. П.* О профилировании сопел, работающих на газе с частицами конденсата. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1, стр. 170—175.
14. *Верещака Л. П., Крайко А. Н., Стернин Л. Е.* Сегодняшние характеристики метода расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых двухфазных течений. В сб. «Лопаточные машины и струйные аппараты», вып. 6. М., «Машиностроение», 1972, стр. 163—178.
15. *Камзолов В. Н., Маслов Б. Н., Пирумов У. Г.* Исследование траекторий частиц в соплах Лавалья. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5, стр. 136—143.
16. *Regan J. F., Thompson H. D., Huglund R. F.* Two-dimensional analysis of transonic gas-particle flows in axisymmetric nozzles. AIAA Paper, 1969, No. 572. J. Spacecraft and Rockets, 1971, vol. 8, No. 4, pp. 346—351.
17. *Пирумов У. Г.* Расчет течения в сопле Лавалья. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5, стр. 10—22.
18. *Иванов М. Я., Крайко А. Н.* Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5, стр. 77—83.
19. *Иванов М. Я., Крайко А. Н.* Расчет смешанного течения газа в соплах. Труды секции по численным методам в газовой динамике 2-го Международного коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем, т. 2, Новосибирск, 1969, М., ВЦ АН СССР, 1971.
20. *Крайко А. Н., Стернин Л. Е.* К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, стр. 418—429.
21. *Аерест Э. М., Крайко А. Н.* Двуслойная квазиодномерная модель для расчета течения смеси газа с инородными частицами в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3, стр. 64—70.