# ОБ ИЗМЕРЕНИИ СЖИМАЕМОСТИ ГРУНТА

*А. М. Скобеев*

*(Москва)*

В [1] описан прибор, который применялся для изучения динамической сжимаемости грунта. Этот прибор в общих чертах представляет собой вертикально стоящий стакан, на дно которого кладется образец грунта. Образец прижат упругим поршнем, по которому бьет свободно падающий груз. В процессе опыта регистрируется напряжение в образце и смещение дна поршня как функции времени.

Деформация определяется просто как отношение смещения к высоте образца, процесс предполагается квазистатическим.

Очевидно, что процесс будет квазистатическим не всегда, в частности, непосредственно после удара в образце может возникнуть ударная волна. Следовательно, необходимо оценить пределы применимости квазистатического рассмотрения.

Для планирования серии опытов желательно знать пределы изменения напряжения при известной высоте падения груза и заданной упругости поршня.

Наконец, желательно иметь возможность при помощи серии опытов проверить, выполняется ли для образца грунта какое-нибудь уравнение состояния.

Эти вопросы и рассматриваются в данной заметке.

**1.** С самого начала предполагается, что все величины зависят только от времени $t$ и одной пространственной координаты $x$. Ось $x$ направлена вверх, грунт занимает интервал $[0, l_1]$, поршень $[l_1, l_1+l_2]$. Далее обозначено напряжение $\sigma(x, t)$, деформация $\varepsilon(x, t)$, скорость $v(x, t)$, смещение $u(x, t)$, плотность $\rho(x, t)=\rho_1$ при $0\leqslant x\leqslant l_1$, $\rho_2$ при $l_1\leqslant x\leqslant l_1+l_2$, $\rho_1, \rho_2=\text{const}$, $\sigma=E_2\varepsilon$ при $l_1\leqslant x\leqslant l_1+l_2$, $m$ — масса груза на единицу поверхности образца, $v_0$ — модуль скорости груза в момент удара. Положительными считаем сжимающие напряжение и деформацию.

В квазистатическом приближении предполагается, что $\partial\sigma/\partial x=0$, $\partial\varepsilon/\partial x=0$. Чтобы это приближение было справедливым, нужно потребовать, чтобы напряжение во всех опытах мало отличалось от напряжения в какой-нибудь одной точке, например $x=l_1+l_2$. Далее проверяется более мягкое условие

$$s_1\equiv\left|\int_0^t[\sigma(l_1+l_2,\tau)-\sigma(0,\tau)]\,dt\right|\ll s_2\equiv\left|\int_0^t\sigma(l_1+l_2,\tau)\,d\tau\right| \qquad (1.1)$$

Уравнения движения для среды и груза имеют вид

$$\rho(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial\sigma(x,t)}{\partial x}, \qquad m\frac{dv(l_1+l_2,t)}{dt}=\sigma(l_1+l_2,t) \qquad (1.2)$$

Из этих уравнений следует:

$$s_1=\left|\int_0^{l_1+l_2}\rho(x,t)\,v(x,t)\,dx\right|, \qquad s_2=m\,|v(l_1+l_2,t)-v_0| \qquad (1.3)$$

Естественно предположить, что $|v(x,t)|\leqslant v_0$. Тогда $s_1<(\rho_1l_1+\rho_2l_2)v_0$ и условие (1.1) сведется к условию

$$\rho_1l_1+\rho_2l_2\ll m\,[1-|v(l_1+l_2,t)|/v_0] \qquad (1.4)$$

или

$$\rho_1l_1+\rho_2l_2=\mu m\,[1-|v(l_1+l_2,t)|/v_0] \qquad (\mu \text{ — мало}) \qquad (1.5)$$

Из (1.4), во-первых, следует, что параметры установки во всяком случае должны удовлетворять условию

$$\rho_1l_1+\rho_2l_2\ll m \qquad (1.6)$$

т. е. масса груза должна быть много больше массы грунта и поршня. В дальнейшем считаем это выполненным.

Во-вторых очевидно, что при $t=0$ (1.4) не выполняется (правая часть — нуль), но с течением времени $v(l_1+l_2,t)$ убывает до нуля (груз тормозится). Следовательно, существует интервал времени $[0, t_*]$, в котором процесс не квазистатический.

**2.** Теперь следует получить уравнения, описывающие процесс на квазистатическом участке Далее всюду используются скращенные обозначения

$$-v(l_1,t)=v_1, \quad -v(l_1+l_2,t)-v_1=v_2$$
$$\varepsilon(l_1,t)=\varepsilon_1, \quad \varepsilon(l_1+l_2,t)=\varepsilon_2, \quad \omega=(ml_1E_1^{-1}+ml_2E_2^{-1})^{-1/2}$$

Из условия квазистатичности следует

$$\varepsilon_1^{\cdot}=v_1/l_1, \qquad \varepsilon_2^{\cdot}=v_2/l_2$$

Отсюда второе из уравнений (1.2) можно записать в виде (с учетом $E_2\varepsilon_2=\sigma$)

$$ml_1\varepsilon_1^{\cdot\cdot}+ml_2E_2^{-1}\sigma^{\cdot\cdot}=-\sigma \qquad (2.1)$$

Это уравнение замыкается уравнением состояния грунта (которое заранее неизвестно) и граничными условиями

$$\varepsilon\,(0) = 0, \quad \sigma\,(0) = 0, \quad l_1\varepsilon_1^{\cdot}\,(0) + l_2E_2^{-1}\sigma^{\cdot}\,(0) = v_0 \tag{2.2}$$

Последнее из этих условий получается из определения $\varepsilon_1^{\cdot}$ и $\varepsilon_2^{\cdot}$ заменой $\varepsilon_2^{\cdot}$ на $E_2^{-1}\sigma^{\cdot}$. Разумеется, из (2.1), (2.2) невозможно определить $\sigma\,(t)$ и $\varepsilon\,(t)$, так как уравнение состояния неизвестно, однако некоторые оценки сделать можно.

Предположим, что уравнение состояния имеет вид

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{1}{E_1}\frac{d\sigma}{dt} + g\,(\sigma - \sigma_+(\varepsilon)), \quad g \geqslant 0, \quad g\,(0) = 0 \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в (2.1), учтя, что $\omega^2 = m\,(l_1E_1^{-1} + l_2E_2^{-1})$, получим

$$\sigma^{\cdot\cdot} = -\omega^2\sigma - \omega^2 m l_1 g^{\cdot} \tag{2.4}$$

или

$$\sigma = \omega^{-1}\sigma^{\cdot}\,(0)\sin\omega t - \int_0^t \omega^2 m\, l_1\, g^{\cdot}\,\sin\omega\,(t-\xi)\,d\xi = \tag{2.5}$$

$$= \omega^{-1}\sigma^{\cdot}\,(0)\sin\omega t - \omega^3 m\, l_1 \int_0^t \cos\omega\,(t-\xi)\,g\,d\xi$$

Из (2.5) следует $\sigma\,(t) < \omega^{-1}\sigma\,(0)$ или, с учетом (2.2) и (2.3)

$$\sigma_{\max} < v_0\left(\frac{mE_1E_2}{l_1E_2 + l_2E_1}\right)^{1/2} \tag{2.6}$$

Существенное значение имеет также время нарастания нагрузки $t_+$. Для него получаем оценку

$$t_+ < \frac{\pi\sqrt{m}}{2}\left(\frac{l_1E_2 + l_2E_1}{E_1E_2}\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

Неравенства (2.6) и (2.7) позволяют заранее оценить важные величины $\sigma_{\max}$ и $t_+$, если известна величина $E_1$, или так называемая динамическая диаграмма.

Из (2.7) видно, что оценка для $t_+$ не содержит $v_0$; по-видимому, это значит, что время нарастания мало зависит от скорости удара.

Наконец, можно получить оценку для $t_*$ момента времени, начиная с которого процесс можно считать квазистатическим.

Пусть уравнение состояния имеет вид $\sigma = E_1\varepsilon$. Тогда из (2.1), (2.2) и (1.2) следует

$$v = v_0\cos\omega t, \qquad t_+ = \pi\omega^{-1}\,/\,2 \tag{2.8}$$

и (1.5) дает следующие оценки для $t_*$ и $t_*\,/\,t_+$:

$$\mu\,(1 - \cos\omega t_*) = (\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2)\,/\,m \tag{2.9}$$

$$t_*\,/\,t_+ = 2\pi^{-1}\arccos\,[1 - (\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2)\,/\,(m\mu)] \tag{2.10}$$

Здесь $\mu$ то же, что из (1.5), и характеризует допустимую погрешность. Естественно потребовать, чтобы выполнялось условие $t_*/t_+ \ll 1$, т. е. время установления квазистатики мало по сравнению с длительностью процесса. Тогда из (2.10) получается

$$t_*\,/\,t_+ = 2\pi^{-1}\sqrt{2\,(\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2)\,/\,(m\mu)}$$

или $m\mu \gg \rho_1 l_1 + \rho_2 l_2$, что сильнее, чем (1.6).

Из (2.10) видно, что $t_*\,/\,t_+$ не зависит ни от $v_0$, ни от $E_1$, т. е. для упругой среды не зависит от уравнения состояния.

Следовательно, $t_*/\,t_+$ мало зависит от уравнения состояния образца. Поэтому (2.10) можно использовать для предварительной оценки $t_*\,/\,t_+$ в неизвестном образце.

3. Для того чтобы получить информацию о поведении грунта по данным опыта, можно пользоваться разными способами. Здесь коротко обсуждаются два из них.

Первый состоит в том, что строится семейство кривых $(\sigma, \varepsilon)$ при постоянных $\varepsilon^{\cdot}$ и предполагается, что это в некоторых случаях может заменить точное уравнение.

Далее на примере упругого образца показано, что для этого описанный прибор не пригоден. Условие применимости первого способа можно записать в виде

$$|\varepsilon^{\cdot\cdot}t_+| \ll |\varepsilon^{\cdot}| \quad \text{или} \quad |\varepsilon^{\cdot\cdot}\,t_+/\varepsilon^{\cdot}| < \mu_1 \tag{3.1}$$

где $\mu$ достаточно мало. Это просто значит, что $\varepsilon^{\cdot}$ не должно существенно меняться за характерное время процесса. Кроме того, критерий точности $\mu_1$ разумно выбрать равным $\mu$.

Для упругого образца ($\sigma = E_1\varepsilon_1$) условие (3.1) переходит в $^1/_2\pi\ \mathrm{tg}\,\omega t < \mu$, т. е. (3.1) выполняется лишь при $t < t_0$, где $t_0 = \omega^{-1}$ arc tg $(2\mu / \pi)$.

Таким образом, $\varepsilon^{\cdot}$ можно считать постоянным лишь при $t_* < t < t_0$, т. е. необходимо $t_0 > t_*$. Если использовать (2.9), то это неравенство можно переписать в виде ($t_*$ должно быть мало)

$$\mu^3 > \frac{\pi^2}{2}\ \frac{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2}{m}$$

Это очень жесткое неравенство.

Второй способ состоит в том, что предполагается некоторое уравнение состояния грунта и ставится серия опытов для проверки этого предположения.

Например, предположим, что грунт описывается уравнением (2.3) с линейными $g$ и $\sigma_+$. Пусть $\sigma_*$ $(t)$ и $\varepsilon_*$ $(t)$ есть решение системы (2.1) — (2.3) с $v_0 = v_*$. Тогда решение с произвольным $v_0$ имеем вид $\sigma$ $(t) = (v_0 / v_*)\ \sigma_*(t)$, $\varepsilon\,(t) = (v_0 / v_*)\ \varepsilon_*(t)$. Таким образом, серия опытов с разными $v_0$ позволит решить, применимо ли данное предположение.

В заключение автор благодарит участников семинара отдела динамики неупругих сред Института проблем механики АН СССР за обсуждение данной работы.

Поступило 2 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников В. В., Рыков Г. В. О влиянии скорости деформирования на сжимамость лессовых грунтов. ПМТФ, 1965, № 2.

---

## ОБ АКТИВНОМ НАГРУЖЕНИИ СТЕРЖНЯ ИЗ МАТЕРИАЛА С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ТЕКУЧЕСТЬЮ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИАГРАММЕ УПРОЧНЕНИЯ

*Ю. П. Гуляев*

*(Москва)*

На основе модели В. С. Ленского получено точное решение задачи о распространении нелинейных упруго-пластических волн нагружения в полубесконечном стержне с запаздывающей текучестью.

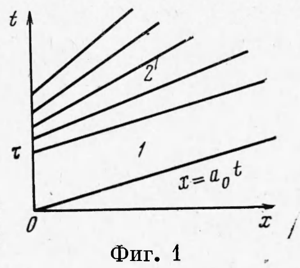
В работе [1] была предложена модель, описывающая эффект запаздывания текучести материала, на основе схемы линейного упрочнения.

Существует возможность обобщения этой модели на случай, когда зависимость $\sigma = \sigma\,(\varepsilon,\, t)$ будет нелинейной. При этом задача об активном нагружении полубесконечного стержня сводится к построению соответствующей волны Римана [2].

Пусть на конце $x = 0$ полубесконечного стержня $x \geqslant 0$, материал которого обладает эффектом запаздывания текучести, действует давление $\varphi\,(t)$. Для определенности будем считать давление растягивающим. Связь $\sigma \sim \varepsilon \sim t$ в любом сечении стержня примем в виде

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (\varepsilon < \varepsilon_s) \qquad (1)$$

$$\sigma = E\varepsilon_s\,(t - x / a_0) + \Phi\,[\varepsilon - \varepsilon_s\,(t - x / a_0)] \quad (\varepsilon \geqslant \varepsilon_s)$$



Фиг. 1

Здесь $\varepsilon_s$ — убывающая функция времени, а функция $\Phi\,(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\Phi\,(0) = 0, \qquad 0 < \Phi'\,(z) \leqslant E, \qquad \Phi''\,(z) \leqslant 0 \quad (2)$$

Чтобы деформация на конце стержня была активной, давление должно удовлетворять условию [3]

$$\varphi'\,(t) \geqslant E\varepsilon_s'\,(t) \qquad (3)$$

В области упругих деформаций (обл. *1*, фиг. 1) уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a_0^2 = \frac{E}{\rho} \qquad (4)$$