ПМТФ, № 3, 1961

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ НЕУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Г. В. Иванов

(Новосибирск)

В наиболее общем виде устойчивость равновесия тонких стержней при упруго-пластических деформациях рассмотрена в работе Л. М. Качанова [1]. Там же имеются указания литературы, содержащей решение отдельных задач.

Из задач устойчивости равновесия тонких стержней в условиях ползучести рассматривалась только задача об устойчивости равновесия продольно-сжатого стержня. Этой задаче посвящена обширная литература, обзор которой содержится в докладе Н. Хоффа [2]. Кроме работ, обсуждавшихся в докладе Н. Хоффа, этой задаче посвящены работы [3-7].

Ниже, на основе критерия, предложенного в работе [8], рассматривается устойчивость равновесия сжато-изогнутых тонких стержней при упруго-пластических деформациях и деформациях ползучести. Используются, без оговорок, обозначения и терминология работы [8].

§ 1. Уравнения устойчивости равновесия. Координаты точек стержня будем определять при помощи отсчитываемой от одного из концов стержня длины дуги s осевой линии и триэдра подвижных осей x, y, z, где оси x, y направлены по главным осям инерции сечения, а ось z — по касательной к осевой линии. Ограничимся рассмотрением устойчивости равновесия сжато-изогнутых в плоскости yz стержней, поперечное сечение которых неизменно вдоль длины стержня и имеет две оси симметрии.

Величины, характеризующие деформирование в возмущенном состоянии при сколь угодно малых отклонениях от основного состояния, т. е. состояния, устойчивость равновесия которого изучается, можно представить в виде

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma^\times,\ \tau_{xz} = \tau_{xz}^\times, \qquad \tau_{yz} = \tau_{yz}^\times, \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon^\times, \qquad \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^\times$$
$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz}^\times, \qquad p = p_0 + p^\times, \qquad q = q^\times, \qquad r = r^\times, \qquad L_x = L_x^\circ + L_x^\times$$
$$L_y = L_y^\times, \qquad L_z = L_z^\times, \qquad V_x = V_x^\times, \qquad V_y = V_y^\circ + V_y^\times,\ V_z = V_z^\circ + V_z^\times$$

Здесь p, q, r — кривизны и кручение оси стержня, V_x, V_y, V_z, L_x, L_y, L_z — составляющие векторов усилия и момента; величины с нуликами соответствуют деформированию в основном состоянии; величины с косым крестом сколь угодно малы по сравнению с теми величинами, отмеченными нуликами, которые не равны нулю.

Уравнения равновесия при сколь угодно малых отклонениях от основного состояния имеют вид

$$\frac{dL_x^\times}{ds} - V_y^\times = 0, \qquad \frac{dV_x^\times}{ds} + q^\times V_z^\circ - r^\times V_y^\circ = 0 \tag{1.1}$$
$$\frac{dL_y^\times}{ds} + r^\times L_x^\circ - p_0 L_z^\times + V_x^\times = 0, \qquad \frac{dV_y^\times}{ds} - p^\times V_z^\circ - p_0 V_z^\times = 0$$
$$\frac{dL_z^\times}{ds} + p_0 L_y^\times - q^\times L_x^\circ = 0, \qquad \frac{dV_z^\times}{ds} + p^\times V_y^\circ + p_0 V_y^\times = 0$$
$$L_x^\circ = A p_0, \qquad L_x^\times = \int_\Omega \sigma^\times y\,dx\,dy = A^\times p^\times$$
$$L_y^\times = -\int_\Omega \sigma^\times x\,dx\,dy = B^\times q^\times, \qquad L_z^\times = \int_\Omega (x\tau_{yz}^\times - y\tau_{xz}^\times)\,dx\,dy = C^\times r^\times$$

Здесь Ω — площадь сечения, $A^\times$, $B^\times$, $C^\times$ определяются решением соответствующей системы уравнений связи между дополнительными напряжениями и деформациями, соотношениями, вытекающими из гипотезы плоских сечений, формой и размерами поперечного сечения стержня.

Критическое значение параметра нагружения λ_k есть наименьшее среди значений λ, при которых система (1.1) имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$\varepsilon^\times(\xi) \in R'[0, \lambda], \qquad \gamma_{xz}^\times(\xi) \in R'[0, \lambda], \qquad \gamma_{yz}^\times(\xi) \in R'[0, \lambda]$$

В случаях теории пластического течения и теории ползучести типа теории течения из доказанных в § 3 работы [8] неравенств легко усмотреть, что λ_k есть наименьшее среди значений λ, при которых имеется ненулевое решение системы уравнений (1.1) при $A^\times$, $B^\times$, $C^\times$, определенных из условия, что дополнительные деформации постоянны

$$\varepsilon^\times(\xi) = \text{const}, \qquad \gamma_{xz}^\times(\xi) = \text{const}, \qquad \gamma_{yz}^\times(\xi) = \text{const}, \qquad \xi \in [0, \lambda]$$

т. е. дополнительные напряжения определяются соотношениями: в случае теории пластического течения, в тех точках, где имеются пластические деформации

$$\sigma^\times(T_0) = E'\varepsilon^\times(T_0)$$

$$\tau_{xz}^\times(T_0) = G\exp\Big(-2G\int_{\tau_S}^{T_0} F(T_0)\,dT_0\Big)\gamma_{xz}^\times(T_0)$$

$$\tau_{yz}^\times(T_0) = G\exp\Big(-2G\int_{\tau_S}^{T_0} F(T_0)\,dT_0\Big)\gamma_{yz}^\times(T_0)$$

в случае теории ползучести типа теории течения

$$\sigma^\times(t) = E\exp\Big[-\frac{2}{3}E\int_0^t [F(T_0, t)\,T_0]'\,dt\Big]\varepsilon^\times(t)$$

$$\tau_{xz}^\times(t) = G\exp\Big[-2G\int_0^t F(T_0, t)\,dt\Big]\gamma_{xz}^\times(t)$$

$$\tau_{yz}^\times(t) = G\exp\Big[-2G\int_0^t F(T_0, t)\,dt\Big]\gamma_{yz}^\times(t)$$

§ 2. Устойчивость равновесия продольно-сжатого шарнирно-опертого стержня. В этом случае

$$L_x^\circ = V_y^\circ = p_0 = 0, \qquad L_y^\times = V_x^\times = 0$$

(полагаем, что выпучивание происходит в плоскости yz). Уравнения (1.1) принимают вид

$$\frac{dL_x^\times}{ds} - V_y^\times = 0, \qquad \frac{dV_y^\times}{ds} - p^\times V_z^\circ = 0, \qquad L_x^\times = p^\times\int_\Omega E^\times\eta y\,d\Omega = A^\times p^\times$$
$$\sigma^\times = E^\times\varepsilon^\times, \qquad \varepsilon^\times = p^\times\eta, \qquad \eta = y - y^\times \tag{2.1}$$

Здесь $y^\times$ — то значение y, при котором $\varepsilon^\times = 0$; величина

$$y^\times = 0 \text{ при } \varepsilon^\times(\xi) = \text{const}, \quad \xi \in [0, \lambda]$$

Исключаем $dV_y^\times / ds$ из (2.1)

$$\frac{d^2 L_x^\times}{ds^2} + \frac{P}{A^\times} L_x^\times = 0, \qquad P = -V_z^\circ$$

Наименьшее значение P, при котором уравнение имеет нулевое решение

$$P = \min \left(\int_0^l \left(\frac{dL_x^\times}{ds} \right)^2 ds \Bigg/ \int_0^l \frac{(L_x^\times)^2}{A^\times} ds \right) \tag{2.2}$$

1°. Теория пластического течения с упрочнением. В этом случае $\lambda = \sigma_0$. В работе [8] показано, что

$$E^\times (T_0, \varepsilon^\times (\xi)) \geqslant E' \qquad \text{при } \varepsilon^\times (\xi) \in R' [0, T_0], \quad \xi \in [0, T_0]$$

Здесь E' — касательный модуль. Поэтому (см. (2.2)) σ_{0k} определяется условием

$$\frac{\sigma_{0k}}{\sigma_э} = \frac{E'}{E}$$

т. е. критическая нагрузка равна касательно-модульной; здесь $\sigma_э$ — критическое напряжение при упругих деформациях.

2°. Теория ползучести типа теории течения. В этом случае $\lambda = t$. В работе [8] показано, что

$$E^\times (t, \varepsilon^\times (\tau)) \geqslant E \exp \left[-\frac{2}{3} E \int_0^t [F(T_0, t) T_0]' dt \right] \qquad \text{при} \quad \varepsilon^\times (\tau) \in R' [0, t]$$

(штрих означает дифференцирование по T_0). Следовательно (см. (2.2)), t_k определяется условием

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_э} = \exp \left[-\frac{2}{3} E \int_0^{t_k} [F(T_0, t) T_0]' dt \right] \tag{2.3}$$

Если в качестве $F(T, t)$ взять степенную функцию [9]

$$F(T, t) = B(t) T^{m-1}$$

условие (2.3) примет вид

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_э} = \exp(-m\eta), \qquad \eta = \frac{\varepsilon_0 - \sigma_0 / E}{\sigma_0 / E} \tag{2.4}$$

Условие устойчивости равновесия в смысле критерия Ю. Н. Работнова, С. А. Шестерикова, получающееся методом, изложенным в работе [10], в этом случае есть $\sigma_0 / \sigma_э = 0$.

В работе В. И. Розенблюма [3] принимается, что в недеформированном состоянии амплитуда прогиба стержня w_a не равна нулю. За критическое время для продольно-сжатого шарнирно-опертого стержня, материал которого следует теории ползучести типа теории течения, рекомендуется считать момент достижения амплитудой прогиба величины, равной половине высоты сечения стержня. В работе [3] критическое время находится приближенно вариационным методом. Границы устойчивости равновесия, определяемые по работе [3] при $w_a / 2h = 0.05$ ($2h$ — высота сечения стержня) и по условию (2.4), приведены на фиг. 1 для случая $m = 3$. Кривая *1* соответствует условию (2.4), кривая *3* — условию, определяющему критическое в смысле работы [3] время.

3°. Теория старения [9]. В стержне, материал которого следует закону

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + f(\sigma, t)$$

дополнительная деформация $\varepsilon^{\times}(t)$ и дополнительное напряжение $\sigma^{\times}(t)$ при любой $\varepsilon^{\times}(\tau)$, $\tau \in [0, t]$ связаны равенством

$$\varepsilon^{\times}(t) = \left[\frac{1}{E} + f'(\sigma_0, t)\right] \sigma^{\times}(t)$$

(штрих означает дифференцирование по σ_0).

Следовательно, t_k в этом случае определяется условием

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_э} = \frac{1}{1 + Ef'(\sigma_0, t_k)} \tag{2.5}$$

Если в качестве $f(\sigma, t)$ взять [9] степенную функцию

$$f(\sigma, t) = \Omega(t)\sigma^m$$

то условие (2.5) примет вид

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_э} = \frac{1}{1 + m\eta}, \qquad \eta = \frac{\varepsilon_0 - \sigma_0 / E}{\sigma_0 / E} \tag{2.6}$$

Кривая *2* на фиг. 1 соответствует условию (2.6) в случае $m = 3$.

Очевидно, в рассматриваемом случае критическое время t_k совпадает со временем достижения равенства

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_э} = \frac{E^*}{E}$$

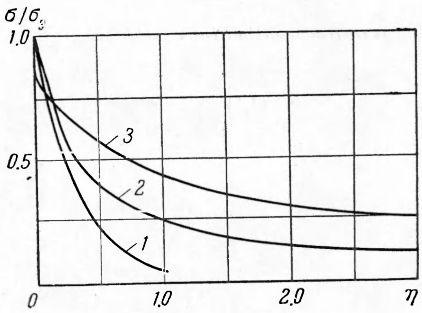
(E^* — касательный модуль к изохронным кривым «напряжение — деформация»), т. е. со временем, критическим в смысле Шенли [11].

4°. Теория упрочнения [10]. Дополнительное напряжение и дополнительная деформация в стержне, материал которого следует закону

$$\Phi(\rho, \dot{\rho}, \sigma) = 0, \qquad \rho = \varepsilon - \frac{\sigma^{\times}}{E}$$

связаны уравнениями (2.7)

$$\alpha\sigma^{\times} + \mu\rho^{\times} + \nu\dot{\rho}^{\times} = 0, \qquad \rho^{\times} = \varepsilon^{\times} - \frac{\sigma^{\times}}{E}$$



Фиг. 1

Здесь α, μ, ν — функции величины пластической деформации, накопленной при деформировании в основном состоянии, т. е. функции времени, причем в каждый момент времени выполнено

$$\operatorname{sign}\mu = \operatorname{sign}\nu = -\operatorname{sign}\alpha, \qquad \frac{\mu}{\mu - E\alpha} \leqslant 1, \qquad \nu \neq 0 \tag{2.8}$$

Если дополнительная деформация $\varepsilon^{\times}(\tau)$, $\tau \in [0, t]$ известна, то, проинтегрировав уравнения (2.7), связь между дополнительным напряжением и дополнительной деформацией можно при $\varepsilon^{\times}(t) \neq 0$ записать в виде

$$\sigma^{\times}(t) = E^{\times}(t, \varepsilon^{\times}(\tau))\,\varepsilon^{\times}(t), \qquad \tau \in [0, t]$$

Лемма. Пусть в промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ выполнены условия

$$\varepsilon^{\times}(t_i) \neq 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon^{\times}(t_i) = \sigma^{\times}(t_i) = 0$$

деформация $\varepsilon^{\times}(\tau)$ связана с напряжением $\sigma^{\times}(\tau)$ уравнениями (2.7) при $\tau \in [t_i, t_i')$, $\tau \in (t_i', t_{i+1})$ и

$$\sigma^{\times}(t_i')_+ = \sigma^{\times}(t_i')_- + E\,[\varepsilon^{\times}(t_i')_+ - \varepsilon^{\times}(t_i')_-] \tag{2.9}$$

Кроме того, производная $\varepsilon^{\times}$ не меняет знака в промежутках

$$[t_i,\ t_i'),(t_i',\ t_{i+1}],\ t_i \leqslant t_i' \leqslant t_{i+1}.$$

Тогда

$$\begin{gathered}\left[\sigma^{\times}(t_i)+E\varepsilon^{(1)}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{\mu}{\nu}\left(\exp\int\limits_{t_i}^{\tau}\beta d\tau\right)d\tau+E\delta_i^{(1)}-\right.\\ \left.-E\delta_{i+1}^{1}\exp\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\beta d\tau\right]\exp\left(-\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\beta d\tau\right)\leqslant\sigma^{\times}(t_{i+1})\leqslant\\ \leqslant\left[\sigma^{\times}(t_i)+E\varepsilon^{(2)}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{\mu}{\nu}\left(\exp\int\limits_{t_i}^{\tau}\beta d\tau\right)d\tau-E\delta_i^{(2)}+\right.\\ \left.+E\delta_{i+1}^{(2)}\exp\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\beta d\tau\right]\exp\left(-\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\beta d\tau\right)\end{gathered}\tag{2.10}$$

Здесь

$$\beta=\frac{\mu-E\alpha}{\nu},\quad \varepsilon^{(1)}\geqslant\varepsilon^{\times}(\tau),\quad \varepsilon^{2}\leqslant\varepsilon^{\times}(\tau),\quad \tau\in[t_i,\ t_{i+1}]$$

$$\varepsilon^{\times}(t_i)=\varepsilon^{(1)}-\delta_i^{(1)},\qquad \varepsilon^{\times}(t_{i+1})=\varepsilon^{(1)}-\delta_{i+1}^{(1)}\tag{2.11}$$

$$\varepsilon^{\times}(t_i)=\varepsilon^{(2)}+\delta_i^{(2)},\qquad \varepsilon^{\times}(t_{i+1})=\varepsilon^{(2)}+\delta_{i+1}^{(2)}\tag{2.12}$$

Доказательство. Очевидно

$$\begin{gathered}\sigma^{\times}(t_i')_-=\left[\sigma^{\times}(t_i)+E\int\limits_{t_i}^{t_i'}\varphi(\tau,\ t_i)\dot{\varepsilon}^{\times}d\tau+\right.\\ \left.+E\varepsilon^{\times}(t_i')_-\int\limits_{t_i}^{t_i'}\frac{\mu}{\nu}\left(\exp\int\limits_{t_i}^{\tau}\beta d\tau\right)d\tau\right]\exp\left(-\int\limits_{t_i}^{t_i'}\beta d\tau\right)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\sigma^{\times}(t_{i+1})=\left[\sigma^{\times}(t_i')_++E\int\limits_{t_i'}^{t_{i+1}}\varphi(\tau,\ t_i')\dot{\varepsilon}^{\times}d\tau+\right.\\ \left.+E\varepsilon^{\times}(t_{i+1})\int\limits_{t_i'}^{t_{i+1}}\frac{\mu}{\nu}\left(\exp\int\limits_{t_i'}^{\tau}\beta d\tau\right)d\tau\right]\exp\left(-\int\limits_{t_i'}^{t_{i+1}}\beta d\tau\right)\end{gathered}$$

где

$$\varphi(\tau,\ a)=\exp\int\limits_{a}^{\tau}\beta d\tau-\int\limits_{a}^{\tau}\frac{\mu}{\nu}\left(\exp\int\limits_{a}^{\xi}\beta d\xi\right)d\xi$$

Заметим, что

$$\varphi(\tau,\ a)\geqslant 1\quad \text{при } \tau\geqslant a\tag{2.13}$$

Действительно

$$\varphi(a,\ a)=1,\qquad \frac{d\varphi}{d\tau}=-\frac{E\alpha}{\nu}\exp\int\limits_{a}^{\tau}\beta d\tau\geqslant 0$$

по условию (2.8). Пусть, например

$$\dot{\varepsilon}^{\times}\geqslant 0\quad \text{при } \tau\in[t_i,\ t_i'),\qquad \dot{\varepsilon}^{\times}(\tau)\leqslant 0\quad \text{при } \tau\in(t_i',\ t_{i+1}]$$

(доказательства леммы в других случаях аналогичны доказательству леммы в этом случае).

Тогда

$$\varepsilon^\times (t_i')_- - \varepsilon^\times (t_i) \leqslant \int\limits_{t_i}^{t_i'} \varphi(\tau, t_i)\, \dot{\varepsilon}^\times d\tau \leqslant \varphi(t_i', t_i)\,[\varepsilon^\times (t_i')_- - \varepsilon^\times (t_i)]$$

$$\varphi(t_{i+1}, t_i')\,[\varepsilon^\times (t_{i+1}) - \varepsilon^\times (t_i')_+] \leqslant \int\limits_{t_i'}^{t_{i+1}} \varphi(\tau, t_i')\, \dot{\varepsilon}^\times d\tau \leqslant \varepsilon^\times (t_{i+1}) - \varepsilon^\times (t_i')_+ \qquad (2.14)$$

Пусть

$$\varepsilon^\times (t_i')_+ = \varepsilon^{(1)} - \delta_{i+}'^{(1)}, \qquad \varepsilon^\times (t_i')_- = \varepsilon^{(1)} - \delta_{i-}'^{(1)},$$
$$\varepsilon^\times (t_i')_+ = \varepsilon^{(2)} + \delta_{i+}'^{(2)} \qquad \varepsilon^\times (t_i')_- = \varepsilon^{(2)} + \delta_{-i}'^{(2)} \qquad (2.15)$$

Подставляем (2.14) в (2.12), заменяем $\varepsilon^\times(t_i)$, $\varepsilon^\times(t_i')$, $\varepsilon^\times(t_i')_+$, $\varepsilon^\times(t_{i+1})$ их выражениями согласно (2.11), (2.15) через $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ и соответствующие δ. Используя неравенство (2.13) и условие, что все δ неотрицательны, получим

$$\sigma^\times (t_i')_- \geqslant \Big[\sigma^\times(t_i) + E\varepsilon^{(1)} \int\limits_{t_i}^{t_i'} \frac{\mu}{\nu}\Big(\exp\int\limits_{t_i}^{\tau} \beta d\tau\Big) d\tau +$$
$$+ E\delta_i^{(1)} - E\delta_i'^{(1)} \exp\int\limits_{t_i}^{t_i'} \beta d\tau\Big] \exp\Big(-\int\limits_{t_i}^{t_i'} \beta d\tau\Big)$$

$$\sigma^\times (t_{i+1}) \geqslant \Big[\sigma^\times (t_i')_+ + E\varepsilon^{(1)} \int\limits_{t_i'}^{t_{i+1}} \frac{\mu}{\nu}\Big(\exp\int\limits_{t_i'}^{\tau} \beta d\tau\Big) d\tau + E\delta_{i'+}'^{(1)} -$$
$$- E\delta_{i+1}^{(1)} \exp\int\limits_{t_i'}^{t_{i+1}} \beta d\tau\Big] \exp\Big(-\int\limits_{t_i'}^{t_{i+1}} \beta d\tau\Big)$$

$$\sigma^\times (t_i')_- \leqslant \Big[\sigma^\times (t_i) + E\varepsilon^{(2)} \int\limits_{t_i}^{t_i'} \frac{\mu}{\nu}\Big(\exp\int\limits_{t_i}^{\tau} \beta d\tau\Big) d\tau - E\delta_i^{(2)} +$$
$$+ E\delta_{i-}'^{(2)} \exp\int\limits_{t_i}^{t_i'} \beta d\tau\Big] \exp\Big(-\int\limits_{t_i}^{t_i'} \beta d\tau\Big)$$

$$\sigma^\times (t_{i+1}) \leqslant \Big[\sigma^\times (t_i')_+ + E\varepsilon^{(2)} \int\limits_{t_i'}^{t_{i+1}} \frac{\mu}{\nu}\Big(\exp\int\limits_{t_i'}^{\tau} \beta d\tau\Big) d\tau + E\delta_{i+1}^{(2)} \exp\int\limits_{t_i'}^{t_{i+1}} \beta d\tau -$$
$$- E\delta_{i+}'^{(2)}\Big] \exp\Big(-\int\limits_{t_{i'}}^{t_{i+1}} \beta d\tau\Big)$$

Из этих неравенств и условия (2.9) следуют неравенства (2.10).
Очевидно, при $\varepsilon^\times(\tau) = \mathrm{const}$, $\tau \in [0, t)]$

$$E^\times(t) = E\Big[1 + \int\limits_0^t \frac{\mu}{\nu}\Big(\exp\int\limits_0^\tau \beta d\tau\Big) d\tau\Big] \exp\Big(-\int\limits_0^t \beta d\tau\Big) = E^{\times\times}(t) \qquad (2.16)$$

Теорема. При любой $\varepsilon^\times(\tau) \in R'[0, t]$ имеет место неравенство

$$E^\times(t, \varepsilon^\times(\tau)) \geqslant E^{\times\times}(t), \qquad \tau\varepsilon \in [0, t] \qquad (2.17)$$

Доказательство. Так как $\varepsilon^\times(\tau) \in R[0, t]$, то промежуток $[0, t]$ можно разбить точками

$$0 = t_1 < t_2 <, \ldots, < t_{n+1} = t$$

на некоторое число n промежутков, в каждом из которых выполнены условия леммы и, следовательно, неравенства (2.10). Заметим, что $\sigma^\times(t_1) = E\varepsilon^\times(t_1)$.

Если

$$\varepsilon^\times(\tau) \leqslant \varepsilon^\times(t) > 0, \qquad \tau \in [0,\ t]$$

то в неравенствах (2.10) в качестве $\varepsilon^{(1)}$ можно взять $\varepsilon^\times(t)$, тогда $\delta^{(1)}_{n+1} = 0$ и

$$\sigma^\times(t) \geqslant \Big[\sigma^\times(t_n) + E\varepsilon^\times(t) \int\limits_{t_n}^{t} \frac{\mu}{\nu}\Big(\exp \int\limits_{t_n}^{\tau} \beta d\tau\Big) d\tau + E\delta_n^{(1)}\Big] \exp\Big(-\int\limits_{t_n}^{t} \beta d\tau\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \Big[\sigma^\times(t_{n-1}) + E\varepsilon^\times(t) \int\limits_{t_{n-1}}^{t} \frac{\mu}{\nu}\Big(\exp \int\limits_{t_{n-1}}^{\tau} \beta d\tau\Big) d\tau + E\delta^{(1)}_{n-1}\Big] \exp\Big(-\int\limits_{t_{n-1}}^{t} \beta d\tau\Big) \geqslant$$

. . . .

$$\geqslant \Big[\sigma^\times(t_1) + E\varepsilon^\times(t) \int\limits_0^t \frac{\mu}{\nu}\Big(\exp\int\limits_0^\tau \beta d\tau\Big) d\tau + E\delta_1^{(1)}\Big] \exp\Big(-\int\limits_0^t \beta d\tau\Big) =$$

$$= E\varepsilon^\times(t)\Big[1 + \int\limits_0^t \frac{\mu}{\nu}\Big(\exp\int\limits_0^\tau \beta d\tau\Big) d\tau\Big] \exp\Big(-\int\limits_0^t \beta d\tau\Big)$$

Отсюда следует, что в этом случае

$$E^\times(t,\ \varepsilon^\times(\tau)) \geqslant E^{\times\times}(t)$$

Если

$$\varepsilon^\times(\tau) \geqslant \varepsilon^\times(t) < 0, \qquad \tau \in [0,\ t]$$

то в неравенствах (2.10) в качестве $\varepsilon^{(2)}$ можно взять $\varepsilon^\times(t)$, тогда $\delta^{(2)}_{n+1} = 0$ и

$$\sigma^\times(t) \leqslant \Big[\sigma^\times(t_n) + E\varepsilon^\times(t) \int\limits_{t_n}^{t} \frac{\mu}{\nu}\Big(\exp \int\limits_{t_n}^{t} \beta d\tau\Big) d\tau - E\delta_n^{(2)}\Big] \exp\Big(-\int\limits_{t_n}^{t} \beta d\tau\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\sigma^\times(t_{n-1}) + E\varepsilon^\times(t) \int\limits_{t_{n-1}}^{t} \frac{\mu}{\nu}\Big(\exp \int\limits_{t_{n-1}}^{t} \beta d\tau\Big) d\tau - E\delta^{(2)}_{n-1}\Big] \exp\Big(-\int\limits_{t_{n-1}}^{t} \beta d\tau\Big) \leqslant$$

. . . .

$$\leqslant \Big[\sigma^\times(t_1) + E\varepsilon^\times(t) \int\limits_0^t \frac{\mu}{\nu}\Big(\exp\int\limits_0^\tau \beta d\tau\Big) d\tau - E\delta_1^{(2)}\Big] \exp\Big(-\int\limits_0^t \beta d\tau\Big) =$$

$$= E\varepsilon^\times(t)\Big[1 + \int\limits_0^t \frac{\mu}{\nu}\Big(\exp\int\limits_0^\tau \beta d\tau\Big) d\tau\Big] \exp\Big(-\int\limits_0^t \beta d\tau\Big)$$

Отсюда следует, что и в этом случае

$$E^\times(t,\ \varepsilon^\times(\tau)) \geqslant E^{\times\times}(t)$$

Из (2.2), (2.16), (2.17) следует, что t_k определяется условием

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_э} = \Big[1 + \int\limits_0^{t_k} \frac{\mu}{\nu}\Big(\exp\int\limits_0^\tau \beta d\tau\Big) d\tau\Big] \exp\Big(-\int\limits_0^{t_k} \beta d\tau\Big) \tag{2.18}$$

При $P = \text{const}$ условие устойчивости равновесия в смысле критерия Ю. Н. Работнова, С. А. Шестерикова, полученное в работе [10], в этом случае имеет вид

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_э} = \frac{\mu}{\mu - E\alpha} \tag{2.19}$$

Для случая, когда

$$\Phi(\rho, \dot{\rho}, \sigma) = \dot{\rho} - \rho^{-\gamma}\psi(\sigma) \equiv 0$$

на фиг. 2 показаны границы устойчивости, определяемые условиями (2.18), (2.19) и критерием С. А. Шестерикова [4]. На фиг. 2

$$\rho_1 = E\frac{d\ln\psi}{d\sigma}\rho$$

кривые a_1, b_1, c_1 соответствуют условиям (2.18), (2.19) и критерию [4] при $\gamma = 1$, кривые a_3, b_3, c_3 — при $\gamma = 3$.

При линейном законе ползучести [5]

$$\alpha\sigma + \mu\rho + \nu\dot{\rho} = 0, \qquad \rho = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$$

где α, μ, ν — постоянные, причем

$$\operatorname{sign}\mu = \operatorname{sign}\nu = -\operatorname{sign}\alpha, \qquad \frac{\mu}{\mu - E\alpha} < 1$$

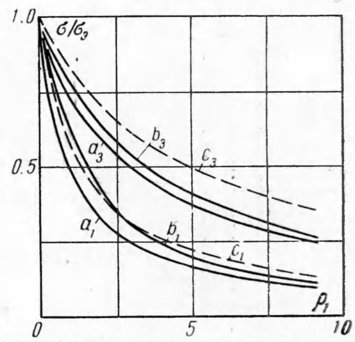
условие (2.18) принимает вид

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_э} = \frac{\mu}{\mu - E\alpha} + \frac{E\alpha}{E\alpha - \mu}\exp\left(-\frac{\mu - E\alpha}{\nu}t_k\right)$$

Из (2.19) видим, что в этом случае при

$$\frac{\mu}{\mu - E\alpha} < \frac{\sigma_0}{\sigma_э} < 1 \tag{2.20}$$

согласно методам, изложенным в работах [5], [10], а также по критерию С. А. Шестерикова [4] состояние равновесия неустойчиво при любых $t > 0$.



Фиг. 2

5°. *Теория наследственности* [12]. Рассмотрим частный вид уравнения теории наследственности

$$\sigma(t) = \varphi(\varepsilon) - \int_0^t \Phi(t, \tau)\varphi(\varepsilon)\,d\tau \tag{2.21}$$

где $\sigma = \varphi(\varepsilon)$ — нелинейно упругий закон

$$\Phi(t, \tau) \geqslant 0, \quad \varphi'(\varepsilon) \geqslant 0 \tag{2.22}$$

(штрих означает в данном случае производную по ε).

Уравнение связи между дополнительным напряжением и дополнительной деформацией при законе (2.21) имеет один и тот же вид

$$\sigma^\times(t) = E^\times(t, \varepsilon^\times(\tau))\,\varepsilon^\times(t), \qquad \tau \in [0, t]$$

$$E^\times(t, \varepsilon^\times(\tau)) = \varphi'(\varepsilon_0) - \int_0^t \Phi(t, \tau)\varphi'(\varepsilon_0)\frac{\varepsilon^\times(\tau)}{\varepsilon^\times(t)}\,d\tau \tag{2.23}$$

независимо от того, были или нет при $\tau \in [0, t]$ разрывы дополнительной деформации $\varepsilon^\times(\tau)$ или ее производной. Из (2.22), (2.23) следует, что

$$E^\times(t, \varepsilon^\times(\tau)) \geqslant \varphi'(\varepsilon_0) - \int_0^t \Phi(t, \tau)\varphi'(\varepsilon_0)\,d\tau = E^{\times\times}(t)$$

при
$$\varepsilon^\times(\tau) \leqslant \varepsilon^\times(t) > 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon^\times(\tau) \geqslant \varepsilon^\times(t) < 0, \qquad \tau \in [0,\ t]$$

Здесь $E^{\times\times}(t)$ соответствует $\varepsilon^\times(\tau) = \mathrm{const}$, $\tau \in [0,\ t]$.

Следовательно, t_k определяется условием

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_э} = \frac{1}{E}\left[\varphi'(\varepsilon_0) - \int\limits_0^{t_k} \Phi(t,\ \tau)\,\varphi'(\varepsilon_0)\,d\tau\right] \tag{2.24}$$

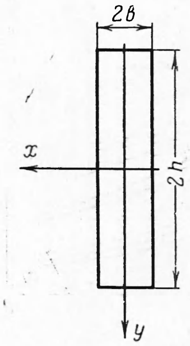
Заметим, что по условию (2.24) конечное критическое время существует и при $\varphi(\varepsilon) = E\varepsilon$, чего не получается при рассмотрении только мгновенных возмущений [6].

Устойчивость равновесия продольно-сжатого стержня, деформирующего по закону (2.21), рассматривалась в работе [7], но построенное в ней решение ошибочно в случае, когда $\varphi(\varepsilon)$ нелинейная функция. Беря в качестве $\varphi(\varepsilon)$ степенную функцию $\varphi(\varepsilon) = A\varepsilon^\alpha$, в работе [7] связь между дополнительной деформацией и дополнительным напряжением принимается в виде

$$A(\varepsilon^\times)^\alpha = \sigma^\times + \int\limits_0^t K(t,\ \tau)\,\sigma^\times d\tau$$

не выполняющемся при $\alpha \neq 1$ в случае продольного изгиба. Вследствие этого при $\alpha \neq 1$ в работе [7] получается, что потеря устойчивости в начальный момент времени $t = 0$ не определяется касательным модулем к кривой $\sigma = \varphi(\varepsilon)$, что невозможно, так как при $t = 0$ $\sigma = \varphi(\varepsilon)$ — нелинейно упругий закон.

§ 3. Устойчивость равновесия плоской формы изгиба (изгиб моментом). Так как в этом случае $V_y{}^\circ = V_z{}^\circ = 0$, $L_x{}^\times = 0$, то уравнения (1.1) принимают вид



Фиг. 3

$$\frac{dL_y{}^\times}{ds} + r^\times L_x{}^\circ - p_0 L_z{}^\times + V_x{}^\times = 0$$
$$\frac{dL_z{}^\times}{ds} + p_0 L_y{}^\times - q^\times L_x{}^\circ = 0, \qquad \frac{dV_x{}^\times}{ds} = 0$$
$$V_y{}^\times = 0, \qquad V_z{}^\times = 0 \tag{3.1}$$
$$L_x{}^\circ = M = Ap_0, \qquad L_y{}^\times = B^\times q^\times, \qquad L_z{}^\times = C^\times r^\times$$

Полагаем

$$V_x{}^\times = 0, \quad L_y{}^\times = 0, \quad L_z{}^\times = 0 \quad \text{при } s = 0,\ s = l \tag{3.2}$$

Исключая $dL_z{}^\times/ds$, из первых двух уравнений (3.1) получим

$$\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{1}{C^\times} - \frac{1}{A}\right)^{-1}\frac{dL_y{}^\times}{ds}\right] + M^2\left(\frac{1}{B^\times} - \frac{1}{A}\right)L_y{}^\times = 0 \tag{3.3}$$

При условиях (3.2) наименьшее значение M, при котором уравнение (3.3) имеет ненулевое решение, будет [13]

$$M^2 = \min\left(\int\limits_0^l \left(\frac{1}{C^\times} - \frac{1}{A}\right)^{-1}\left(\frac{dL_y{}^\times}{ds}\right)^2 ds \Big/ \int\limits_0^l \left(\frac{1}{B^\times} - \frac{1}{A}\right)(L_y{}^\times)^2\, ds\right) \tag{3.4}$$

Для полосы узкого прямоугольного сечения (фиг. 3) можно принять [14]

$$\gamma_{yz}{}^\times = 2r^\times x, \qquad \varepsilon^\times = -q^\times x$$

$$L_y{}^\times = B^\times q^\times = -\int\limits_\Omega \sigma^\times x\,d\Omega, \qquad L_z{}^\times = C^\times r^\times = 2\int\limits_\Omega \tau_{yz}{}^\times x\,d\Omega \tag{3.5}$$

1°. Теория пластического течения с линейным упрочнением. В этом случае $\lambda = M$. Обозначим через $A°$, $B°$, $C°$ жесткости полосы при упругих деформациях. При деформировании в основном состоянии

$$\sigma_0 = \begin{cases} E\varepsilon_0 & (|y| \leqslant \chi) \\ E\,[g\varepsilon_0 + p_0\chi(1-g)] & (|y| \geqslant \chi) \end{cases} \tag{3.6}$$

Здесь χ — расстояние от средней линии полосы до границ раздела упругой и пластической областей, $g = E' / E$; при этом касательный модуль $E' = \mathrm{const}$, так как упрочнение линейное. Следовательно,

$$A = A°\left[g + \frac{1}{2}(1-g)(3\zeta - \zeta^3)\right], \qquad \zeta = \frac{\chi}{h}$$

При отклонениях от основного состояния

$$\sigma^\times = \begin{cases} E\varepsilon^\times & (|y| \leqslant \chi) \\ E^\times\varepsilon^\times & (|y| \geqslant \chi) \end{cases} \qquad \tau_{yz}^\times = \begin{cases} G\gamma_{yz}^\times & (|y| \leqslant \chi) \\ G^\times\gamma_{yz}^\times & (|y| \geqslant \chi) \end{cases} \tag{3.7}$$

В работе [8] показано, что при

$$\varepsilon^\times(\xi) \in R'\,[0,\ T_0]$$

$$\gamma_{yz}^\times(\xi) \in R'\,[0,\ T_0], \qquad \xi \in [0,\ T_0]$$

имеют место неравенства

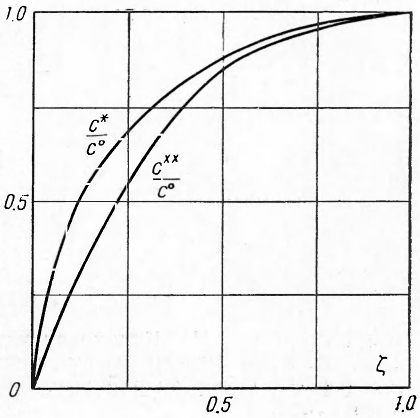
$$E^\times(T_0,\ \varepsilon^\times(\xi)) \geqslant E' \tag{3.8}$$

$$G^\times(T_0,\ \gamma_{yz}^\times) \geqslant G\exp\left(-2G\int_{\tau_s}^{T_0} F\,dT_0\right)$$

При линейном упрочнении

$$\exp\left(-2G\int_{\tau_s}^{T_0} F(T_0)\,dT_0\right) = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_s}\right)^{n-1}$$

$$n = 1 - \frac{3(1-g)}{2g(1+\nu)} \tag{3.9}$$



Фиг. 4

Здесь ν — коэффициент Пуассона, σ_s — предел текучести при простом растяжении.

При деформировании в основном состоянии интенсивность напряжений T_0 в любой точке полосы будет однозначной возрастающей функцией M. Поэтому из (3.5) — (3.9) следует, что при любых

$$\varepsilon^\times(\xi) \in R'\,[0,\ M], \qquad \gamma_{yz}^\times(\xi) \in R'\,[0,\ M], \qquad \xi \in [0,\ M]$$

имеют место неравенства

$$B^\times \geqslant B°\,[\zeta + g(1-\zeta)] = B^{\times\times}$$
$$C^\times \geqslant C°\zeta\left[1 - \frac{1}{ng} + \frac{1}{ng}\left(1 - g + \frac{g}{\zeta}\right)^n\right] = C^{\times\times} \tag{3.10}$$

Из (3.2), (3.4), (3.10) следует, что M_k определяется условием

$$M_k^2 = \left(\frac{1}{C^{\times\times}} - \frac{1}{A}\right)^{-1}\left(\frac{1}{B^{\times\times}} - \frac{1}{A}\right)^{-1} \min\left(\int_0^l \left(\frac{dL_y^\times}{ds}\right)^2 ds \Big/ \int_0^l (L_y^\times)^2\,ds\right) =$$
$$= \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{C^{\times\times}} - \frac{1}{A}\right)^{-1}\left(\frac{1}{B^{\times\times}} - \frac{1}{A}\right)^{-1} \tag{3.11}$$

Критическое значение момента при решении этой же задачи в постановке Шенли по теории пластического течения, теории малых упруго-пластических деформаций определяется формулой (3.11), если в ней вместо $C^{\times\times}$ поставить C°, C^*

$$C^* = C^\circ\,[g + \zeta\,(1-g)\,(1-\lg\zeta)]$$

Сравнение $C^{\times\times}$, C^*, C° для случая $g = 0.2$, $\nu = 1/3$ приведено на фиг. 4.

2°. *Теория ползучести типа теории течения*. Полагаем, что известно решение задачи о чистом изгибе полосы, материал которой следует теории ползучести типа теории течения. Приближенное решение этой задачи имеется в книге Л. М. Качанова [9]. Тогда известны $\sigma_0 = \sigma_0(y, t)$, $A = A(t)$. Критическое время t_k определяется условием

$$M = \frac{\pi}{l}\left(\frac{1}{C^{\times\times}} - \frac{1}{A}\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{B^{\times\times}} - \frac{1}{A}\right)^{-1/2}$$

Здесь

$$B^{\times\times} = B^\circ \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\exp\left[-\tfrac{2}{3}E\int_0^{t_k}[F(T_0, t)\,T_0]'\,dt\right]dy$$

$$C^{\times\times} = C^\circ\,\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\exp\left[-2G\int_0^{t_k}F(T_c, t)\,dt\right]dy$$

Поступила
20 IX 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. К вопросу устойчивости упруго-пластического равновесия. Вест. ЛГУ, № 19, сер. матем., механ., астрономии, 1956, вып. 4.
2. Хофф Н. Обзор теорий выпучивания при ползучести. Сб. перев., Механика, 1960, № 1.
3. Розенблюм В. И. Устойчивость сжатого стержня в состоянии ползучести. Инж. сб., 1954, т. 18.
4. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
5. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехиздат, 1949.
6. Хуан Кэ-чжи. Об устойчивости сжатого стержня при условии ползучести. Scientia Sinica, 1959, т. VIII, № 8.
7. Розовский М. И. Полусимволический способ решения некоторых задач теории ползучести. Изв. АН АрмССР, отд. физ.-мат., естеств. и техн. наук, 1956, т. 9, № 5.
8. Иванов Г. В. Об устойчивости равновесия при неупругих деформациях. ПМТФ, 1961, № 1.
9. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
10. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок при ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
11. Shanley F. R. Weight — Strength Analysis of Aircraft Structures, Mc Craw — Hill Book Co., 1952, N. Y.
12. Работнов Ю. Н. Расчет деталей машин на ползучесть. Изв. АН СССР, ОТН, 1948, № 6.
13. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. Гостехиздат, 1957.
14. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.