

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГАЗА В УДАРНЫХ ТРУБАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

С. С. Григорян, Т. В. Марченко, Ю. Л. Якимов

(Москва)

В технике экспериментирования в ударных трубах может представить интерес следующая задача. В сосуде *A* (фиг. 1) находится газ, к которому тем или иным способом (горение, электрический разряд) подводится тепловая энергия так, что давление и плотность газа в сосуде меняются со временем. В некоторый момент времени, принимаемый в дальнейшем за начальный, открывается отверстие *O* (например прорывом диафрагмы) и начинается истечение газа из сосуда *A* в трубу *B*, в которой находится покоящийся газ, в результате чего в трубе *B* возникает нестационарное движение обоих газов.



Фиг. 1

Для решения задачи об этом движении приемем схематизацию явления, состоящую в следующем. Движение в трубе *B* одномерно (параметры течения зависят только от времени и расстояния от отверстия *O*). Получаемое в такой постановке решение будет описывать движение газа на расстояниях от отверстия, значительных по сравнению с диаметром отверстия. Движение в трубе *B* в такой постановке полностью определяется начальными параметрами газа внутри трубы ρ_0, ρ_0, γ_1 , массовым расходом через отверстие $Q = Q(t)$ и потоком энергии через отверстие $N = N(t)$, а также показателем адиабаты вытекающего из отверстия газа γ_2 . Здесь функции $Q(t)$ и $N(t)$ можно считать заданными и определяемыми процессами, происходящими в сосуде *A*.

Сформулированную задачу можно решить сравнительно просто, если аппроксимировать $Q(t)$ и $N(t)$ степенными функциями

$$Q(t) = cqt^\alpha, \quad N(t) = Cnt^\beta, \quad c = \text{const} \quad (1)$$

а закон изменения площади поперечного сечения трубы на расстояниях X , значительных по сравнению с диаметром входного отверстия, в виде

$$F(x) = cx^{\nu-1} \quad (2)$$

при условии, что

$$(1 + \alpha)(2 + \nu) - \nu(\beta + 3) = 0 \quad (3)$$

Последнее соотношение обеспечивает автомодельность задачи при условии, если начальным давлением газа в трубе ρ_0 можно пренебречь.

Задача сводится к построению решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + (\nu - 1) \frac{\rho u}{x^{\nu-2}} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho^{\gamma_i}} + u \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho^{\gamma_i}} &= 0 \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь u , p , ρ — соответственно скорость, давление и плотность, а γ_1 , γ_2 — показатели адиабаты для находившегося в трубе газа и вытекающего из отверстия газа.

Вследствие автомодельности сформулированной задачи функции u , p , ρ представляются в виде

$$u = \frac{x}{t} V(\lambda), \quad p = \rho_0 \frac{x^2}{t^2} P(\lambda), \quad \rho = \rho_0 R(\lambda)$$

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{g}{n}} x t^{-\frac{\beta+3}{2+\nu}}, \quad \lambda_0 = \text{const} \quad (5)$$

где функции V , P , R являются решением известной [1] системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{Z}{(V-\delta)W(V,Z)} \{ [2(V-1) + \nu(\gamma_i-1)V](V-\delta)^2 -$$

$$- (\gamma_i-1)V(V-1)(V-\delta) - [2(V-1) + \kappa_i(\gamma_i-1)]Z \} \quad (6)$$

$$\frac{d \ln \lambda}{dV} = \frac{Z - (V-\delta)^2}{W(V,Z)}, \quad (V-\delta) \frac{d \ln R}{d \ln \lambda} = -\nu V - \frac{W(V,Z)}{Z - (V-\delta)^2}$$

$$W(V,Z) = [V(V-1)(V-\delta) + (\kappa_i - \nu V)z], \quad \delta = \frac{\beta+3}{2+\nu}$$

$$\kappa_i = 2 \frac{1-\delta}{\gamma_i}, \quad z = \gamma_i \frac{P}{R}$$

Из автомодельности задачи следует, что контактный разрыв — поверхность раздела между вытекающим газом и газом, находившимся в начальный момент в трубе, — будет двигаться по закону $\lambda = \text{const}$. Это означает, что определение движения газа, находившегося в начальный момент в трубе, сводится к решению задачи об одномерном автомодельном движении газа, вытесняемого поршнем, движущимся по закону

$$x_1 = \text{const } t^\delta = \lambda_1 t^{\frac{\beta+3}{2+\nu}} \quad (7)$$

Последняя задача хорошо изучена [2,3,1]. В частности, установлено [3], что решение задачи существует только при

$$\frac{\beta+3}{2+\nu} \equiv \delta > \frac{2}{2+\nu} \quad (8)$$

Интересно отметить, что это условие совпадает с условием $\beta > -1$, т. е. с условием конечности внесенной в трубу энергии, что, впрочем, естественно [3]. Отметим еще, что в силу условия (3) из (8) получается следующее ограничение для α :

$$\alpha_i > \frac{\nu-2}{\nu+2}$$

Таким образом, решение задачи сводится к построению решения системы (6) в области $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, соответствующей вытекшему из отверстия газу, и решения соответствующей задачи о поршне для области $\lambda_1 \leq \lambda \leq 1$ (введенная в выражение для λ постоянная λ_0 позволяет принять на ударной волне, идущей по невозмущенному газу, $\lambda = 1$; постоянная λ_0 будет тогда определяться из интегральных законов сохранения массы и энергии).

Как обычно, фактическое построение решения сводится к нахождению интегральной кривой первого из уравнений (6), проходящей через точки, определяемые начальными и граничными условиями задачи, и

определению $\lambda(V)$ и $R(V)$ квадратурами по второму и третьему уравнениям системы (6). При этом параметр λ вдоль интегральной кривой должен монотонно и непрерывно изменяться от единицы до нуля. Условия на ударных волнах, возникающих в потоке, в переменных, введенных выше, имеют вид

$$R_1(V_1 - \delta) = R_2(V_2 - \delta)$$

$$V_1 - \delta + \frac{z_1}{\gamma_1(V_1 - \delta)} = V_2 - \delta + \frac{z_2}{\gamma_2(V_2 - \delta)} \quad (9)$$

$$(V_1 - \delta)^2 + \frac{2z_1}{\gamma_1 - 1} = (V_2 - \delta)^2 + \frac{2z_2}{\gamma_2 - 1}$$

На плоскости VZ начальному невозмущенному состоянию газа в трубе соответствует начало координат. Состоянию за ударной волной, идущей по невозмущенному газу в трубе, в силу соотношений (9) соответствует точка

$$V = \frac{2\delta}{\gamma_1 + 1}, \quad Z = \frac{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)\delta^2}{(\gamma_1 + 1)^2} \quad (10)$$

Можно показать, что интегральная кривая, проходящая через эту точку, при условии (8), при монотонном убывании λ вдоль нее входит в особую точку A ($V = \delta$, $Z = 0$), если $\beta > 2$ (фиг. 2), или в особую точку A' ($V = \delta$, $Z = \infty$), если $\beta < 2$ (фиг. 7); для случая $\beta = 2$ $V = \delta$ не является интегральной кривой, поэтому интегральная кривая, проходящая через точку (10), подходит к прямой $V = \delta$ с конечным z (фиг. 6). Во всех трех случаях указанные отрезки интегральных кривых соответствуют движению газа, находившегося в начальный момент в трубе (эти отрезки решают отмеченную выше соответствующую задачу о поршне). Во всех случаях для монотонности изменения параметра λ интегральную кривую необходимо продолжить в область $V > \delta$. Анализ особых точек A и A' с учетом условий на контактном разрыве показывает, что такое продолжение возможно.

Легко показать, что все интегральные кривые, получающиеся при таком продолжении, выходят на параболу

$$Z_1 = (V - \delta)^2 \quad (11)$$

на которой λ достигает экстремума. Это свидетельствует о том, что в решение должна быть введена вторая ударная волна.

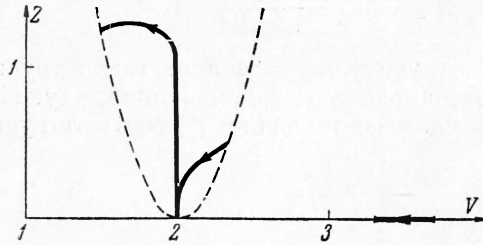
В силу соотношений (9) переход с рассматриваемой интегральной кривой возможен только из точек, расположенных между параболой

$$Z = \frac{2\gamma_2^2}{\gamma_2 - 1} (V - \delta)^2 \quad (12)$$

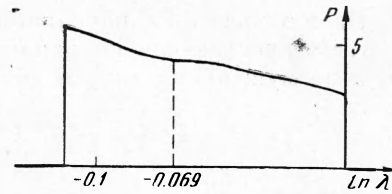
и параболой (11), в точки, лежащие между параболой (11) и осью $Z = 0$. Рассмотрение поля интегральных кривых показывает, что движение вдоль всех интегральных кривых в последней области при убывающем λ вновь приводит на параболу (11). Введение третьей ударной волны невозможно, ибо она переводила бы точку из области ниже параболы (11) в область выше нее, т. е. оказалась бы скачком разрежения. Исключением будет единственная интегральная кривая $Z = 0$, по которой можно, двигаясь с убывающим λ , достигнуть точки $Z = 0$, $V = \infty$, $\lambda = 0$, соответствующей входному отверстию трубы. Таким образом, для завершения построения интегральной кривой, соответствующей решению, скачок нужно совершить именно на эту интегральную кривую.

Отметим здесь, что в то время как часть интегральной кривой, расположенная в области $V < \delta$, полностью определена начальной точкой (10), ее продолжение в области $V > \delta$ может быть осуществлено неединственным образом. В качестве такого продолжения можно взять любую

интегральную кривую, выходящую из точки $V = \delta$, $Z = 0$ (или $V = \delta$, $Z = \infty$) в область $V > \delta$. Это не противоречит условиям на контактном разрыве (непрерывность скорости и давления). Указанные продолжения интегральной кривой образуют однопараметрическое семейство кривых в плоскости VZ , так как они — интегральные кривые уравнения первого порядка. Если кривая из этого семейства выбрана, то точка на ней, соответствующая второй ударной волне, должна находиться на параболе (12). Следовательно, однозначно определяется и образ этой точки на оси $Z = 0$. Таким образом, интегральная кривая в плоскости VZ , соответствующая решению задачи, определяется с точностью до одного произвольного параметра.



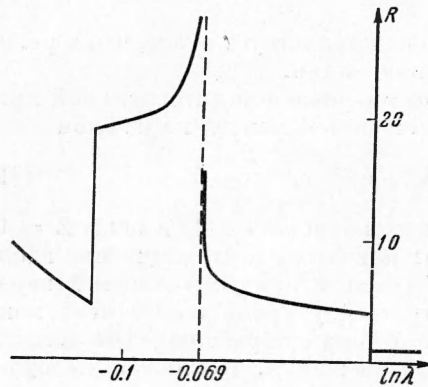
Фиг. 2



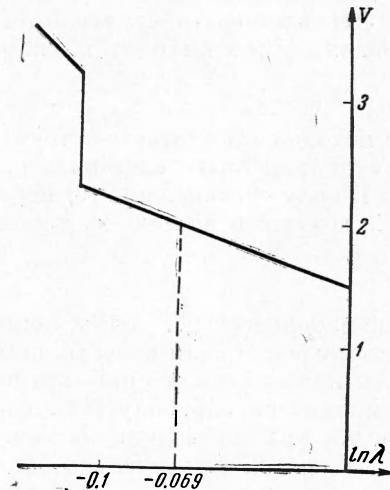
Фиг. 3

Взяв квадратуру для R и λ , определим распределения вдоль этой интегральной кривой $R(V)$ и $\lambda(V)$. При этом на участке интегральной кривой в области $V < \delta$ в силу условий $\lambda = 1$, $R = (\gamma_1 + 1) / (\gamma_1 - 1)$ в точке 10 распределения λ и R полностью определены и не зависят от указанного параметра.

Изменение λ при переходе через контактный разрыв $V = \delta$ должно быть непрерывным, а изменение R может быть разрывным в этой точке. Это приводит к тому, что распределение R вдоль интегральной кривой в области $V < \delta$, кроме указанного выше произвольного параметра, от определяющего интегральную кривую в этой области, будет зависеть еще от одного произвольного параметра.



Фиг. 4



Фиг. 5

В результате решение будет содержать вместе с λ_0 три неопределенных параметра. Их можно определить из условий: 1) непрерывности давления на контактном разрыве (используя асимптотические формулы для $Z(V)$, $P(V)$, $R(V)$ вблизи $V = \delta$; 2) равенства массы, заключенной между входным отверстием и контактном разрывом, массе, введенной

в трубу через отверстие; 3) равенства полной энергии движущегося газа энергии, введенной в трубу через отверстие. Два последних условия сводятся к соотношениям

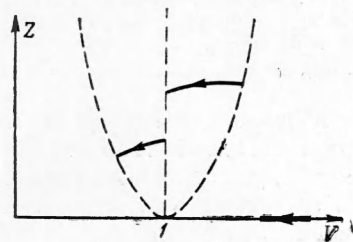
$$\int_0^{\lambda_1} R \lambda^{\nu-1} d\lambda = \frac{q \lambda_0^{\nu}}{\rho_0 (\alpha + 1)} \left(\frac{q}{n}\right)^{\frac{\nu}{2}} \quad (13)$$

$$\int_0^1 R \left(\frac{V^2}{2} + \frac{Z}{\gamma_i (\gamma_i - 1)}\right) \lambda^{\nu+1} d\lambda = \frac{n \lambda_0^{\nu+2}}{\rho_0 (\beta + 1)} \left(\frac{q}{n}\right)^{\frac{\nu+2}{2}} \quad (14)$$

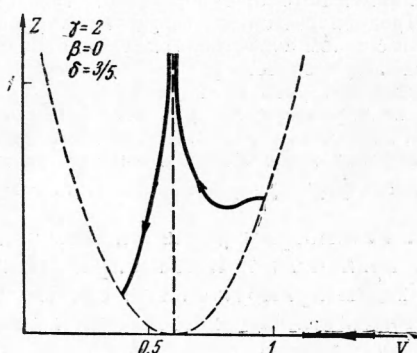
Здесь R , V , Z зависят, кроме λ , от двух постоянных C_1 и C_2 . Соотношения (13) и (14) вместе с условием

$$P(\lambda_1 - 0, C_1 C_2) = P(\lambda_1 + 0)$$

и служат для определения трех постоянных C_1 , C_2 , λ_0 .



Фиг. 6



Фиг. 7

На фигурах (2—5) приведен пример численного решения задачи для случая конической трубы ($\nu = 3$) при $\beta = 7$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$, $\delta = 2$. На фиг. 2—5 изображены интегральная кривая в плоскости ZV , а также графики распределений безразмерных характеристик движения вдоль трубы.

На фиг. 6, 7 качественно изображены интегральные кривые, соответственно, для $\beta = 2$ и $\beta < 2$.

При $\beta = 2$ плотность на контактном разрыве конечна, при $\beta < 2$ равна нулю и при $\beta > 2$ равна бесконечности.

Поступила 7 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, М., 1957.
2. Крашенинникова Н. Л. О неустановившихся движениях газа, вытесняемого поршнем. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 8.
3. Григорян С. С. Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные движения). ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.