Физика горения и взрыва

3

1965 г.

УДК 532.46

СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ ГОРЕНИЯ ПОРОХА ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИ МЕНЯЮЩЕМСЯ ДАВЛЕНИИ

Б. В. Новожилов

(Москва)

При медленном изменении давления профиль температуры в прогретом слое пороха успевает следить за изменяющимся давлением — имеет место квазистационарный режим горения. В случае быстроменяющегося давления температурное распределение отстает от давления, и скорость горения пороха отличается от квазистационарной.

Нестационарные режимы горения пороха рассматривались в работах Я. Б. Зельдовича [1—3]. В работах [4, 5] изучались процессы горения при мгновенном и экспоненциальном падении и росте давления, а также при резком изменении сечения сопла в камере сгорания порохового ракетного двигателя.

Ниже для модели пороха, скорость горения которого определяется только давлением и градиентом температуры на поверхности конденсированной фазы, вычисляется первая поправка (пропорциональная квадрату амплитуды давления) к средней скорости горения при гармонически меняющемся во времени давлении. Этот вопрос может быть интересен в связи с возникновением акустических колебаний в камерах сгорания пороховых двигателей.

В стационарном режиме скорость горения пороха

$$u_0 = Bp^{\nu} f(T_0) \qquad (1)$$

определяется его начальной температурой T_0 и давлением p. При этом имеется однозначная связь между T_0 и градиентом температуры на границе конденсированной и газовой фаз

$$\left|\frac{dT}{dx}\right|_0 = \frac{u_0}{\varkappa}(T_1 - T_0), \qquad (2)$$

где $\varkappa$ — температуропроводность, а T_1 — температура поверхности пороха, которая в модели Я. Б. Зельдовича постоянна. Подставив из (2) выражение для T_0 в (1), представим скорость горения в виде $u = F = \left(p, \left|\frac{\partial T}{\partial x}\right|_0\right)$. Эта зависимость будет справедлива и в нестационарном случае [1]. Однако соотношение (2) уже не выполняется, и для определения градиента необходимо решать уравнение теплопроводности в твердой фазе.

Введем безразмерные переменные

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \qquad \tau = \frac{u_0^2}{\varkappa} t, \qquad \xi = \frac{u_0}{\varkappa} x,$$

$$z = \frac{p}{p_0}, \qquad v = \frac{u}{u_0}, \qquad \varphi = \left| \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_0,$$

где x — пространственная координата ($x>0$, $x=0$ — поверхность пороха), t — время, u — нестационарная скорость горения, u_0 — стационарная скорость горения при давлении p_0.

В этих переменных задача формулируется следующим образом. Найти среднее значение скорости горения v при давлении

$$z = 1 + \lambda \cos(\omega\tau + \psi) \tag{3}$$

и заданном законе горения

$$v = F(z, \varphi)$$

при условии, что градиент φ должен определяться из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v\theta\right) \tag{4}$$

с граничными условиями $\theta(\tau, 0) = 1$ и $\theta(\tau, \infty) = 0$.

Имея ввиду нахождение только первой поправки порядка λ^2 к средней скорости горения, представим v в форме

$$v = 1 + a\lambda^2 + b\lambda \cos \omega\tau, \tag{5}$$

а распределение температур

$$\theta(\tau, \xi) = e^{-(1 + a\lambda^2)\xi}\left[1 + \lambda f_1(\tau, \xi) + \lambda^2 f_2(\tau, \xi)\right]. \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в уравнение теплопроводности и сравнивая члены с одинаковыми степенями λ, получим уравнения для функций f_1 и f_2:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial f_1}{\partial \xi} - b\cos\omega\tau,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \xi} + b f_1 \cos\omega\tau\right) - \left(\frac{\partial f_2}{\partial \xi} + b f_1 \cos\omega\tau\right).$$

Решение для f_1, конечное на бесконечности и удовлетворяющее граничному условию $f_1\Big|_{\xi=0} = 0$, имеет вид

$$f_1 = \frac{b}{\omega}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2\omega}{r}\right)\xi} \sin\left(\omega\tau - \frac{r\xi}{2}\right) - \sin\omega\tau\right], \tag{7}$$

где $r = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 16\omega^2} - 1\right)}$.

Функция f_2 содержит постоянную составляющую f_c и вторую гармонику. Учет второй гармоники приведет к членам порядка λ^4 в скорости горения, поэтому ее можно опустить. Уравнение для f_c с учетом граничного условия на бесконечности дает

$$\frac{d f_c}{d \xi} = -\overline{b f_1 \cos \omega \tau},$$

где чертой сверху обозначено усреднение по времени. Отсюда получаем

$$\left.\frac{d f_c}{d \xi}\right|_{\xi = 0} = 0. \tag{8}$$

Из выражений (6) и (7), принимая во внимание (8), найдем с точностью до членов порядка λ^2 градиент температуры на поверхности твердой фазы

$$\varphi = (1 + a\lambda^2) - \frac{b\lambda}{2\omega}\left[\left(1 - \frac{2\omega}{r}\right)\sin\omega\tau - r\cos\omega\tau\right]. \tag{9}$$

Для определения постоянных a, b и сдвига фазы ψ необходимо конкретизировать закон горения.

Предположим, что скорость горения в стационарном режиме экспоненциально зависит от начальной температуры

$$u_0 = B p^{\nu} e^{\alpha T_0}.$$

В безразмерных переменных нестационарная скорость, выраженная через градиент, будет иметь вид

$$v = z^{\nu} e^{\beta\left(1 - \frac{\varphi}{v}\right)}, \tag{10}$$

где $\beta = \alpha(T_1 - T_0)$. Подставив в (10) выражения скорости, давления и градиента и потребовав равенства членов, содержащих λ^2, $\lambda\cos\omega\tau$ и $\lambda\sin\omega\tau$, получим три алгебраических уравнения для определения a, b и ψ. Их решение приводит к следующим выражениям:

$$a = \frac{\nu(\nu - 1)}{4} - \frac{\nu^2}{4}\left(1 - \frac{2N - 1}{M^2 + N^2}\right),$$
$$b = \frac{\nu}{\sqrt{M^2 + N^2}}, \qquad \operatorname{tg}\Psi = -\frac{M}{N}, \tag{11}$$

где для краткости введены обозначения

$$M = \frac{\beta}{r}\left(1 - \frac{r}{2\omega}\right), \qquad N = 1 - rM.$$

Первое слагаемое в поправке к средней скорости горения a обусловлено нелинейной зависимостью скорости от давления $u \sim p^{\nu}$. Оно отрицательно ($\nu < 1$) и существует и в квазистационарном режиме. Второе слагаемое возникает из-за нестационарных эффектов и, как показывает расчет, также отрицательно ($2N - 1 < M^2 + N^2$). Таким образом, средняя скорость горения в нестационарном режиме будет меньше стационарной скорости u_0 при среднем давлении p_0. На рисунке приведена зависимость $\left(a + \frac{\nu}{4}\right)\frac{4}{\nu^2} = \frac{2N-1}{M^2+N^2}$ от частоты при различных значениях β (цифры 1—4 соответствуют значениям $\beta = 0{,}5$; 0,7; 0,8 и 0,9).

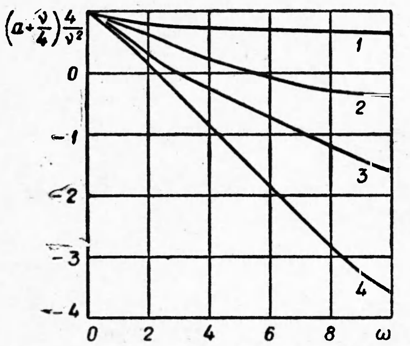
В пределе $\omega \ll 1$

$$b \to \nu\,, \quad a \to \frac{\nu(\nu-1)}{4}\,, \quad \mathrm{tg}\,\Psi \to 0.$$

При $\omega \gg 1$

$$b \to \frac{\nu}{1-\beta}\,, \quad a \to \frac{\nu(\nu-1)}{4} - \frac{\nu^2}{4}\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^2, \quad \mathrm{tg}\,\Psi \to 0.$$

При линейном законе горения $u_0 = Bp^\nu(1+\alpha T_0)$ вместо (10) имеем



$$v = z^\nu\left[1 + \gamma\left(1 - \frac{\varphi}{v}\right)\right],$$

$$\gamma = \frac{\alpha(T_1 - T_0)}{1 + \alpha T_0}.$$

Для $\mathrm{tg}\,\psi$ и b справедливы выражения (11), где вместо β нужно подставить γ, а для a получаем

$$a = \frac{\nu(\nu-1)}{4} - \frac{\nu^2}{2}\left(1 - \frac{2N-1}{M^2+N^2}\right).$$

Поправка, как и в случае экспоненциального закона, отрицательна.

Естественно, что все рассмотрение справедливо при условии, что процессы в газовой фазе можно считать неинерционными, т. е. при не очень больших частотах. Соответствующие оценки приведены, например, в [4].

Поступила в редакцию
2/II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. *Я. Б. Зельдович.* ЖЭТФ, 1942, 12, 11—12.
2. *Я. Б. Зельдович.* ПМТФ, 1964, 3.
3. *Я. Б. Зельдович.* ПМТФ, 1963, 1.
4. *Б. В. Новожилов.* ПМТФ, 1962, 5.
5. *А. Г. Истратов, В. Б. Либрович, Б. В. Новожилов.* ПМТФ, 1964, 3.