

РАСЧЕТ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР В ЭЛЕКТРОДАХ ПЛАЗМАТРОНА

Б. А. Урюков (Новосибирск)

Задачи расчета температурных полей электродов плазматрона (электродугового подогревателя) отличаются от обычных задач теплопроводности тем, что в плазматроне, наряду с конвективным теплообменом между стенкой электрода и рабочей средой и между стенкой и охлаждающей средой, имеет место интенсивный подвод тепла к электроду в резко ограниченной области поверхности электрода — в опорном пятне дуги.

В [1] при помощи метода источников и стоков рассмотрен ряд подобных задач в применении к тепловому расчету электродов при сварке. В [2-5] исследовались поля температур от круглого неподвижного источника на поверхности полубесконечного тела охлаждаемой пластины и от пятна дуги, движущейся с большой скоростью между двумя коаксиальными цилиндрами (электродами).

Рассмотрим электрод плазматрона в виде полого цилиндра, по одной поверхности которого движется пятно дуги, а другая охлаждается. Будем считать, что пятно перемещается по замкнутой траектории в одном сечении электрода.

Возможны и другие конфигурации электродов, как, например, диск, по поверхности которого по кольцевой траектории движется пятно.

Предполагается, что тепловой поток от рабочей среды в стенку электрода вне пятна определяется только конвекцией, а в пятне к нему добавляется тепловой поток Q из приэлектродной области дуги. Рассматривается круглое пятно. Удельный тепловой поток q_0 (на единицу площади пятна) из приэлектродной части дуги считается постоянным и равномерно распределенным по площади пятна

$$q_0 = Q / \pi r_0^2 \quad (0.1)$$

Здесь r_0 — радиус пятна. Температура рабочей среды T_{01} , охлаждающей среды T_{02} , коэффициенты теплоотдачи рабочей среды α_1 и охлаждающей среды α_2 , коэффициенты теплопроводности λ и температуропроводности a материала электрода

считаются постоянными. Электроды имеют бесконечную длину. Рассматривается случай установившегося процесса нагрева.

1. Цилиндрический электрод при большой скорости движения пятна (плоское приближение). При достаточно большой скорости движения пятна по поверхности цилиндрического электрода можно считать, что пятно вырождается в кольцо шириной $2r_0$ — «размытое» пятно. Наиболее простое решение задачи о поле температур в электроде находится для схемы «плоского приближения», когда цилиндрический электрод мысленно разрезается по образующей и разворачивается в пластину шириной πD и толщиной δ (фиг. 1), где D — некоторый средний диаметр исходного цилиндра. В этом случае задача является плоской. Уравнение теплопроводности

$$\partial^2 T' / \partial x^2 + \partial^2 T' / \partial y^2 = 0 \quad (T' = T - T^*) \quad (1.1)$$

Здесь T — температура данной точки пластины; T^* — температура точки пластины на бесконечном удалении от пятна с координатой y данной точки, определяемая лишь конвективным теплообменом между электродом и рабочей и охлаждающей средой.

Удельный тепловой поток от приэлектродной области дуги в размытом пятне равен

$$q = Q / 2\pi D r_0 \quad (1.2)$$

Граничные условия задачи

$$\lambda \partial T' / \partial y = -qH(r_0^2 - x^2) + \alpha_1 T', \quad y = 0 \quad (1.3)$$

$$\lambda \partial T' / \partial y = -\alpha_2 T', \quad y = \delta; \quad \partial T' / \partial x = 0, \quad x = 0$$

Функция H определяется следующим образом:

$$H(z) = 1 \quad \text{при } z \geq 0, \quad H(z) = 0 \quad \text{при } z < 0 \quad (1.4)$$

Введем безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x}{\delta}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}, \quad B = \frac{\alpha \delta}{\lambda}, \quad \tau = \frac{\pi T' \lambda \delta}{Q}, \quad v = \frac{D}{\delta}, \quad \rho = \frac{r_0}{\delta}$$

Здесь B — критерий Био. Уравнение теплопроводности примет вид

$$\partial^2 \tau / \partial \xi^2 + \partial^2 \tau / \partial \eta^2 = 0 \quad (1.5)$$

Граничные условия

$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = -\frac{H(\rho^2 - \xi^2)}{2\rho\nu} + B_1\tau, \quad \eta = 0; \quad \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = -B_2\tau, \quad \eta = 1; \quad \frac{\partial \tau}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 0 \quad (1.6)$$

Температура T^* определяется формулой

$$T^* = \frac{B_1(1 + B_2)T_{01} + B_2T_{02} - B_1B_2(T_{01} - T_{02})\eta}{B_1 + B_2 + B_1B_2} \quad (1.7)$$

Задача решается методом Фурье при помощи применения представления четной функции $f(z)$ в виде интеграла Фурье [6].

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(t) \cos pt \, dt \right] \cos pz \, dp \quad (1.8)$$

так что

$$H(\rho^2 - \xi^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin p\rho}{p} \cos p\xi \, dp \quad (1.9)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.6) и используя четность подынтегральной функции в выражении для τ , получаем окончательно

$$\nu\tau(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi\rho} \int_0^{\infty} \frac{\cos p\xi \sin p\rho}{p} \frac{p \operatorname{ch} p(1 - \eta) + B_2 \operatorname{sh} p(1 - \eta)}{(p^2 + B_1B_2) \operatorname{sh} p + p(B_1 + B_2) \operatorname{ch} p} \, dp \quad (1.10)$$

На фиг. 2 показана характерная зависимость $\nu\tau(0, 0)$ (значение $\nu\tau$ в центре пятна) от чисел Био B_1 и B_2 при $\rho = 1$. Следует отметить, что при достаточно больших значениях B_2 величина $\nu\tau(0, 0)$ слабо зависит от B_2 . При больших значениях B_1 величина $\nu\tau(0, 0)$ практически не зависит от B_2 и слабо зависит от B_1 .

В полости цилиндрического электрода плазматрона, где на дугу действуют аэродинамические силы движущейся рабочей среды, наблюдаются колебания длины дуги, причем распределение удельного теплового потока от пятна дуги вдоль зоны колебаний дуги, длина которой равна l , можно считать близким к нормальному

$$q = q_1 \exp(-x^2 / r_1^2) \quad (1.11)$$

Общий тепловой поток, подводимый в пятне, равен

$$Q = \pi \sqrt{\pi} D q_1 r_1 \Phi(l / 2r_1) \quad (1.12)$$

Здесь $\Phi(z)$ — интеграл вероятности.

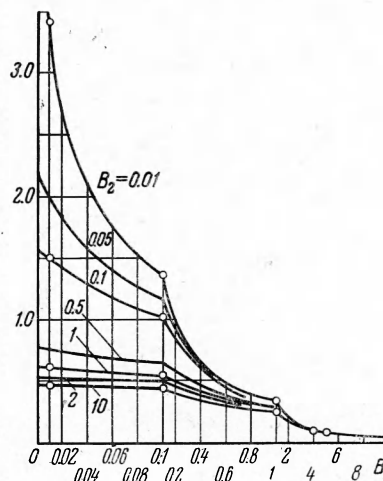
Поскольку этот тепловой поток равен потоку от пятна дуги радиуса r_0 при удельном тепловом потоке $q = q_0(0.1)$, то

$$q_1 = \frac{q_0 r_0^2}{\sqrt{\pi} r_1 D \Phi(l / 2r_1)} \quad (1.13)$$

Решение задачи о поле температур цилиндрического электрода в плоском приближении с нормальным распределением удельного теплового потока (1.11) приводит к соотношению (для случая $l / 2r_1 \gg 1$, когда $\Phi(l / 2r_1) \approx 1$)

$$\nu\tau(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos p\xi \exp\left(-\frac{p\rho^2}{4}\right) \frac{p \operatorname{ch} p(1 - \eta) + B_2 \operatorname{sh} p(1 - \eta)}{(p^2 + B_1B_2) \operatorname{sh} p + p(B_1 + B_2) \operatorname{ch} p} \, dp \quad (1.14)$$

Здесь $\rho = r_1 / \delta$. Расчеты по (1.14) (точки на фиг. 2) показывают, что $\nu\tau(0, 0)$ в данном случае мало отличается от $\nu\tau(0, 0)$ при равномерном распределении удельного теплового потока по площади пятна.



Фиг. 2

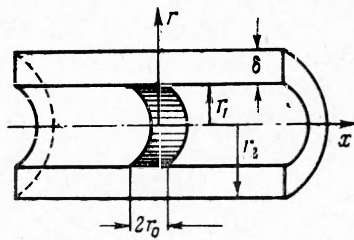
2. Цилиндрический электрод при большой скорости движения пятна. Полученные выше результаты применимы для тонкостенных электродов. Если отношение толщины стенки к диаметру электрода нельзя считать малым, то задачу необходимо решать в более точной постановке.

Рассмотрим цилиндрический электрод (фиг. 3). На внутренней поверхности электрода диаметром $D = 2r_1$ подводится тепловой поток в размытом кольцевом пятне шириной $2r_0$. Внешний диаметр электрода $D_2 = 2r_2$. Ось x направлена вдоль оси электрода, r — радиус данной точки. Толщина стенки равна $\delta = r_2 - r_1$. Введем безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x}{\delta}, \quad \eta = \frac{r}{\delta}, \quad B = \frac{\alpha\delta}{\lambda}, \quad \tau = \frac{\pi T' \lambda \delta}{Q}, \quad v_1 = \frac{D_1}{\delta}, \quad v_2 = \frac{D_2}{\delta}, \quad \rho = \frac{r_0}{\delta}, \quad R = \frac{r_2}{r_1}$$

В качестве базисного размера выбрана толщина стенки для того, чтобы возможно было провести сравнение с решением в плоском приближении.

Уравнение теплопроводности и граничные условия примут вид



Фиг. 3

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial \tau}{\partial \eta} &= 0 & (2.1) \\ \frac{\partial \tau}{\partial \eta} &= -\frac{1}{2\rho v_1} H(\rho^2 - \xi^2) + B_1 \tau, \quad \eta = \frac{1}{R-1} \\ \frac{\partial \tau}{\partial \eta} &= -B_2 \tau, \quad \eta = \frac{R}{R-1} \\ \frac{\partial \tau}{\partial \xi} &= 0, \quad \xi = 0 & (2.2) \end{aligned}$$

Температура T' определена так же, как и в п. 1, а температура T^* определяется по формуле

$$\begin{aligned} T^* &= \left[\frac{B_1}{R} T_{01} + B_2 T_{02} - \frac{B_1 B_2}{R-1} \left(T_{01} \ln \eta \frac{R-1}{R} - T_{02} \ln \eta (R-1) \right) \right] \times \\ &\quad \times \left(\frac{B_1}{R} + B_2 + \frac{B_1 B_2}{R-1} \ln R \right)^{-1} & (2.3) \end{aligned}$$

Задача решается методом Фурье. Выражение для τ имеет вид

$$v_1 \tau(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi \rho} \int_0^{\infty} \frac{\cos p \xi \sin p \rho}{p} \frac{A_1(p, R) I_0(p \eta) + A_2(p, R) K_0(p \eta)}{A_3(p, R)} dp \quad (2.4)$$

$$A_1(p, R) = p K_1 \left(\frac{pR}{R-1} \right) - B_2 K_0 \left(\frac{pR}{R-1} \right), \quad A_2(p, R) = p I_1 \left(\frac{pR}{R-1} \right) + B_2 I_0 \left(\frac{pR}{R-1} \right)$$

$$\begin{aligned} A_3(p, R) &= p^2 \left[K_1 \left(\frac{p}{R-1} \right) I_1 \left(\frac{pR}{R-1} \right) - I_1 \left(\frac{p}{R-1} \right) K_1 \left(\frac{pR}{R-1} \right) \right] + \\ &+ p B_1 \left[I_0 \left(\frac{p}{R-1} \right) K_1 \left(\frac{pR}{R-1} \right) + K_0 \left(\frac{p}{R-1} \right) I_1 \left(\frac{pR}{R-1} \right) \right] + \\ &+ p B_2 \left[I_1 \left(\frac{p}{R-1} \right) K_0 \left(\frac{pR}{R-1} \right) + K_1 \left(\frac{p}{R-1} \right) I_0 \left(\frac{pR}{R-1} \right) \right] + \\ &+ B_1 B_2 \left[K_0 \left(\frac{p}{R-1} \right) I_0 \left(\frac{pR}{R-1} \right) - I_0 \left(\frac{p}{R-1} \right) K_0 \left(\frac{pR}{R-1} \right) \right] \end{aligned}$$

Здесь I_0, I_1, K_0, K_1 — функции Бесселя мнимого аргумента. Представляя $\eta = 1/(R-1) + \eta'$, где η' отсчитывается от поверхности электрода, нагреваемого дугой, и устремляя $(R-1)$ к нулю, можно показать, что (2.4) сводится к (1.10).

На фиг. 4 приведены результаты расчета $v_1 \tau(0, 1/(R-1))$ в центре пятна при $B_1 = 0$ и $\rho = 1$ в зависимости от R и B_2 . Для сравнения даны значения $v_1 \tau(0, 0)$ в плоском приближении. Видно, что $v_1 \tau(0, 1/(R-1))$ меньше $v_1 \tau(0, 0)$, причем в диапазоне величин R , обычно применяемых на практике ($R \leq 2$), отличие не превышает $\sim 20\%$.

3. **Плоский электрод с кольцевым пятном.** При большой скорости движения пятна по поверхности плоского электрода (диска) по замкнутой кольцевой траектории (фиг. 5) пятно вырождается в кольцо шириной $2r_0$, срединная линия которого находится на расстоянии r_1 от оси вращения, по которой направлена ось x ; r — расстояние до данной точки от оси вращения. Рассматривается электрод бесконечной протяженности. Вводятся безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x}{\delta}, \quad \eta = \frac{r}{\delta}, \quad B = \frac{\alpha\delta}{\lambda}, \quad r = \frac{\pi T' \lambda \delta}{Q}, \quad \rho = \frac{r_0}{\delta}, \quad R = \frac{r_1}{\delta}, \quad v = 2R$$

Температура T' определяется так же, как в п. 1. Удельный тепловой поток в размытом пятне

$$q = Q / 4\pi r_0 r_1 \tag{3.1}$$

Уравнение теплопроводности имеет вид (2.1). Граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4\rho R} H [\rho^2 - (R - \eta)^2] + B_1 \tau, & \xi = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial \xi} &= -B_2 \tau, & \xi = 1; \quad \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = 0, & \eta = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Метод решения такой же, как и в пп. 1, 2. В результате получаем

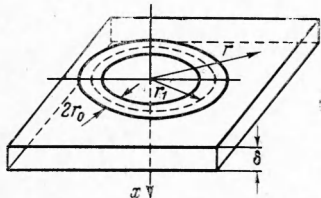
$$\begin{aligned} \nu\tau(\xi, \eta) = \frac{1}{2\rho} \int_0^\infty J_0(p\eta) \left\{ (R + \rho) J_1[p(R + \rho)] - \right. \\ \left. - (R - \rho) J_1[p(R - \rho)] \right\} \frac{p \operatorname{ch} p(1 - \xi) + B_2 \operatorname{sh} p(1 - \xi)}{(p^2 + B_1 B_2) \operatorname{sh} p + p(B_1 + B_2) \operatorname{ch} p} dp \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь J_0, J_1 — функции Бесселя действительного аргумента. На фиг. 6 приведены результаты расчета распределения $\nu\tau(0, \eta)$ по поверхности электрода для различных значений R при $B_1 = 0, B_2 = 1, \rho = 0.01$. В случае $R = \rho$ кольцевое пятно вырождается в неподвижное пятно с радиусом $2r_0$. Максимум температуры при этом находится точно на «краю» пятна — на оси симметрии. С ростом R максимум смещается внутрь пятна, и уже при $R \geq 2\rho$ максимальная температура мало отличается от температуры на срединной линии пятна.

4. **Цилиндрический электрод при конечной скорости движения пятна (плоское приближение).** Выше дано решение некоторых задач о распределении температуры в электроде в случае «достаточно большой» скорости движения пятна дуги по поверхности электрода, т. е. при «достаточно большой» частоте повторения пробеганий пятна через точки, лежащие на пути его движения, когда тепловой поток через пятно можно считать размытым по всей площади области, по которой проходит пятно. Интересно установить, при какой скорости движения пятна можно принимать это допущение и каково отличие действительной температуры электрода с движущимся пятном от температуры при размытом пятне. Рассмотрим схему плоского приближения (фиг. 7).

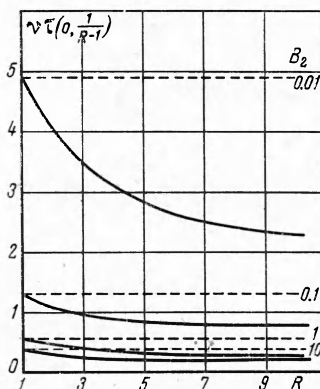
Электрод мысленно разрезается по образующей и разворачивается в пластину. Удобно принять разрез неподвижным относительно пятна, т. е. перемещающимся по окружности цилиндра со скоростью перемещения пятна V .

Поместив начало координат в центр пятна, находим, что задача сводится к определению поля температуры в пластине, движущейся относительно пятна со скоростью его перемещения по электроду, с граничными условиями на поверхностях разреза, стоящих на фиксированном расстоянии от центра пятна, отражающих то условие, что каждые две соответственные точки этих поверхностей в действительности являются одной точкой исходного цилиндра. Плоскости разреза удобно расположить на равном расстоянии от центра пятна. Пластина движется



Фиг. 5

относительно пятна в отрицательном направлении оси x . Удельный тепловой поток в пятне дуги определяется уравнением (0.4). Уравнение теплопроводности в данном



Фиг. 4

случае является уравнением энергии для движущейся несжимаемой среды

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{V}{a} \frac{\partial T'}{\partial x} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

Температура T' определяется так же, как в п. 1. Введем безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x}{\delta}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}, \quad \zeta = \frac{z}{\delta}, \quad B = \frac{\alpha \delta}{\lambda}, \quad \tau = \frac{\pi T' \lambda \delta}{Q}, \quad \rho = \frac{r_0}{\delta}, \quad \nu = \frac{D}{\delta}, \quad \beta = \frac{V \delta}{a}$$

Уравнение теплопроводности (4.1) принимает вид

$$\partial^2 \tau / \partial \xi^2 + \beta \partial \tau / \partial \xi + \partial^2 \tau / \partial \eta^2 + \partial^2 \tau / \partial \zeta^2 = 0 \quad (4.2)$$

Граничные условия на поверхностях $y = 0$, $y = \delta$ и на плоскости симметрии $z = 0$ записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho^2} H(\rho^2 - \xi^2 - \zeta^2) + B_1 \tau, \quad [\eta = 0; \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = -B_2 \tau, \quad \eta = 1; \quad \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = 0, \quad \zeta = 0$$

Граничные условия на поверхностях разреза — «условия периодичности»

$$\tau\left(\xi = -\frac{\pi \nu}{2}\right) = \tau\left(\xi = \frac{\pi \nu}{2}\right), \quad \frac{\partial \tau}{\partial \xi}\left(\xi = -\frac{\pi \nu}{2}\right) = \frac{\partial \tau}{\partial \xi}\left(\xi = \frac{\pi \nu}{2}\right) \quad (4.4)$$

Задача решается методом Фурье. Используется разложение

$$H(\rho^2 - \xi^2 - \zeta^2) = H(\rho - |\zeta|) H(\sqrt{\rho^2 - \xi^2} - |\zeta|) = \\ = \frac{1}{\pi^2 \nu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \frac{2n\xi i}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos p\zeta}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{2nti}{\nu} \sin p \sqrt{\rho^2 - t^2} dt dp \quad (4.5)$$

и равенство [7]

$$\int_0^{\infty} \sin p \sqrt{\rho^2 - t^2} \cos \frac{2nt}{\nu} dt = \frac{\pi p \rho}{2 \sqrt{p^2 + (2n/\nu)^2}} J_1[\rho \sqrt{p^2 + (2n/\nu)^2}]. \quad (4.6)$$

В результате находим

$$\nu \tau(\xi, \eta, \zeta) = \nu \tau_{\infty}(\eta, \zeta) + \psi(\xi, \eta, \zeta) \quad (4.7)$$

$$\nu \tau_{\infty}(\eta, \zeta) = \frac{2}{\pi \rho} \int_0^{\infty} \frac{\cos p\zeta J_1(p\rho)}{p} \frac{p \operatorname{ch} p(1-\eta) + B_2 \operatorname{sh} p(1-\eta)}{(p^2 + B_1 B_2) \operatorname{sh} p + p(B_1 + B_2) \operatorname{ch} p} dp \quad (4.8)$$

$$\psi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{4}{\pi \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos p\zeta J_1[\rho \sqrt{p^2 + (2n/\nu)^2}]}{\sqrt{p^2 + (2n/\nu)^2} (\theta_1 + \theta_2)^2} \left\{ [\Phi_1(\eta) \theta_1 + \Phi_2(\eta) \theta_2] \cos \frac{2n\xi}{\nu} + \right. \\ \left. + [\Phi_2(\eta) \theta_1 - \Phi_1(\eta) \theta_2] \sin \frac{2n\xi}{\nu} \right\} dp \quad (4.9)$$

$$\Phi_1(\eta) = u \operatorname{ch} u(1-\eta) \cos v(1-\eta) - v \operatorname{sh} u(1-\eta) \sin v(1-\eta) + \\ + B_2 \operatorname{sh} u(1-\eta) \cos v(1-\eta) \quad (4.10)$$

$$\Phi_2(\eta) = v \operatorname{ch} u(1-\eta) \cos v(1-\eta) + u \operatorname{sh} u(1-\eta) \sin v(1-\eta) + \\ + B_2 \operatorname{ch} u(1-\eta) \sin v(1-\eta)$$

$$\theta_1 = (u^2 - v^2 + B_1 B_2) \operatorname{sh} u \cos v - 2uv \operatorname{ch} u \sin v + (B_1 + B_2) \times \\ \times (u \operatorname{ch} u \cos v - v \operatorname{sh} u \sin v) \quad (4.11)$$

$$\theta_2 = (u^2 - v^2 + B_1 B_2) \operatorname{ch} u \sin v + 2uv \operatorname{sh} u \cos v + (B_1 + B_2) (u \operatorname{sh} u \sin v + \\ + v \operatorname{ch} u \cos v)$$

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{2} \{ [p^2 + (2n/\nu)^2]^2 + \beta^2 (2n/\nu)^2 \}^{1/2} + p^2 + (2n/\nu)^2 \}^{1/2} \\ v = \frac{1}{2} \sqrt{2} \{ [p^2 + (2n/\nu)^2]^2 + \beta^2 (2n/\nu)^2 \}^{1/2} - p^2 - (2n/\nu)^2 \}^{1/2} \quad (4.12)$$

Функция $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ при $\beta \rightarrow \infty$ стремится к нулю, т. е. при большой скорости движения пятна температуры электрода определяется первым членом (4.7). Отличие от соответствующего выражения в п. 1 состоит в замене $\sin p\rho$ на $2J_1(p\rho)$, что обусловлено переменностью удельного теплового потока по ширине полосы, в которую выжигается круглое пятно с постоянным распределением удельного теплового потока.

В данном случае

$$q(z) = 4\pi^{-1} q_0 \sqrt{1 - (z/r_0)^2} \quad (4.13)$$

Величина q_0 определяется уравнением (0.1). Расчеты показывают, что величина $v\tau_\infty(0, 0)$ мало отличается от $v\tau(0, 0)$ в п. 1.

При больших значениях β (даже при умеренных скоростях движения пятна параметр β достаточно велик) выражение для ψ значительно упрощается. Можно показать, что на поверхности $\eta = 0$ в этом случае

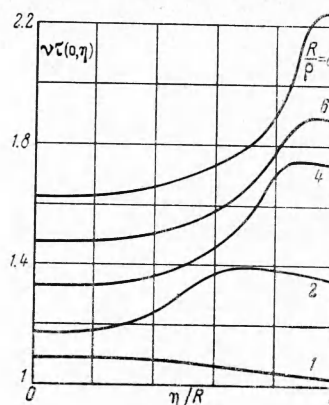
$$\begin{aligned} \psi(\xi, 0, \zeta) &\approx \psi_1(\xi, 0, \zeta) = \\ &= \frac{2\sqrt{v}}{\pi\rho\sqrt{\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\cos \frac{2n\xi}{v} - \sin \frac{2n\xi}{v} \right) \int_0^{\infty} \frac{\cos p\xi J_1[\rho\sqrt{p^2 + (2n/v)^2}] dp}{\sqrt{p^2 + (2n/v)^2}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь интеграл равен нулю вне полосы $|\zeta| \leq \rho$.

Следовательно, при больших β отличие температуры электрода с движущимся пятном от температуры, создаваемой размытым пятном, сосредоточено главным образом в области, по которой пробегает пятно. Подставляя значение интеграла, находим, что в полосе $|\zeta| \leq \rho$

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi, 0, \zeta) &= \\ &= \frac{v^{3/2}}{2\pi\rho^2\sqrt{\beta}} \left\{ a \left[\frac{2}{v} (\sqrt{\rho^2 - \zeta^2} - \xi); \frac{3}{2} \right] + \right. \\ &\quad + a \left[\frac{2}{v} (\sqrt{\rho^2 - \zeta^2} + \xi); \frac{3}{2} \right] - \\ &\quad - b \left[\frac{2}{v} (\sqrt{\rho^2 - \zeta^2} - \xi); \frac{3}{2} \right] + \\ &\quad \left. + b \left[\frac{2}{v} (\sqrt{\rho^2 - \zeta^2} + \xi); \frac{3}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$a(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^s}, \quad b(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^s}$$



Фиг. 6

В таблице даны значения $a = a(x, 3/2)$, $b = b(x, 3/2)$ для значений $X = 48x/\pi$, т. е. для значений x , кратных $\pi/48$, в диапазоне $0 \leq x \leq \pi$ (функции $a(x, s)$ и $b(x, s)$ — периодические с периодом 2π).

X	a	b	X	a	b	X	a	b
0	0	2.6124	17	1.0251	0.09756	33	0.5744	-0.5784
1	0.5457	1.9716	18	1.0073	0.03664	34	0.5385	-0.6029
2	0.7158	1.7073	19	0.9975	-0.02127	35	0.5021	-0.6256
3	0.8240	1.5057	20	0.9659	-0.07632	36	0.4652	-0.6456
4	0.9003	1.3369	21	0.9427	-0.1287	37	0.4280	-0.6656
5	0.9562	1.1896	22	0.9180	-0.1784	38	0.3903	-0.6830
6	0.9976	1.0576	23	0.8919	-0.2256	39	0.3522	-0.6987
7	1.0280	0.9376	24	0.8645	-0.2705	40	0.3138	-0.7128
8	1.0498	0.8271	25	0.8359	-0.3131	41	0.2752	-0.7251
9	1.0645	0.7246	26	0.8063	-0.3534	42	0.2363	-0.7358
10	1.0733	0.6291	27	0.7756	-0.3916	43	0.1972	-0.7448
14	1.0771	0.5395	28	0.7440	-0.4277	44	0.1580	-0.7521
12	1.0765	0.4552	29	0.7116	-0.4617	45	0.1186	-0.7578
13	1.0722	0.3757	30	0.6783	-0.4938	46	0.07914	-0.7619
14	1.0646	0.3005	31	0.6443	-0.5939	47	0.03958	-0.7643
15	1.0540	0.2292	32	0.6096	-0.5520	48	0	-0.7651
16	1.0407	0.1617						

Отметим, что $\psi_1(\xi, 0, \zeta)$ не зависит от интенсивности охлаждения и подвода тепла рабочей средой. Таким образом, уменьшение температуры электрода, избыточной по отношению к температуре, обусловленной размытым пятном, может быть осуществлено только увеличением скорости перемещения пятна. Уравнение (4.15) полу-

чае более простой вид при больших значениях ν , когда сумму можно заменить интегралом (при этом необходимо, чтобы $\beta \gg \nu$, так как в противном случае (4.14) не имеет места). Имея в виду, что величины $2n\nu$ при последовательных значениях n отстоят один от другого на приращение $2/\nu$, малое при больших ν , величину $2n/\nu$ можно обозначить как переменную интегрирования. Тогда (4.15) приближенно записывается в виде

$$\psi_1(\xi, 0, \zeta) \approx \psi_1^*(\xi, 0, \zeta) = \frac{\sqrt{2\nu}}{\pi\rho^2 \sqrt{\beta}} \int_0^\infty \frac{\cos t\xi - \sin t\xi}{t^{3/2}} \sin t \sqrt{\rho^2 - \zeta^2} dt \quad (4.16)$$

Интеграл в (4.16) равен нулю в области перед пятном, т. е. при больших величинах β и ν избыточная температура сосредоточена только в пятне и его следе. Можно показать, что в пределах пятна

$$\psi_1^*(\xi, 0, \zeta) = \frac{2\nu}{\sqrt{\pi} \rho^2 \sqrt{\beta}} (\sqrt{\rho^2 - \zeta^2} - \xi)^{1/2} \quad (4.17)$$

в следе ($\xi < -\sqrt{\rho^2 - \zeta^2}$)

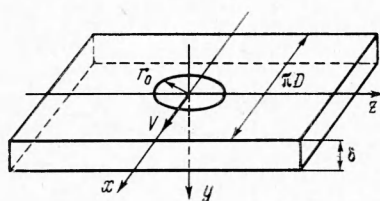
$$\psi_1^*(\xi, 0, \zeta) = \frac{2\nu}{\sqrt{\pi} \rho^2 \sqrt{\beta}} [(\sqrt{\rho^2 - \zeta^2} - \xi)^{1/2} - (-\xi - \sqrt{\rho^2 - \zeta^2})^{1/2}] \quad (4.18)$$

Максимальное значение ψ_1^* имеет место точно на задней кромке пятна на оси движения $\xi = -\rho$, $\zeta = 0$ и равно

$$\psi_{1\max}^* = \frac{2\sqrt{2\nu}}{\sqrt{\pi} \rho^{3/2} \sqrt{\beta}} \quad (4.19)$$

т. е. максимальное приращение температуры в движущемся пятне равно

$$\Delta T = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{Q}{\lambda r_0^{3/2}} \left(\sqrt{\frac{a}{V}} \right)^{1/2}$$



Фиг. 7

Вид функции $\psi_1^*(\xi, 0, \zeta)$ показан на фиг. 8.

Найдем значения ν , при которых возможно использование приближенных соотношений (4.17) и (4.18). Строго говоря, $\psi_1(\xi, 0, \zeta) = \psi_1^*(\xi, 0, \zeta)$ только при бесконечно большом ν . Если значение ν конечно, то перед пятном $\psi \neq 0$. Допустим, что величиной ψ перед пятном можно пренебречь, если она составляет ε от максимального значения ψ . Тогда абсолютное значение ξ , где на оси движения величина ψ_1^* равно ε от $\psi_{1\max}^*$, будет приближенно равно минимальному значению $(\nu - \rho)$, при котором (4.17) и (4.18) можно считать справедливыми.

Это значение ν_{\min} равно

$$\frac{\nu_{\min}}{\rho} = \frac{1}{2\pi} \frac{(1 + \varepsilon^2)^2}{\varepsilon^2} \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \quad (4.20)$$

Для приближенной оценки величины β , при которой ψ можно оценивать при помощи ψ_1 , рассмотрим второй член разложения ψ по малому параметру $1/\sqrt{\beta}$, ψ_2 , и найдем значения β , при которых им можно пренебречь. Получаем

$$\psi_2(\xi, 0, \zeta) = \frac{B_1\nu^2}{\pi\rho^2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{2n\xi}{\nu} \sin \left(\frac{2n}{\nu} \sqrt{\rho^2 - \zeta^2} \right) \quad (4.21)$$

перед пятном ($\sqrt{\rho^2 - \zeta^2} < \xi$)

$$\psi_2(\xi, 0, \zeta) = \frac{B_1\nu}{\rho^2\beta} \sqrt{\rho^2 - \zeta^2} \left(1 - \frac{2\xi}{\pi\nu} \right) \quad (4.22)$$

внутри пятна ($|\xi| \leq \sqrt{\rho^2 - \zeta^2}$)

$$\psi_2(\xi, 0, \zeta) = \frac{B_1\nu}{\rho^2\beta} \xi \left(1 - \frac{2}{\pi\nu} \sqrt{\rho^2 - \zeta^2} \right) \quad (4.23)$$

в следе ($\xi < -\sqrt{\rho^2 - \zeta^2}$)

$$\psi_2(\xi, 0, \zeta) = -\frac{B_1\nu}{\rho^2\beta} \sqrt{\rho^2 - \zeta^2} \left(1 + \frac{2\xi}{\pi\nu} \right) \quad (4.24)$$

Наибольшее значение ψ_2 имеет место на передней кромке пятна и равно

$$\psi_{2 \max} = \frac{B_1 v}{\rho \beta} \left(1 - \frac{2\rho}{\pi v} \right) \quad (4.25)$$

Следовательно, ψ_2 будет много меньше ψ_1 , если (учитывая (4.19) и предполагая $(2\rho/\pi v) \ll 1$)

$$\beta \gg 1/8\pi\rho B_1^2 \quad (4.26)$$

Видно, что ψ_2 так же, как и ψ_1 , не зависит от интенсивности охлаждения. Если конвективный тепловой поток к поверхности электрода, соприкасающейся с рабочей средой, мал, т. е. $B_1 \approx 0$, то для определения нижней границы значений β , при которых величину ψ можно оценивать через ψ_1 , необходимо исследовать третий член разложения ψ по параметру $1/\sqrt{\beta}$, ψ_3 , который зависит от B_2 . Считая $B_1 = 0$, можно оценить ψ_3 выражением (при больших v)

$$\psi_3 < \frac{5.2}{\pi} \frac{B_2^2 v^{3/2}}{\rho \beta^{3/2}} \quad (4.27)$$

Отсюда следует, что ψ_1 будет много больше ψ_3 , если

$$\beta \gg (2.6 / \sqrt{2\pi}) B_2^2 \sqrt{v\rho} \quad (4.28)$$

Величина ψ на поверхности электрода, соприкасающейся с охлаждающей средой, при больших β может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \psi(\xi, 1, \zeta) \approx \psi_1(\xi, 1, \zeta) &= \frac{8}{\pi\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos p\zeta J_1\{\rho[p^2 + (2n/v)^2]\} e^{-u}}{\sqrt{p^2 + (2n/v)^2} (u^2 + v^2)} \times \\ &\times \left[u \cos\left(v + \frac{2n\xi}{v}\right) - v \sin\left(v + \frac{2n\xi}{v}\right) \right] dp \end{aligned} \quad (4.29)$$

Величина $\psi_1(\xi, 1, \zeta)$ не зависит от B_1 и B_2 , т. е. основная доля температуры, избыточной по отношению к температуре, созданной размытым пятном, может быть снижена только увеличением скорости движения пятна. Оценка (4.28) показывает, что

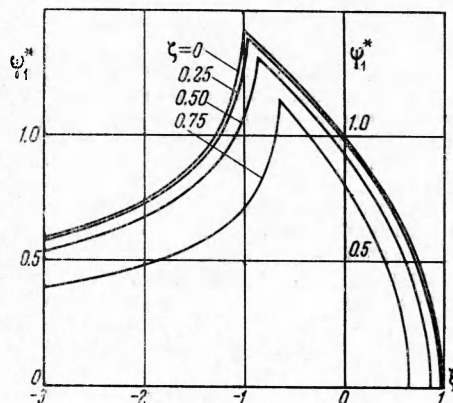
$$\psi_1(\xi, 1, \zeta) < \Psi_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{v}{\rho^2} \left(\frac{v}{\beta}\right)^{1/2} \exp\left[-\left(\frac{\beta}{v}\right)^{1/2}\right]. \quad (4.30)$$

Благодаря экспоненциальной зависимости Ψ_1 от $-\sqrt{\beta/v}$ эта величина обычно оказывается малой по сравнению с $v\tau_{\infty}(\xi, 1, \zeta)$.

Поступила 27 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыкалин Н. Н. Тепловые основы сварки. Изд-во АН СССР, 1947.
2. Лэй, Данкл. Распределение тепла от кругового источника. Теплопередача. Тр. Америк. об-ва инж.-мех. (русс. перев.), 1962, № 3, стр. 85.
3. Крылович В. И. О скорости движения дуги в электродуговом подогревателе. Инж.-физ. ж., 1963, № 1, стр. 114.
4. Крылович В. И. Температурное поле в охлажденном электроде электродугового подогревателя с неподвижной дугой. Инж.-физ. ж., 1963, № 3, стр. 81.
5. Крылович В. И. Температурное поле в электродуговом подогревателе с вращающейся дугой. Инж.-физ. ж., 1963, № 8, стр. 70.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. II. Физматгиз, 1958.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.



Фиг. 8