

МОДЕЛЬ ЯЧЕЙКИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

УДК 532.529.6

П. К. Волков

Институт теплофизики СО РАН, 630090 Новосибирск

Привлекательность модели ячейки состоит в уникальной простоте ее для описания чрезвычайно сложной задачи движения смеси жидкости с частицами или пузырями газа. Основное предположение, которое не вызывает сильных возражений в случае регулярного расположения одинаковых частиц или пузырей одного объема, например, равномерно одинаковыми слоями, состоит в том, что можно весь объем жидкости представить как совокупность отдельных маленьких объемов — ячеек, содержащих одну частицу или пузырь [1]. В этом случае задача определения движения двухфазной среды сводится к решению обычных (однофазных) уравнений гидродинамики в области заданной формы (со свободной поверхностью для пузыря). Проблема учета взаимодействия отдельных частиц между собой и с жидкостью, которая является главной при написании уравнений движения двухфазной среды, трансформируется в задачу постановки краевых условий на внешней границе ячейки, учитывающих присутствие окружающих частиц (пузырей), и оказывается существенно легче по обоснованию и по реализации. Решение полученной задачи дает полное описание внутренней динамики однородной двухфазной среды: скорости всплытия частиц (пузырей), распределения скорости жидкости в ячейке, а значит, и в смеси вообще. Этой информации достаточно для решения практически важных задач распространения тепла или примеси в двухфазной среде, поиска оптимальных размеров частиц (пузырей) и плотности их в смеси, интенсифицирующих диффузионные процессы во всем объеме. Влияние краевых эффектов от ограничивающих смесь поверхностей в данной работе не рассматривается.

1. Постановка задачи. Удачный выбор формы ячейки определяет точность моделирования динамики двухфазной среды. Из физического представления о ячейке следует, что малые изменения внешней формы от выбранной не должны существенно менять гидродинамические характеристики на пузыре или частице. Эта предпосылка является основной при выборе формы внешней границы ячейки. Для простоты будем изучать двухфазную среду со слоистым расположением пузырей одного объема.

Рассмотрим два случая: а) слои пузырей расположены на расстоянии $2l$, пузыри (точки на рис. 1, а) в слое расположены равномерно в вершинах правильного треугольника, таким образом, каждый пузырь окружен шестью другими; в качестве ячейки можно взять прямую призму высотой $2l$ с правильным шестиугольником в основании и пузырем внутри, с центром на середине оси, проходящей через центры оснований; б) слои пузырей расположены на расстоянии l , пузыри в пространстве образуют шахматную упаковку (рис. 1, б), и каждый окружен шестью другими по двум уровням выше и ниже его центра; в качестве ячейки можно взять четырнадцатигранник с правильными шестиугольниками.

Случаи а и б характеризуют соответственно наибольшую и наименьшую стесненность в упаковке, поскольку переток жидкости, в результате которого происходит всплытие, в случае а осуществляется через меньшее сечение между соседними пузырями.

Сформулируем физические условия на границе ячейки, учитывающие присутствие окружающих пузырей. На верхнем и нижнем основании характеристики должны быть одинаковыми (условия периодичности), на боковой поверхности нет перетоков и отсутствует трение.

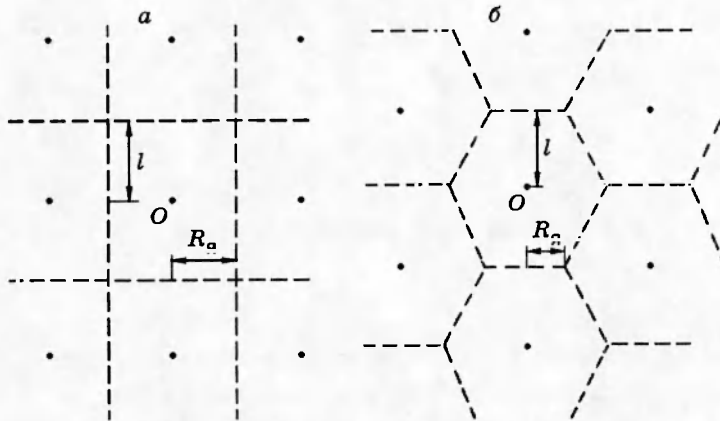


Рис. 1

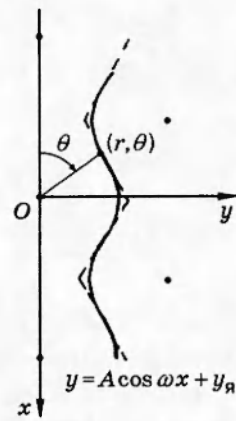


Рис. 2

Рассмотренные выше формы ячеек являются приближенными. Использование их для расчета конкретных задач приводит к необходимости решения полных трехмерных уравнений Навье — Стокса со свободной поверхностью, что и в настоящее время, несмотря на имеющиеся разнообразные методы расчета этих уравнений, является проблемой далеко не тривиальной. Поскольку трехмерность обусловлена в данном случае формой внешней границы ячейки, а из физического представления о ячейке следует, что это достаточно устойчивое образование, то известная процедура сноса краевых условий с внешней границы ячейки на заданную поверхность является обоснованной. В качестве таких поверхностей будем использовать поверхности вращения, что позволит осуществить переход от трехмерных уравнений к двумерным. В пользу последнего говорит имеющаяся в задаче симметрия в расположении пузырей в слое.

Математическое описание удобнее проводить в системе координат, связанной с каким-нибудь пузырем. В этом случае пузыри (и ячейки) покоятся, а жидкость протекает между ними. Введем сферическую систему координат (r, θ) с началом в центре масс пузыря. Уравнения Навье — Стокса, описывающие движение вязкой несжимаемой жидкости, в терминах функция тока ψ — вихрь ω имеют вид [2]

$$D^2\psi = -2r \sin \theta \omega; \quad (1.1)$$

$$D^2\omega = \frac{1}{\nu r^2 \sin \theta} \left[\psi_\theta \omega_r - \psi_r \omega_\theta - \frac{\omega}{r} \psi_\theta + \omega \operatorname{ctg} \theta \psi_r \right] - \frac{2}{r} \omega_r + \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \omega_\theta, \quad (1.2)$$

где

$$D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

— оператор Стокса; индексы θ, r обозначают частные производные от соответствующих функций по этим переменным; ν — коэффициент кинематической вязкости.

На свободной границе пузыря Γ ($F(r, \theta) = r - R(\theta) = 0, \theta \in [0, \pi]$) должны быть выполнены кинематическое и динамические условия:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla F = 0; \quad (1.3)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0; \quad (1.4)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \sigma K - p_\Gamma. \quad (1.5)$$

Здесь

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{1+(R'/R)^2}} \{1, -R'/R\}, \quad \boldsymbol{\tau} = -\frac{1}{\sqrt{1+(R'/R)^2}} \{R'/R, 1\}$$

— единичные векторы нормали и касательной Γ ;

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

— компоненты вектора скорости \mathbf{v} ; p_Γ — давление газа в пузыре ($p_\Gamma \equiv \text{const}$); \mathbf{T} — тензор напряжений; K — кривизна Γ ; σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Из условия (1.4)

$$\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{R'}{R} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{R'}{R} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) = 0$$

с учетом определения вихря

$$\omega = -\frac{1}{2r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta - r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)$$

и кинематического условия (1.3) получим

$$\omega - \frac{v_\theta (1 + 2(R'/R)^2 - R''/R)}{1 + (R'/R)^2} = 0. \quad (1.6)$$

Проведя аналогичные выкладки, имеем

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -p + 2\rho\nu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{R'}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{R'}{R} \omega \right).$$

Заменяя v_r , v_θ , окончательно из (1.3)–(1.6) находим

$$\psi(R(\theta), \theta) = 0; \quad (1.7)$$

$$\omega + \frac{\psi_r}{R^2 \sin \theta} \frac{1 + 2(R'/R)^2 - R''/R}{1 + (R'/R)^2} = 0; \quad (1.8)$$

$$-q + \rho g R \cos \theta + 2\rho\nu \left[\frac{\psi_{\theta r} - \psi_\theta/R + R'\psi_{rr}}{R^2 \sin \theta} + \frac{R'}{R} \omega \right] = p_\infty - p_\Gamma + \sigma K, \quad (1.9)$$

где

$$K = \frac{R^2 + 2R'^2 - RR''}{(R^2 + R'^2)^{3/2}} + \frac{|R' \cos \theta - R \sin \theta|}{R \sin \theta (R^2 + R'^2)^{1/2}};$$

штрихи у функции $R(\theta)$ — дифференцирование по θ ; q — обобщенное давление: $q = p + \rho g R \cos \theta - p_\infty$; p — давление; p_∞ — давление на внешней границе ячейки на уровне пузыря; g — ускорение силы тяжести; ρ — плотность жидкости.

Аналогично [3] можно показать, что условия периодичности в терминах функция тока ψ — вихрь ω , отражающие тот факт, что значения функций скорости и их производных по нормали к границам Γ_1 и Γ_2 совпадают, имеют вид (Γ_1, Γ_2 — основания ячейки, x — направление всплытия)

$$\psi|_{\Gamma_1} = \psi|_{\Gamma_2}, \quad \partial\psi/\partial x|_{\Gamma_1} = \partial\psi/\partial x|_{\Gamma_2}, \quad \omega|_{\Gamma_1} = \omega|_{\Gamma_2}, \quad \partial\omega/\partial x|_{\Gamma_1} = \partial\omega/\partial x|_{\Gamma_2}. \quad (1.10)$$

Условие непротекания на боковой поверхности ячейки дает $\psi = 0$ в системе координат неподвижной жидкости, так как нет суммарного расхода жидкости через сечение, где нет

пузыря. В системе координат пузыря на поле течения наложено поступательное движение со скоростью $-U$, которое в сферических координатах (r, θ) описывается функцией

$$\psi = -Ur^2 \sin^2 \theta / 2. \quad (1.11)$$

Поскольку условия на границе ячейки идентичны условиям на свободной поверхности, то выражения для вихря ω можно взять из (1.8), где под $R(\theta)$ следует понимать функцию боковой поверхности.

На оси симметрии $\theta = 0, \pi$ имеем

$$\psi = \omega = 0. \quad (1.12)$$

Алгоритм решения краевой задачи (1.1)–(1.12) практически не отличается от изложенного в [2]. Способ реализации условий периодичности (1.10) содержится в [4]. Метод решения краевой задачи в ячейке заданной формы обсуждался в [5].

Данная работа посвящена проблеме выбора формы расчетной ячейки и анализу результатов, полученных для разных упаковок пузырей с одним и тем же объемным газосодержанием.

2. Выбор формы расчетной ячейки. В случае а на рис. 1 форма расчетной ячейки очевидна — цилиндр высотой $2l$ ($R_{\text{я}}$ — радиус основания ячейки). Поскольку уравнение образующей поверхности $r = R_{\text{я}} / \sin \theta$, для функции тока в (1.11) получим константу $\psi = -UR_{\text{я}}^2/2$, а значит, боковая поверхность расчетной ячейки — поверхность уровня функции тока. Для других конфигураций ячеек форму боковой поверхности можно выбирать по-разному.

В качестве боковой поверхности ячейки можно взять часть сферы радиуса $R_c = \sqrt{R_{\text{я}}^2 + l^2}$, замыкающей верхнее и нижнее основание ячейки. Это удобно, поскольку $R_c = \text{const}$ и производные от функции границы, входящие в преобразованные уравнения движения, равны нулю.

Учитывая симметрию и периодичность в расположении пузырей в упаковке, в качестве границы расчетной ячейки можно выбрать поверхность, полученную вращением линии (рис. 2):

$$y = A \cos \omega x + y_{\text{я}}. \quad (2.1)$$

Здесь $\omega = \pi l$; $y_{\text{я}} = R_{\text{я}} + A$; A — параметр ячейки.

Эти три типа ячеек далее будут использоваться в расчетах. Чтобы сравнения были корректными, параметры каждой из ячеек должны быть подобраны. Так как в алгоритме решения уравнений движения объем пузыря остается неизменным [2], то в качестве критерия выбора параметров возьмем равенство объемов расчетных ячеек. В качестве исходного примем данные из [5] для цилиндрической ячейки $l = 3$, $R_{\text{я}} = 3$. Поскольку безразмерный радиус пузыря равен 2, то объемное газосодержание равно 0,2.

Таким образом, для ячейки с поверхностью сферы получим $R_c \simeq 3,46$, $R_{\text{я}} = \sqrt{3}$, для ячеек третьего типа $R_{\text{я}} = (3 + 2l^2/3 - A^2)^{1/2} - A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для проведения расчетов необходимо иметь описание границы ячейки функцией типа $r = G(\theta)$ и знать первую и вторую производные от $G(\theta)$. Для ячеек первых двух типов они выписываются аналитически. В третьем случае $G(\theta)$ определяется методом деления отрезка пополам, как корень трансцендентного уравнения относительно переменной r при заданном θ :

$$r \sin \theta = y_{\text{я}} + A \cos(\omega r \cos \theta). \quad (2.2)$$

Производные находятся дифференцированием (2.2) с использованием полученных значений r :

$$G'(\theta) = (A \sin(\omega r \cos \theta) \omega r \sin \theta - r \cos \theta) / (A \sin(\omega r \cos \theta) \omega \sin \theta + \sin \theta) \quad \text{и т. д.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Алгоритм численного решения [2] содержит замену переменных, которая переводит область течения с неизвестной границей (пузырь) в четырехугольник со сторонами, параллельными координатным линиям, вследствие чего в уравнениях появляются первые и вторые производные от функций, описывающих границы области течения. Если эти функции негладкие, как в углах рассматриваемых форм ячеек, то производные в углах терпят разрыв, который распространяется на линию в расчетной области. Поэтому требуется дополнительное тщательное тестирование влияния разрывов в коэффициентах уравнений на результаты расчетов. Лучше всего тестировать углы на задаче обтекания сферического пузыря, когда в преобразованных уравнениях имеются производные только от функции внешней границы.

Уменьшить влияние углов на численное решение можно, если вместо явного преобразования координат использовать криволинейные сетки [6]. В данном случае уравнения движения записываются для произвольной криволинейной системы координат, а сама система координат строится как решение другой эллиптической задачи. В силу этого влияние углов локализуется.

Простейшей реализацией указанного подхода, позволяющей проследить собственно влияние разрывов в коэффициентах уравнений на решение, является метод трансфинитной интерполяции [7], использованный для задач со свободной поверхностью [8] в модели идеальной жидкости. Если $r = G(\theta)$ — уравнение внешней границы ячейки, $r = R(\theta)$ — уравнение пузыря ($\theta \in [0, \pi]$), то в области течения криволинейные координаты вводятся по формулам

$$r(\xi, \eta) = (1 - \eta)G(\xi) + \eta R_{\pi}(\xi), \quad \theta(\xi, \eta) = (1 - \eta)\pi\xi + \eta G_{\pi}(\xi), \quad (\xi, \eta) \in [0, 1],$$

где $r = R_{\pi}(\xi)$; $\theta = G_{\pi}(\xi)$ — параметрическое представление функции $r = R(\theta)$. При $G_{\pi}(\xi) = \pi\xi$ метод трансфинитной интерполяции тождественен замене переменных [2]. В результате прямого сравнения решений, полученных по этим двум методам, выясняются область доверия расчетов и относительная степень влияния разрыва коэффициентов уравнений на численное решение.

Использование сеток позволило рассчитывать задачи, которые ранее невозможно было решить [5]. Более того, выявлено сильное влияние на решение гладких границ области течения, если она описывается функцией, имеющей большие перепады (область течения вытянута в одном направлении).

3. Гидродинамика в ячейках выбранных форм. Математическая модель, описывающая течения вязкой жидкости со свободной поверхностью в области заданной формы, содержит большое количество входных констант, характеризующих как физические свойства среды, так и геометрию области течения. Моделирование задач стационарного всплытия пузырей вводит в модель константу — скорость всплытия U , которая заранее не известна. Процедуры обезразмеривания, как правило, используют U в качестве характерной скорости, и в итоге в уравнениях появляется набор безразмерных комплексов, которые не все независимые. Это приводит к тому, что только после решения задачи можно определить, какой конкретно среде и объему пузыря отвечают полученные данные. Поэтому, чтобы сравнение результатов для разных форм ячеек было корректным, необходимо следить, чтобы численные решения соответствовали одной и той же среде и линейному размеру пузыря.

Здесь, как и в [5], в качестве характеристики среды используется $M = \rho^3 \nu^4 g / \sigma^3 = We^3 / Fr Re^4$, а в качестве линейного размера — капиллярная постоянная Лапласа $\delta_{\sigma} = (\sigma / \rho g)^{1/2}$. Всюду ниже решения отвечают $M \simeq 2 \cdot 10^{-6}$ и трем значениям величины $R_{\sigma} = a / \delta_{\sigma}$ ($a = (3V/4\pi)^{1/3}$, V — объем пузыря): $R_{\sigma} = 0,1; 0,5; 1,0$. Значения чисел Рейнольдса $Re = U2a/\nu$ и Вебера $We = \rho U^2 2a/\sigma$, при которых получено решение для данного M (число Фруда $Fr = U^2/ga$ — определяемый параметр), приводятся ниже.

Таблица 1

R_σ	Fr	Re	We	J	V_m
0,1	0,14	0,64	0,001	20,4	1,0
0,5	4,05	40	2,08	21,1	1,14
1,0	1,75	72	3,52	23,0	1,56

Расчеты для ячейки с боковой поверхностью сферы. В табл. 1 представлены данные для трех размеров пузыря в ячейке с одним и тем же значением величин: $R_x = \sqrt{3}$, $R_c = 3,46$ (J — диффузия примеси от пузыря [5], V_m — максимальная скорость жидкости на пузыре).

Характерная картина течения показана на рис. 3 ($R_\sigma = 1$, сплошные линии — изолинии функции тока, штрихи — векторы скорости жидкости по сечениям). При $R_\sigma = 0,1$ пузырь сферический, при $R_\sigma = 0,5$ слегка сплюснутый. Для $R_\sigma = 0,1; 0,5$ значения Fr существенно больше значений Fr для пузыря в одиночной вертикальной цепочке с тем же расстоянием между центрами пузырей, т. е. присутствие окружающих с боков пузырей приводит к увеличению скорости всплытия, что трудно объяснить физически. Расчеты для других R_x и R_c (но для того же объема ячейки) дают существенные различия в значениях Fr.

Таким образом, можно сделать вывод, что выбор в качестве боковой поверхности ячейки части сферы является неудачным.

Расчеты для ячейки с боковой поверхностью, описываемой формулой (2.1). Для амплитуды $A = 1; 0,75; 0,5; 0,25$ проведены серии расчетов соответственно с $R_x = 1,43; 2,15; 2,46; 2,74$ (объем ячеек один и тот же), приведенные в табл. 2.

Сравнительный анализ значений Fr, Re, We, J , V_m при одинаковых \tilde{h}_σ показывает их небольшой разброс для $R_\sigma \geq 0,5$. Значения Fr всюду меньше, чем для случая одиночной цепочки пузырей с тем же l . Для пузырей с $R_\sigma \leq 1$ течения еще безотрывные, но $R_\sigma = 1$, видимо, является критическим: в кормовой части пузыря практически имеется застойная зона (рис. 4 соответствует $N = 1$ в табл. 2), а для $\tilde{h}_\sigma = 1,1$ уже имеется отрыв, который заполняет пространство между пузырями у оси. На рис. 5 представлена картина течения для $N = 3$, $R_\sigma = 1$, полученная стыкованием нескольких рисунков одной и той же ячейки по вертикали (условие симметрии) и сбоку (функция косинус-периодическая, наложение без просветов). Штриховыми линиями показаны границы ячеек.

Картина течения для $Re = 48$, $We = 1,6$ ($N = 4$, $R_\sigma = 1$) близка к приведенной на рис. 5. Линия границы ячейки практически повторяет форму последней изолинии функ-

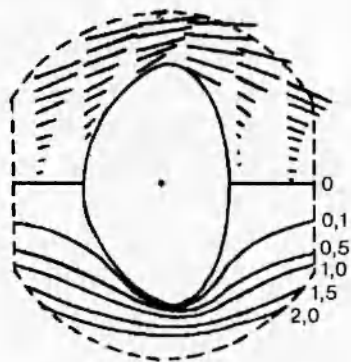


Рис. 3

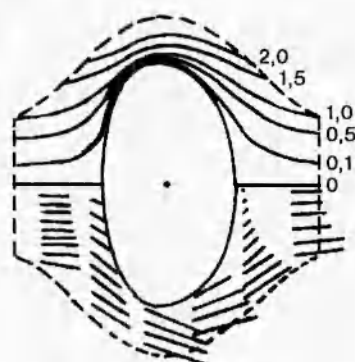


Рис. 4

Таблица 2

N	A	R_σ	Fr	Re	We	J	V_m	R_σ
1	1,0	1,43	0,04	0,34	0,001	22,7	1,27	0,1
			0,91	18	0,48	24,6	1,53	0,5
			0,69	45	1,4	29,7	2,12	1,0
2	0,75	2,15	0,026	0,28	0,001	21,6	1,12	0,1
			0,89	18	0,44	23,5	1,4	0,5
			0,85	50	1,72	27,4	1,84	1,0
3	0,5	2,46	0,19	0,24	0,001	22,3	1,11	0,1
			0,9	18	0,44	23,5	1,39	0,5
			0,86	50	1,72	26,7	1,87	1,0
			0,44	80	2,0	32,0	2,7	1,6
4	0,25	2,74	0,011	0,18	0,001	23,2	1,25	0,1
			0,84	18	0,44	23,8	1,45	0,5
			0,79	48	1,6	26,3	2,01	1,0
			0,47	70	2,04	31,1	2,6	1,5

ции тока. Это обстоятельство, видимо, является наиболее важным и позволяет остановить выбор на данной форме ячейки, в пользу чего указывают и распределения скорости на пузыре. Так, для $N = 1$ и 2 при $R_\sigma \leq 0,5$ профили имеют двугорбый вид с локальным минимумом в области экватора пузыря, при $N = 3$ — также двугорбый вид (но с небольшой амплитудой между величинами локальных максимумов и минимумов) только при $R_\sigma = 0,1$. Для $N = 4$ профили скорости при всех R_σ имеют вид колокола с максимумом в области экватора пузыря.

Таким образом, при заданных соотношениях объемов пузыря и ячейки, расстояниях между пузырями по вертикали и горизонтали и значениях гидродинамических параметров в качестве ячейки для расчетов локальных характеристик двухфазной среды следует выбрать форму, отвечающую данным $N = 4$ в табл. 2.

4. Динамика жидкости в ячейке двухфазной среды. Расчеты для $N = 4$ (табл. 2) при заданном R_σ дают представление о движении жидкости в ячейке, а значит, и в двухфазной среде, состоящей из пузырей одного объема. Увеличение R_σ соответствует смесям жидкости с большими пузырями. Поскольку данные приведены для среды с $M = 2 \cdot 10^{-6}$, а обезразмеривание проведено по скорости всплытия пузыря U , то отношение скоростей всплытия пузырей для двух смесей, обозначенных индексами 1 и 2, имеет вид

$$U_1/U_2 = (Fr_1 R_{\sigma 1} / Fr_2 R_{\sigma 2})^{1/2}.$$

Для $N = 4$ получим

$$U_{0,1}/U_{0,5} \simeq 0,05, \quad U_{0,5}/U_{1,0} \simeq 0,73, \quad U_{1,0}/U_{1,5} \simeq 1,06. \quad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что наибольшую скорость всплытия имеют пузыри радиуса, равного капиллярной постоянной. При этом обтекание еще безотрывное, как на рис. 5. На пузырях большего размера имеется отрыв, между ними у оси образуется застойная зона (рис. 6). Таким образом, всплывают пузыри и часть жидкости между ними. Это и приводит к падению скорости всплытия. На рис. 7 представлены графики скорости жидкости u на пузыре: кривая 1 соответствует $R_\sigma = 0,1$ (сферический пузырь, stokсово течение), 2 — $R_\sigma = 0,5$ (пузырь сплюснен ($\chi \simeq 1,1$), появилась небольшая несимметрия в графике), 3 — $R_\sigma = 1,0$ (в кормовой части имеется застойная зона, но отрыва еще нет), 4 — $R_\sigma = 1,48$

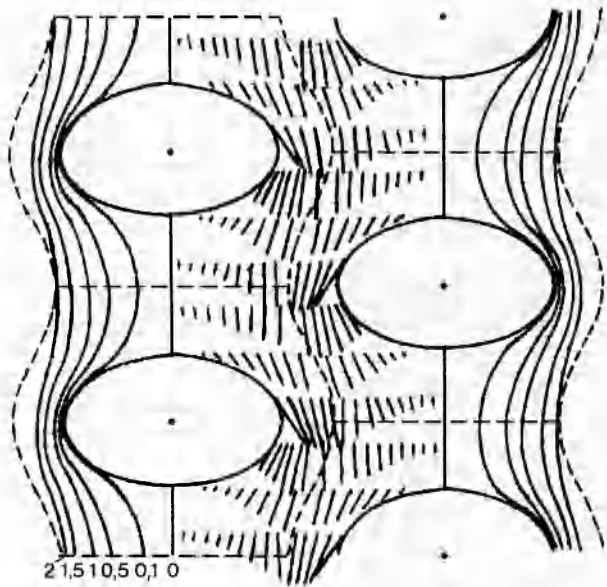


Рис. 5

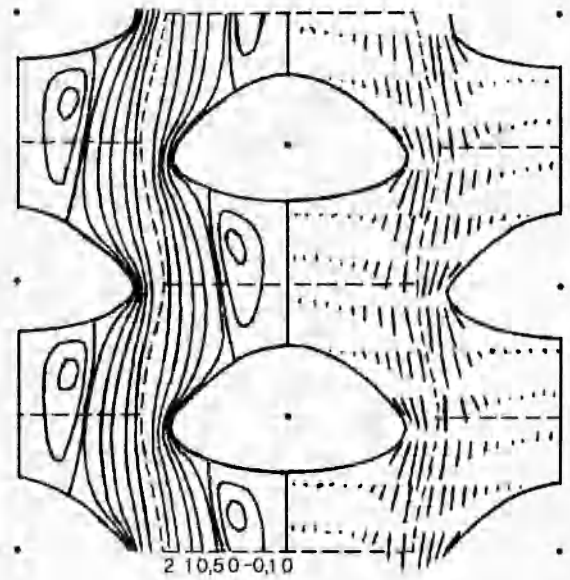


Рис. 6

(в области лобовых точек есть возвратные течения).

На рис. 8 приведены графики j (локального диффузионного потока примеси от поверхности пузыря [5]), соответствующие указанным выше значениям R_σ . На сферических и слабдеформированных пузырях максимум находится в области передней лобовой точки, где жидкость натекает и имеется наиболее тонкий пограничный слой (стоксово течение). По мере деформирования пузыря точка максимума сдвигается к экватору, где максимальная скорость. В табл. 2 представлена суммарная диффузия J от пузыря. Область экватора при наличии отрывных зон дает основной вклад 26,86, а носовая и кормовая области — 1,35 и 2,91.

По данным табл. 2 можно оценить суммарную диффузию от систем пузырей применительно к задаче барботажу пузырей через слой жидкости за единицу времени. Действительно, суммарная диффузия в объем пропорциональна числу пузырей n . Тогда для двух систем с разными пузырями отношение суммарных диффузий \bar{J} имеет вид [5]

$$\bar{J}_1/\bar{J}_2 = (a_1 U_1/a_2 U_2)^{1/2} (J_1/J_2)(n_1/n_2)(U_1/U_2). \quad (4.2)$$

Первые два множителя дают отношения диффузионных потоков от единичного пузыря систем, третий — отношение их количеств в рассматриваемом объеме, четвертый — отношение скоростей всплытия.

Для четырех случаев из (4.2) получим

$$\bar{J}_{0,1}/\bar{J}_{0,5} \simeq 0,62, \quad \bar{J}_{0,5}/\bar{J}_{1,0} \simeq 3,2, \quad \bar{J}_{1,0}/\bar{J}_{1,5} \simeq 2,5. \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует, что система с пузырями радиуса 0,5 капиллярной постоянной имеет наибольшую суммарную диффузию примеси от пузырьков в жидкость в случае барботажу их через объем жидкости за единицу времени.

5. Сравнение решений для двух типов ячеек. Динамика жидкости в цилиндрической ячейке (упаковка, как на рис. 1,а) в целом имеет те же закономерности, что и описанные в п. 4. Так, отношение скоростей всплытия для разных R_σ такое же, как в (4.1). Отрыв потока на пузыре уже есть при $R_\sigma = 1$ (но при $R_\sigma = 0,9$ отрыва еще нет). Сравнение скоростей всплытия для разных типов ячеек при $R_\sigma = 0,1; 0,5; 1,0; 1,5$ соответственно дает $U_\delta/U_a = 1,2; 1,2; 1,16; 1,13$. Таким образом, с появлением развитого вихревого следа

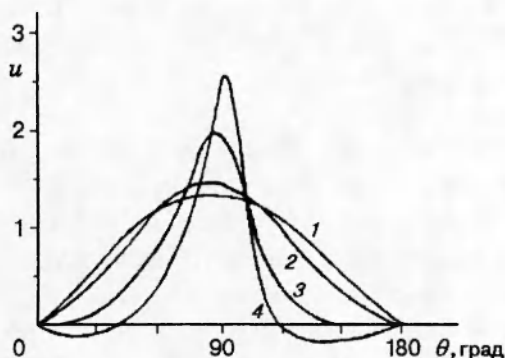


Рис. 7

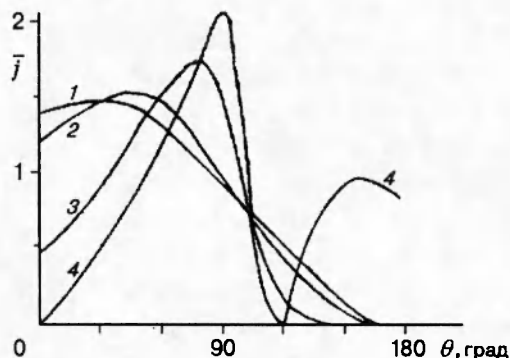


Рис. 8

уменьшается различие в скорости всплытия пузырей.

На рис. 9 представлена картина течения для $R_\sigma = 1,44$ ($Fr = 0,37$, $Re = 60$, $We = 1,56$, $J = 34$, $V_m = 3,06$). Рис. 6 и 9 отвечают одной среде с очень малым различием в размере пузырей. Форма пузырей и степень деформации ($\chi \approx 1,7$) практически одинаковы.

Вывод об эффективности смеси с пузырями при $R_\sigma = 0,5$ по диффузии примеси применительно к барботажу газовых пузырей через объем жидкости также остается справедливым.

Учитывая вышесказанное и тот факт, что переход к осесимметричной задаче сужает примерно на 10% площадь основания ячейки, что наибольшим образом отражается на цилиндрической ячейке (в плане уменьшения скорости всплытия), с большим основанием можно говорить о практически одинаковых скоростях всплытия пузырей в смеси. Здесь важно требование равномерной распределенности их в жидкости, что определяет геометрию ячейки и объемное газосодержание.

Задание только среднего объемного газосодержания без учета размера пузырьков недостаточно для однозначного определения типа течения, скорости всплытия пузырей и других интегральных характеристик.

6. Заключение. Рассмотренные в работе два типа ячеек переходят один в другой при перемещении по вертикали одной вертикальной цепочки пузырей относительно шести других, окружающих ее. Однако при таком расположении пузырей область разбивается на ячейки, не являющиеся полностью равноправными. Если рассмотреть соседний пузырь из

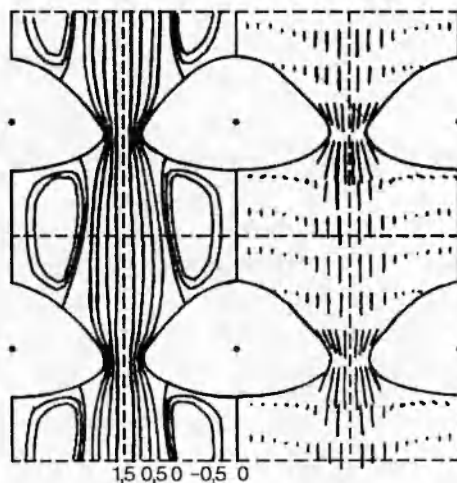


Рис. 9

числа окружающих (рис. 1, б), то получим вокруг него такую упаковку: на его уровне и на уровнях на l выше и ниже находятся по три пузыря. Причем последние повернуты на 120° , так что если смотреть сверху, то будет снова правильный шестиугольник из пузырей. Тем не менее в качестве ячейки можно рассматривать такую же.

Полученные численные данные позволяют предполагать, что в ячейках одного объема, имеющих одинаковую высоту, интегральные характеристики у пузыря одинаковые. В качестве ячейки можно рассматривать прямой цилиндр. Если диаметр ячейки больше ее высоты, то влияние на скорость всплытия от окружающих пузырей в горизонтальном слое будет меньшим, чем от пузырей в вертикальной цепочке. Причем для ячеек с радиусом, составляющим 4–5 радиусов пузыря, практически будем иметь всплывающую цепочку. Для ячеек с радиусом менее 2 радиусов пузыря скорость всплытия пузыря слабо зависит от высоты ячейки.

Для более точного определения характеристик двухфазной среды достаточно выяснить линейные размеры цилиндрической ячейки и провести расчеты, учитывая параметр M среды и объем пузыря.

Наличие максимума в скорости всплытия пузыря в зависимости от его объема связано с отрывом потока и появлением застойной зоны за пузырем. Подъемная сила тратится на перемещение части жидкости вместе с пузырем.

Экстремальные свойства диффузии примеси от пузыря обусловлены непропорциональным уменьшением скорости всплытия при уменьшении размера пузырей по сравнению с ростом числа их при заданном объемном газосодержании.

Получить стационарные решения для больших R_σ не удалось. Граница пузыря совершает волнообразные колебания, и итерационный процесс не сходится.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00879а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики многофазных сред. М.: Наука, 1978.
2. Волков П. К. Всплывание газового пузыря в трубе, заполненной вязкой жидкостью // ПМТФ. 1989. № 6. С. 98–105.
3. Сироченко В. П. Численное решение одной задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в двусвязной области // Численные методы механики сплошной среды. 1977. Т. 8, № 1. С. 119–134.
4. Волков П. К. Движение цепочки пузырей в вертикальном канале с вязкой жидкостью // ПМТФ. 1991. № 3. С. 87–91.
5. Волков П. К., Гешев П. И. Гидродинамика и диффузия примеси в ячейке двухфазной среды // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 6. С. 68–76.
6. Годунов С. К., Прокопов Г. П. О решении дифференциальных уравнений с использованием криволинейных разностных сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1968. Т. 8, № 1. С. 28–46.
7. Thompson J. F., Warsi Z. U. A., Mastin C. W. Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations — A Review // J. Comp. Phys. 1982. V. 47, N 1. P. 1–108.
8. Волков П. К., Христов Х. И. Численное моделирование всплытия пузырей в жидкости // Вычисл. технологии. 1993. Т. 2, № 5. С. 61–76.

Поступила в редакцию 14/VIII 1995 г.,
в окончательном варианте — 2/X 1995 г.