УДК 539.374 + 517.97

А. М. Хлуднев

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ОДНОМЕРНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Работа посвящена исследованию задачи оптимального управления начальными данными в одномерных упругопластических моделях. Рассматриваются динамические упругопластические задачи для стержня и цилиндрической оболочки при осевой симметрии. Требуется выбрать начальные данные таким образом, чтобы значение решения. в некоторый фиксированный момент времени как можно меньше отличалось от заданной величины. Доказано существование решения сформулированной задачи. Построены семейства вспомогательных задач, и установлены результаты о сходимости решений.

В динамических задачах в качестве функций управления могут выступать, в частности, начальные данные. Изучению задач оптимального управления в теории упругости посвящен целый ряд работ (см., например, [1,2] и указанную там библиографию). Что же касается упругопластических задач, то отсутствие аналогичных результатов объясняется трудностью в обосновании корректности исходной модели [3]. В настоящей работе приведены возможные постановки динамических упругопластических задач оптимального управления. Найдены условия на внешние данные и начальные условия, при которых задача оптимального управления имеет решение.

1. Формулировка задачи об упругоипластическом деформировании стержня состоит в следующем [4—6]. В области $Q = (a, b) \times (0, T)$ требуется найти функции u, w, n, m, ξ_1, ξ_2, удовлетворяющие соотношениям

$$u_t - n_x = f_1,\ w_t - m_{xx} = f_2; \tag{1.1}$$

$$u_x = n_t + \xi_1,\ -w_{xx} = m_t + \xi_2; \tag{1.2}$$

$$\Phi(n, m) \leqslant 0; \tag{1.3}$$

$$\xi_1(\bar{n} - n) + \xi_2(\bar{m} - m) \leqslant 0\ \forall(\bar{n}, \bar{m}),\ \Phi(\bar{n}, \bar{m}) \leqslant 0; \tag{1.4}$$

$$u = u_0,\ w = w_0,\ n = n_0,\ m = m_0 \text{ при } t = 0; \tag{1.5}$$

$$n = m = m_x = 0 \text{ при } x = a,\ b. \tag{1.6}$$

Здесь Φ: $R^2 \to R$ — заданная выпуклая и непрерывная функция, характеризующая переход в пластическое состояние; f_1, f_2 — внешние силы; u, w — тангенциальная и нормальная скорости точек стержня; n, m — усилие и изгибающий момент соответственно; индексы t и x означают дифференцирование. При этом (1.1) — уравнения движения; соотношения (1.2) дают представление скоростей деформаций и кривизн в виде суммы упругой и пластической составляющих; (1.3) означает, что искомые величины n, m не выходят за пределы поверхности текучести $\Phi(n, m) = 0$; неравенство (1.4) дает направление вектора (ξ_1, ξ_2) по отношению к поверхности текучести и отвечает принципу максимума мощности диссипации.

Сначала введем ряд обозначений, а затем сформулируем задачу оптимального управления начальными данными. Пусть $H(a, b) = H^1(a, b) \times H^2(a, b) \times H_0^1(a, b) \times H_0^2(a, b)$ ($H^s(a, b)$ и $H_0^s(a, b)$ — пространства Соболева), $K = \{(n, m) | n, m \in L^2(a, b), \Phi(n(x), m(x)) \leqslant 0\}$ — множество допустимых моментов и усилий, $W = \{(n, m) | n \in H_0^1(a, b),\ m \in H_0^2(a, b)\}$.

Можно доказать (см. [7]), что если $(0, 0) \in K$, f_i, $f_{it} \in L^2(Q)$, $V_0 = (u_0, w_0, n_0, m_0) \in H(a, b)$, $(n_0, m_0) \in K$, то существуют и притом единственные функции u, w, n, m, удовлетворяющие уравнениям (1.1), начальным условиям (1.5) и неравенству

$$[n_t, \bar{n} - n] + [m_t, \bar{m} - m] + [w, \bar{m}_{xx} - m_{xx}] + [u, \bar{n}_x - n_x] \geqslant 0 \tag{1.7}$$
$$\forall(\bar{n}, \bar{m}) \in L^2(0, T; K \cap W).$$

Причем $(n(t), m(t))$ не выходит за пределы поверхности текучести: $(n(t), m(t)) \in K$ почти всюду на $(0, T)$. Здесь $[\cdot, \cdot]$ — скалярное произведение в $L^2(Q)$. Неравенство (1.7) получено из (1.2) и (1.4) путем исключения ξ_1, ξ_2 и интегрирования по частям с учетом граничных условий (1.6).

Задача оптимального управления начальными данными формулируется следующим образом. Пусть задано выпуклое замкнутое и ограниченное множество $U \subset H(a, b)$ такое, что если $V_0 = (u_0, w_0, n_0, m_0) \in U$, то $(n_0, m_0) \in K$. Норму в пространствах $L^2(a, b)$ и $[L^2(a, b)]^4$ обозначим $||\cdot||_0$, а решение $V \equiv (u, w, n, m)$ в момент времени T — через $V(T)$. Пусть задана произвольная функция $V_* \in [L^2(a, b)]^4$. Требуется выбрать начальные данные $V_0 \in U$ так, чтобы минимизировать отклонение $V(T)$ от функции V_*. Другими словами, требуется решить задачу

$$\inf_{V_0 \in U} J(V_0) \tag{1.8}$$

$(J(V_0) = ||V(T) - V_*||_0)$. Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $(0, 0) \in K$, f_i, $f_{it} \in L^2(Q)$. *Тогда существует решение задачи оптимального управления* (1.8).

Приведем схему доказательства этого утверждения. Прежде всего необходимо установить оценки решения через начальные данные. Для этого рассматривается вспомогательная задача со штрафом и для нее устанавливаются оценки, равномерные по параметру штрафа. Заключительная часть доказательства базируется на анализе минимизирующей последовательности. Рассмотрим вспомогательную задачу со штрафом. Пусть ε — положительный параметр, $p = (p_1, p_2)$ — оператор штрафа, связанный с множеством K и действующий из $[L^2(a, b)]^2$ в $[L^2(a, b)]^2$ [8]. В области Q требуется найти функции u^ε, w^ε, n^ε, m^ε, удовлетворяющие уравнениям

$$u^\varepsilon_t - n^\varepsilon_x = f_1, \quad w^\varepsilon_t - m^\varepsilon_{xx} = f_2; \tag{1.9}$$

$$n^\varepsilon_t - u^\varepsilon_x + \frac{1}{\varepsilon} p_1(n^\varepsilon, m^\varepsilon) = 0, \quad m^\varepsilon_t + w^\varepsilon_{xx} + \frac{1}{\varepsilon} p_2(n^\varepsilon, m^\varepsilon) = 0 \tag{1.10}$$

с начальными и краевыми условиями

$$u^\varepsilon = u_0, \ w^\varepsilon = w_0, \ n^\varepsilon = n_0, \ m^\varepsilon = m_0 \ \text{при} \ t = 0,$$
$$n^\varepsilon = m^\varepsilon = m^\varepsilon_x = 0 \quad \text{при} \ x = a, b.$$

Априорная оценка сформулированной краевой задачи получается следующим образом. Сначала умножим уравнения (1.9), (1.10) на u^ε, w^ε, n^ε, m^ε, затем продифференцируем их по t и умножим на u^ε_t, w^ε_t, n^ε_t, m^ε_t соответственно. При этом слагаемые, содержащие оператор штрафа, неотрицательны [8]. Кроме того, требуется воспользоваться равномерной ограниченностью $V^\varepsilon_t(0)$ в пространстве $[L^2(a, b)]^4$, являющейся следствием уравнений (1.9), (1.10). Возможность дифференцирования (1.9), (1.10) по t можно обосновать, привлекая метод Галеркина для доказательства существования решения. Итоговая оценка имеет вид

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \{\|V^\varepsilon(t)\|_0^2 + \|V^\varepsilon_t(t)\|_0^2\} \leqslant c(T, f_1, f_2, V_0).$$

Здесь указана зависимость постоянной c от T, f_1, f_2, V_0. Отметим, что c не зависит от ε. Согласно этой оценке, из последовательности V^ε, V^ε_t выберем подпоследовательность, $*$-слабо сходящуюся в пространстве $L^\infty(0, T; [L^2(a, b)]^4)$ при $\varepsilon \to 0$. Предельная функция V удовлетворяет уравнениям (1.1), неравенству (1.7) и начальным условиям (1.5), причем $(n(t), m(t)) \in K$. Справедлива оценка

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \{\|V(t)\|_0^2 + \|V_t(t)\|_0^2\} \leqslant c(T, f_1, f_2, V_0). \tag{1.11}$$

Неравенство (1.11) позволяет доказать разрешимость сформулированной задачи оптимального управления (1.8). Пусть V_0^i — минимизирующая последовательность. Она ограничена в пространстве $H(a, b)$, поэтому, выбирая при необходимости подпоследовательность, считаем, что $V_0 \to V_0$ слабо в $H(a, b)$ и сильно в $[L^2(a, b)]^4$. В силу слабой замкнутости множества U имеем $V_0 \in U$. Более того, можно показать, что соответствующие V_0^i решения задачи V^i также сходятся к предельной функции V, отвечающей начальным данным V_0. Обоснование этого факта и предельных переходов базируется на априорной оценке вида (1.11). Заключительная часть доказательства использует слабую полупепрерывность снизу функционала качества

$$d \equiv \inf_{V_1 \in U} J(V_1) = \underline{\lim}\, J\left(V_0^i\right) = \underline{\lim}\, \| V^i(T) - V_* \|_0 \geqslant \| V(T) - V_* \|_0 \geqslant d.$$

Следовательно, начальное значение V_0 таково, что разность $V(T) - V_*$ минимальна.

2. Рассмотрим случай упругопластической оболочки. Пусть множество K определено, как и в п. 1, с помощью функции Φ, а $W = \{(n, m) \mid n \in L^2(a, b),\ m \in H_0^2(a, b)\}$. Постановка задачи об упругопластическом деформировании цилиндрической оболочки при осевой симметрии состоит в следующем. В области Q требуется найти функции w, n, m, ξ_1, ξ_2, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам

$$w_t - m_{xx} - n = f; \tag{2.1}$$

$$-w = n_t + \xi_1, \quad -w_{xx} = m_t + \xi_2; \tag{2.2}$$

$$\Phi(n, m) \leqslant 0; \tag{2.3}$$

$$\xi_1(\bar{n} - n) + \xi_2(\bar{m} - m) \leqslant 0 \ \forall (\bar{n}, \bar{m}),\ \Phi(\bar{n}, \bar{m}) \leqslant 0, \tag{2.4}$$

а также начальным и краевым условиям

$$w = w_0,\ n = n_0,\ m = m_0 \text{ при } t = 0; \tag{2.5}$$

$$m = m_x = 0 \text{ при } x = a,\ b \tag{2.6}$$

(w — скорость нормального прогиба, m — изгибающий момент, n — окружное усилие).

Можно доказать разрешимость задачи (2.1)—(2.6) [7]. При этом существуют функции w, n, m, удовлетворяющие уравнению (2.1), начальным условиям (2.5) и неравенству

$$[m_t, \bar{m} - m] + [n_t, \bar{n} - n] + [w, \bar{m}_{xx} - m_{xx}] + [w, \bar{n} - n] \geqslant 0$$

$$\forall (\bar{n}, \bar{m}) \in L^2(0, T, K \cap W),\ (n(t), m(t)) \in K.$$

Задача оптимального управления начальными данными состоит в том, чтобы среди элементов выпуклого замкнутого и ограниченного множества $U \subset H^2(a, b) \times L^2(a, b) \times H_0^2(a, b)$ выбрать такой, при котором разность между значением решения в момент времени T и заданной функцией $V_* \in [L^2(a, b)]^3$ была наименьшей. Иначе говоря, требуется найти решение задачи

$$\inf_{V_0 \in U} \| V(T) - V_* \|_0, \tag{2.7}$$

где V соответствует начальным данным V_0.

Теорема 2. *Пусть* $(0, 0) \in K$, f, $f_t \in L^2(Q)$, *а множество* U *таково, что если* $(w_0, n_0, m_0) \in U$, *то* $(n_0, m_0) \in K$. *Тогда решение задачи оптимального управления* (2.7) *существует.*

Схема доказательства этой теоремы такая же, как и теоремы 1. Сначала рассматривается вспомогательная задача со штрафом и устанавливаются априорные оценки решения через начальные данные, затем осуществляется предельный переход по параметру штрафа. В заключение строится сходящаяся к решению задачи (2.7) последовательность начальных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Троицкий В. А., Петухов Л. В.** Оптимизация формы упругих тел.— М.: Наука, 1982.
2. **Баничук И. В., Иванова С. Ю., Шаранюк А. В.** Динамика конструкций. Анализ и оптимизация.— М.: Наука, 1989.
3. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике.— М.: Наука, 1980.
4. **Ерхов М. И.** Теория идеально пластических тел и конструкций.— М.: Наука, 1982.
5. **Мазалов В. Н., Немировский Ю. В.** Динамика тонкостенных пластических конструкций // Проблемы динамики упругопластических сред.— М.: Мир, 1975.
6. **Иванов Г. В.** Уравнения идеального упругопластического деформирования оболочек в задачах о контакте и сопряжении их с другими телами // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1980.— Вып. 45.
7. **Хлуднев А. М.** Существование решений в задачах динамики одномерных пластических конструкций // ПМТФ.— 1983.— № 2.
8. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.

г. Новосибирск *Поступила 15/IX 1987 г., в окончательном варианте — 2/III 1990 г.*

УДК 539.374

А. В. Кривко, А. Ю. Смыслов

К ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД

При создании дисперсно-упрочненных материалов требуемые технологические свойства достигаются путем соединения разнородных металлов пластическим деформированием порошковой смеси. Свойства образующегося таким образом композита качественно отличаются от свойств составляющих, что в значительной степени обусловлено наличием пор. Теоретические модели пластического деформирования пористых сред могут использоваться при выборе способов и режимов прессования для получения качественных изделий.

В настоящей работе исследуются особенности пластического деформирования пористой среды, содержащей дисперсные включения. Применяется метод, заключающийся в отыскании приближенного выражения для диссипативной функции композита [1—8]. Получены условия, для которых включения ведут себя как жесткие частицы или деформируются вместе с матрицей.

1. Рассмотрим жесткопластический материал, состоящий из связанной матрицы с однородно распределенными в ней включениями и порами. Матрица и включения удовлетворяют условию Мизеса с пределами пластичности k_0 и k_1 соответственно. Задача состоит в построении приближенного выражения для диссипативной функции композита $D^*(\langle\varepsilon_{ij}\rangle)$, которая в сочетании с ассоциированным законом нагружения $\langle\sigma_{ij}\rangle = \partial D^*/\partial\langle\varepsilon_{ij}\rangle$ определяет условие пластичности [1—8]. Здесь σ_{ij}, ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, угловые скобки — осреднение полей по объему материала.

Диссипативную функцию макросреды $D^*(\langle\varepsilon_{ij}\rangle)$ получим как минимальное значение скорости диссипации в единице макрообъема V пористого тела:

$$D = \frac{1}{V}\int\limits_{V_0} k_0 \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}\, dV + \frac{1}{V}\int\limits_{V_1} k_1 \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}\, dV \tag{1.1}$$

($V = V_т + V_2$, $V_т = V_0 + V_1$ — объем твердой фазы, V_0, V_1 и V_2 — объемы матрицы, включений и пор).

Представляя интеграл по области V_0 в виде разности интегралов по областям $V_т$ и V_1, имеем функционал

$$D = k_0\langle\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}\rangle_т - (k_0 - k_1)\,\langle\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}\rangle_1, \tag{1.2}$$

который при $k_1 = k_0$ сводится к выражению для диссипативной функции пористого тела с однородной твердой фазой [2]. Индексами после угловых скобок в (1.2) отмечается осреднение по соответствующей фазе.