

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В. К. Андреев, А. М. Франк

Вычислительный центр СО РАН, 660036 Красноярск

Изучена линейная и нелинейная стадии развития неустойчивости течения Куэтта с двумя свободными границами. Установлено, что неустойчивость имеет место только для длинных волн, и вычислено критическое волновое число. При наличии сил поверхностного натяжения неустойчивость сохраняется только при числе Вебера $We \leq 1/3$.

Как известно, течение Куэтта между двумя твердыми стенками является устойчивым в случае как идеальной [1], так и вязкой жидкости [2]. В численных расчетах [3] была обнаружена неустойчивость такого течения при наличии двух свободных границ.

В данной работе рассматривается устойчивость течения Куэтта слоя идеальной жидкости со свободными границами. В рамках линейной теории показано, что неустойчивость действительно имеет место только для возмущений с волновым числом $k < k_* = 1,19968/l$ (l — полуширина слоя). Неустойчивость сохраняется и при учете капиллярных сил, если число Вебера $We \leq 1/3$. Нелинейная стадия развития возмущений изучалась методом частиц [3]. Оказалось, что сильная неустойчивость с образованием цепочки вихрей наблюдается только для относительно длинноволновых возмущений. Более короткие возмущения практически не растут и не приводят к искажению формы свободных границ. Критическое число k_* , найденное из линейной теории, хорошо подтверждается в расчетах.

1. Линейная задача о малых возмущениях. Рассмотрим слой толщиной $2l$ идеальной несжимаемой жидкости постоянной плотности ρ . Предполагается, что он окружен пассивным газом и прямые $y = l$, $y = -l$ являются свободными границами слоя. Можно проверить, что течение Куэтта

$$\mathbf{u} = (ay, 0), \quad p = p_0, \quad a, p_0 = \text{const} \quad (1.1)$$

удовлетворяет уравнениям Эйлера внутри слоя и условиям на свободных границах.

Пусть $U(x, y, t)$, $V(x, y, t)$, $P(x, y, t)$ — возмущения скорости и давления основного течения (1.1). Задача о малых возмущениях движения жидкости со свободной границей в общем случае изучена в [4]. Для движения (1.1) система может быть записана так:

$$U_t + ayU_x + aV + \frac{1}{\rho} P_x = 0, \quad V_t + ayV_x + \frac{1}{\rho} P_y = 0, \quad U_x + V_y = 0 \quad (1.2)$$

в слое $-\infty < x < \infty$, $-l < y < l$;

$$P(x, \pm l, t) = 0, \quad R_{1,2t} + ayR_{1,2x} - V(x, \pm l, t) = 0 \quad (1.3)$$

на свободных границах. В (1.3) функции $R_1(x, t)$, $R_2(x, t)$ представляют собой возмущения границ слоя $y = -l$ и $y = l$ соответственно.

Ищем решение задачи (1.2), (1.3) в виде нормальных волн:

$$(U, V, P, R_1, R_2) = [U(y), V(y), P(y), R_1, R_2] \exp(-i\omega t + kix), \quad (1.4)$$

где k — волновое число, а $\omega = \omega_r + i\omega_i$ — комплексная частота. Постоянные R_1, R_2 в правой части (1.4) представляют амплитуды волн, распространяющихся вдоль свободных границ с фазовой скоростью ω_r . Подставляя (1.4) в (1.2), (1.3), получим

$$i(ayk - \omega)U + aV + \frac{ki}{\rho}P = 0, \quad i(ayk - \omega)V + \frac{1}{\rho}P_y = 0, \quad ikU + V_y = 0 \quad \text{при } -l < y < l; \quad (1.5)$$

$$P(\pm l) = 0, \quad i(ayk - \omega)R_{1,2} - V(\pm l) = 0. \quad (1.6)$$

При исследовании устойчивости плоскопараллельных течений с твердыми стенками обычно исключают возмущения давления P и продольной скорости U и получают спектральную задачу для компоненты V — задачу Рэлея. В данном случае в силу специфики граничных условий (1.6) удобнее исключить функции U, V :

$$V = \frac{i}{\rho(ay - \omega/k)k} P', \quad U = \frac{i}{k} V' \quad (1.7)$$

(штрих означает дифференцирование по y). Подставляя (1.7) в первое уравнение (1.5), получим уравнение для возмущенного давления

$$P'' - \frac{2a}{ay - \omega/k} P' - k^2 P = 0 \quad (1.8)$$

с граничными условиями

$$P(-l) = P(l) = 0. \quad (1.9)$$

При известной функции $P(y)$ возмущения свободных границ найдутся из второй группы уравнений (1.6).

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$z = \frac{y}{l} - \frac{\omega}{kla}, \quad n = kl, \quad q = \frac{\omega}{a}. \quad (1.10)$$

При этом уравнение (1.8) примет вид $zP'' - 2P' - n^2zP = 0$. Оно имеет общее решение

$$P = \frac{z}{\sqrt{in}} \left\{ C_1 \left[\cos(inz) - \frac{1}{inz} \sin(inz) \right] + C_2 \left[-\sin(inz) - \frac{1}{inz} \cos(inz) \right] \right\} \quad (1.11)$$

(C_1, C_2 — произвольные постоянные).

Используя граничные условия (1.9) после простых, но достаточно длинных вычислений, получим характеристическое уравнение для q^2 :

$$q^2 = n^2 + 1 - 2n \operatorname{cth}(2n). \quad (1.12)$$

Легко проверить следующие свойства функции $q^2(n)$:

- 1) $\lim_{n \rightarrow 0} q^2(n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow 0} \frac{dq^2(n)}{dn} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow 0} \frac{d^2q^2(n)}{dn^2} = -\frac{2}{3},$
- 2) $q^2(n) \simeq -\frac{1}{3}n^2$ при $n \rightarrow 0,$
- 3) $q^2(n) \simeq n^2$ при $n \rightarrow \infty.$

График функции $q^2(n)$ показан на рис. 1 (кривая 1). Так как $q^2 = (1 - n \operatorname{th} n)(1 - n \operatorname{cth} n)$, то n_* — фактически корень уравнения $\operatorname{th} n = 1/n$, $n_0 \approx 0,8$ — точка минимума функции $q^2(n)$, именно $q^2(n) \approx -9,6 \cdot 10^{-2}$.

Следовательно, течение Куэтта (1.1) всегда неустойчиво при $0 < n < n_* \approx 1,19968$ и устойчиво при $n \geq n_*$. Возвращаясь к (1.10), можно сделать выводы:

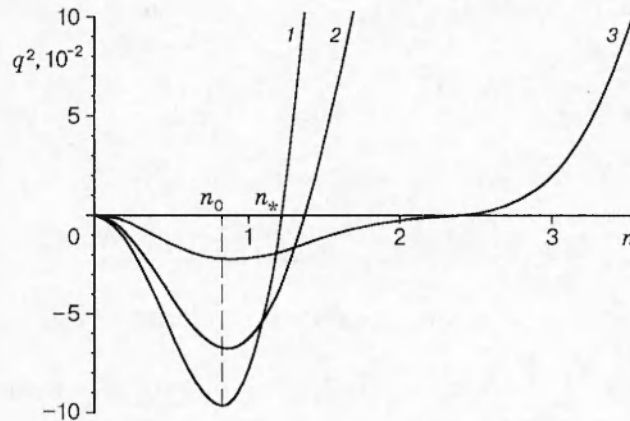


Рис. 1

1. Если длина волны возмущения $\lambda > 2\pi l/n_* \approx 5,23738l$, то течение (1.1) в слое неустойчиво и коэффициент нарастания ω_i убывает вместе с λ , когда $\lambda \leq \lambda_0 = 2\pi l/n_0 \approx 7,85398l$, $\omega_{i\max} = a|q(n_0)| \approx 0,30984a$. Для $\lambda > \lambda_0$ происходит рост ω_i .

2. Если длина волны возмущения $\lambda \leq 2\pi l/n_*$, то течение (1.1) устойчиво.

2. Влияние сил поверхностного натяжения. При учете поверхностных сил давление на свободных возмущенных границах пропорционально их средним кривизнам. Поэтому вместо первой группы граничных условий (1.3) будем иметь

$$P - \sigma R_{1xx} = 0 \text{ при } y = -l, \quad P + \sigma R_{2xx} = 0 \text{ при } y = l \tag{2.1}$$

($\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения). Используя второе условие (1.6), первое уравнение (1.7) и выражение (1.11), получим вместо (1.9) условия для амплитуд возмущений давления:

$$P(z_2) - \frac{We}{z_2^2} \frac{dP}{dz}(z_2) = 0, \quad P(z_1) + \frac{We}{z_1^2} \frac{dP}{dz}(z_1) = 0, \tag{2.2}$$

где $z_1 = -1 - q/n$, $z_2 = 1 - q/n$, $q = \omega/a$, $n = kl$, $We = \sigma/\rho l^3 a^2$ (We — число Вебера).

После подстановки выражения для $P(z)$ из (1.11) в граничные условия (2.2) и некоторых преобразований найдем характеристическое уравнение

$$q^2 = n^2 + \frac{1}{2} \left[2n^3 \operatorname{cth} 2nWe - 2n \operatorname{cth} 2n + 1 \pm \sqrt{\frac{4n^6}{\operatorname{sh}^2 2n} We^2 + 4n^3 (\operatorname{cth} 2n - 2n)(1 - 2n \operatorname{cth} 2n)We + (2n \operatorname{cth} 2n - 1)^2} \right]. \tag{2.3}$$

Для коротких волн ($n \rightarrow \infty$) $q \approx \pm \sqrt{n^3 We}$ и имеет место устойчивость. Для длинных волн ($n \rightarrow 0$) из (2.3) $q^2 \approx n^2 (We - 1/3)$, если $We \geq 4/3$, и

$$q^2 \approx n^2 \left\{ We - \frac{1}{3} + 2 \left[\frac{We}{3} - \frac{4}{45} - \frac{2}{|We/4 - 1/3|} \left(\frac{We^2}{48} + \frac{11}{90} We - \frac{2}{135} \right) \right] n^2 \right\},$$

если $0 < We < 4/3$. Поэтому при $We \leq 1/3$ имеется длинноволновая неустойчивость течения Куэтта (1.1). Более того, в этом случае всегда существует такое значение n_* , что $q^2(n) < 0$ при $n < n_*$. Например, для $We = 0,1$ (кривая 2 на рис. 1) имеем $n_* \approx 1,305$, $n_0 \approx 0,84$, $q^2(n_0) \approx -6,67 \cdot 10^{-2}$ и для $We = 0,25$ (кривая 3) $n_* \approx 2,3675$, $n_0 \approx 0,88$, $q^2(n_0) \approx -2,17 \cdot 10^{-2}$. Если $We > 1/3$, то функция $q^2(n) \geq 0$ для всех волновых чисел.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $y = 0$ является непроницаемой твердой стенкой. Тогда вместо (2.2) будем иметь условия

$$P(z_2) - \frac{We}{z_2^2} \frac{dP}{dz}(z_2) = 0, \quad \frac{dP}{dz} \left(-\frac{q}{n} \right) = 0$$

и можно показать, что частота возмущений всегда вещественна:

$$\frac{\omega}{a} = q = \frac{2n - \text{th } n \pm \sqrt{\text{th}^2 n + 4n^3 \text{th } n \text{ We}}}{2}. \quad (2.4)$$

Таким образом, наличие лишь двух свободных границ может приводить к неустойчивости течения Куэтта (1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\bar{V}(k, y, t)$ — преобразование Фурье функции $V(x, y, t)$ по переменной x . Тогда решение начально-краевой задачи, соответствующей (1.2), (1.3), имеет вид

$$V = -\frac{1}{k} \int_y^l \exp(-ika\xi t) f(\xi) \text{sh } k(y - \xi) d\xi + [c_1(t) e^{iqat} + c_2(t) e^{-iqat}] \text{sh } ky + \\ + [d_1(t) e^{iqat} + d_2(t) e^{-iqat}] \text{ch } ky,$$

где $f(y) = \bar{V}_{0yy} - k^2 \bar{V}_0$ ($\bar{V}_0(y)$ — преобразование Фурье начального значения $V_0(x, y)$); $c_1(t)$, $c_2(t)$, $d_1(t)$, $d_2(t)$ — ограниченные при $t \rightarrow \infty$ функции; параметр q определяется одним из значений (1.12), (2.3) или (2.4). Обращаясь ко второму граничному условию (1.3), получим рост или затухание начальных возмущений, как и в методе элементарных волновых решений.

3. Нелинейная стадия. Нелинейное развитие возмущений исследовалось методом частиц для несжимаемой жидкости [5], суть которого заключается в моделировании течений жидкости с помощью большого количества материальных частиц. Частицы свободны, т. е. не связаны никакой сеткой и в то же время движутся всегда с соленоидальной скоростью, что обеспечивает несжимаемость потока. Дискретные по t уравнения движения выводятся из вариационного принципа Гаусса, вследствие чего метод полностью консервативен. Один шаг по времени состоит, в сущности, из двух дробных шагов, где первый — это свободное движение частиц под действием внешних сил, а второй представляет собой проектирование в L_2 полученного дискретного поля скорости на некоторое конечномерное пространство H гладких соленоидальных функций. В расчетах это пространство задается с помощью базиса, для построения которого обычно используются B -сплайны. Подробное описание метода, а также примеры решенных задач, в том числе тестовых, можно найти в работах [3, 6, 7]. Отметим особенности, характерные для данной задачи.

Невозмущенный слой жидкости с двумя плоскими свободными границами $y = \pm l$ имеет толщину $2l$ и линейное поле скорости (1.1) с $a = 1$, $u = y$, $v = 0$. В начальный момент времени частицы распределены в слое равномерно по каждой координате. В качестве базиса пространства H использованы финитные соленоидальные функции, получаемые применением оператора rot к двумерным квадратичным B -сплайнам. Сплайны строятся на равномерной прямоугольной сетке с шагами h_1 , h_2 . Длина расчетной области равна 2π . На ее боковых границах поставлены естественные для данной задачи условия периодичности, которые в данном методе реализованы следующим образом. Частица, вышедшая за правую границу области, тут же входит в нее слева так, будто расчетная область склеена по боковым границам. Так же и базисные функции, лежащие вблизи правой границы, участвуют в формировании поля скорости вблизи левой границы и наоборот.

При отсутствии начальных возмущений такое течение с линейным распределением скорости является для данного метода практически точным решением (с точностью до

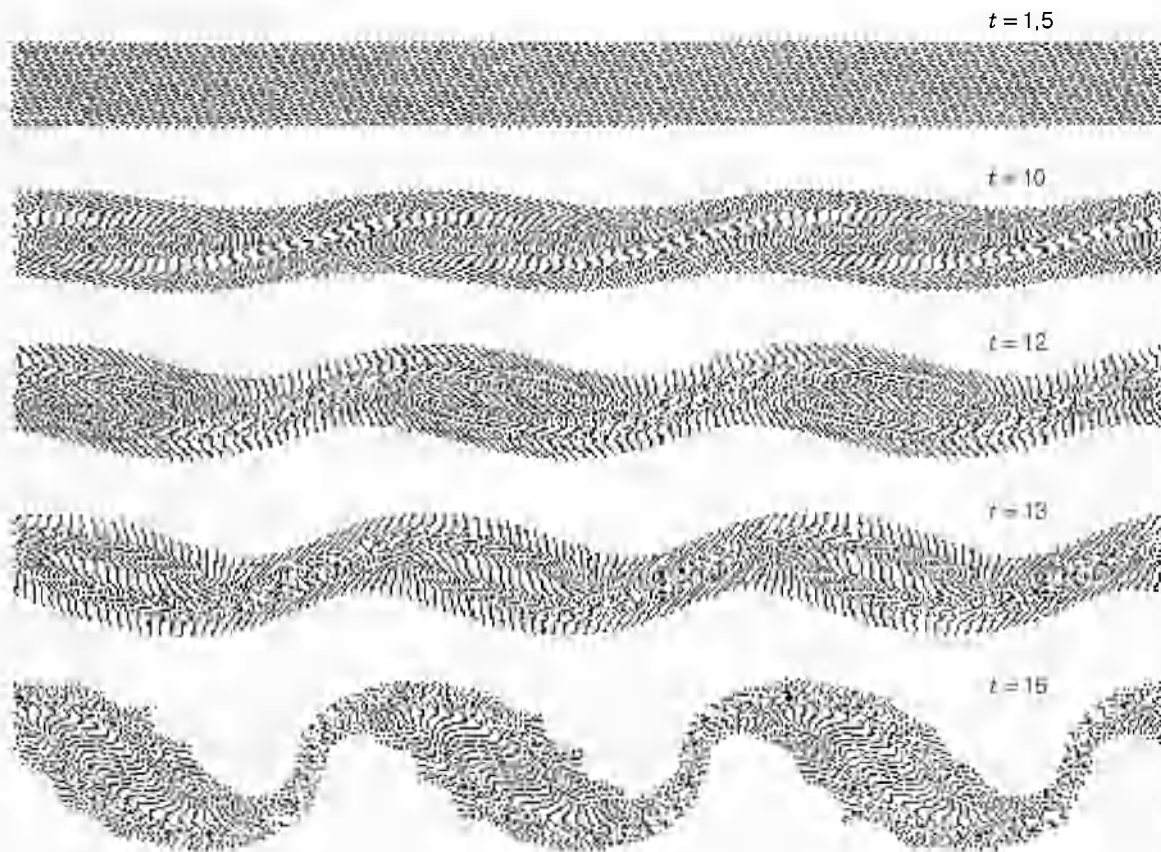


Рис. 2

сходимости итераций при решении линейной системы в задаче проектирования), поэтому распределение частиц остается в процессе расчета равномерным, без какого-либо искривления скользящих друг относительно друга слоев, по крайней мере до времени $t = 20$, до которого проводились расчеты возмущенных течений.

При моделировании неустойчивости в начальный момент времени на линейное поле скорости накладывались возмущения

$$\delta u = 0, \quad \delta v = 0,01l \sin(kx). \quad (3.1)$$

На рис. 2 приведен пример расчета развития во времени достаточно длинных неустойчивых возмущений с безразмерным волновым числом $kl = 0,9$. Параметры расчета: толщина слоя $2l = 0,6$, сетка 60×25 с шагами $h_1 = 0,105$, $h_2 = 0,1$, число частиц 5 880, шаг по времени $\tau = 0,1$, время счета одного шага на АТ 486DX2 около 8 с. Вначале, при $t = 1,5$, возмущения свободной границы малы. Возмущения поля течения внутри слоя, напротив, хорошо заметны из-за небольшого смещения частиц в изначально правильной структуре. Далее, при $t > 10$, возмущения усиливаются настолько, что течение перестраивается, образуя цепочку вихрей, очень похожих на вихри Кельвина — Гельмгольца, возникающие на границе раздела в двухслойной жидкости [8, с. 87]. Из-за вращения на границе этих вихрей затем возникает вторичная неустойчивость Рэля — Тейлора, хорошо видная при $t = 16$ (см. также рис. 3,2).

На рис. 3 представлены результаты расчетов развития возмущений при различных значениях безразмерного волнового числа kl в один и тот же момент времени $t = 20$, за исключением случая 3,2, когда возмущения растут слишком быстро. Возмущения имели

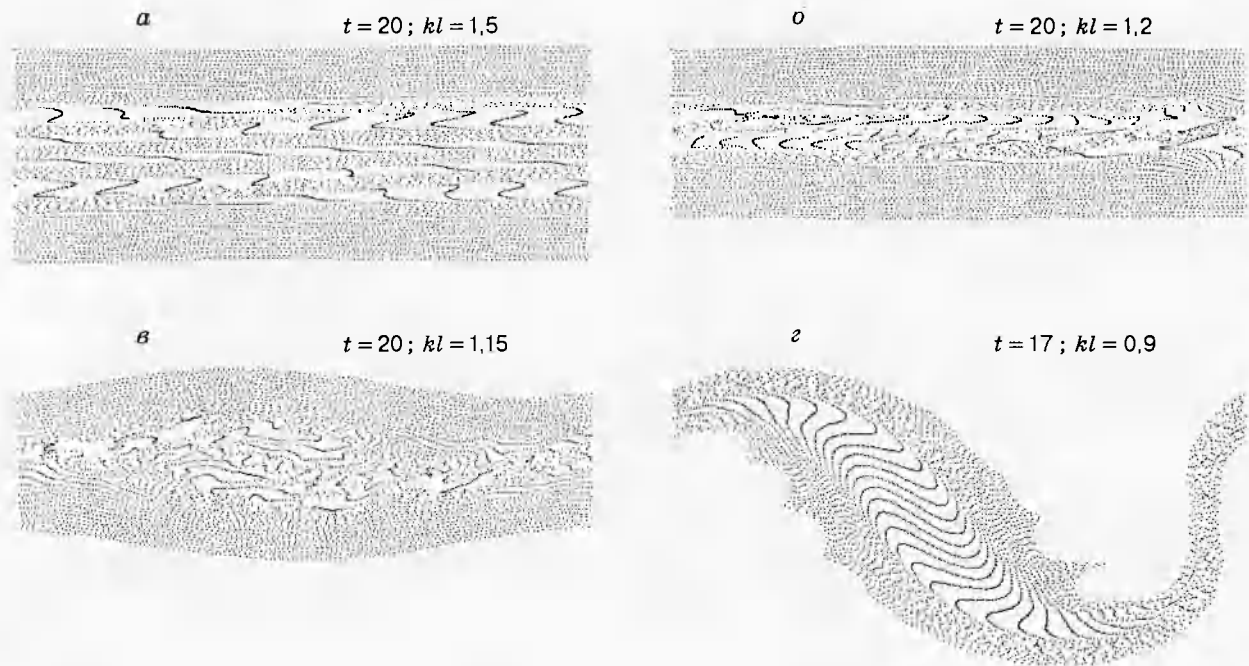


Рис. 3

вид (3.1) с волновым числом $k = 1$, т. е. длина волны равна 2π , а амплитуда составляла 1% от максимальной скорости в слое $U = l$. Значение волнового числа определялось изменением толщины слоя. Характерный масштаб времени $T = l/U$ оставался неизменным. Видно, что при $kl \geq 1,2$ возмущения не приводят к искажению формы слоя. Амплитуда возмущений поля скорости в случае 3,а остается постоянной, около 1%, а в случае 3,б немного возрастает — до 2%. Хорошо видные на рисунках сильные возмущения внутренней структуры слоя практически никак не характеризуют мгновенное поле скорости. Они обусловлены небольшим искривлением слоев жидкости под действием малых начальных возмущений и последующей их деформацией (типа обрушения) под действием сдвигового потока. При $kl < 1,2$ возмущения быстро растут, формируя периодическую вихревую структуру. Таким образом, найденное из линейной теории критическое значение волнового числа $kl = 1,19968$ очень хорошо согласуется с результатами численных расчетов.

В заключение несколько слов о контроле интегральных характеристик течения. Хотя формально метод является полностью консервативным, в реальных расчетах система линейных уравнений решается итерационными методами, и это вносит погрешность в законы сохранения. Непосредственная проверка показала, что в расчетах, результаты которых представлены на рис. 3, отклонение горизонтального импульса течения от удвоенного импульса половины слоя (так как суммарный импульс равен нулю) было не более 0,1%, а относительное отклонение кинетической энергии — менее 0,03%. Контролировалось также сохранение суммарной циркуляции, изменения которой в зависимости от варианта составляли 0,01–4%. Наибольшая ошибка возникла здесь в варианте 3,г при появлении острых пиков на свободной границе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Case K. M. Stability of inviscid plane Couette flow // Phys. Fluids. 1960. V. 3, N 2. P. 143–148.

2. Романов В. А. Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта // Функцион. анализ и его приложения. 1973. Т. 7, № 2. С. 62–73.
3. Frank A. M. Particles method for incompressible flows with a free surface // Proc. First Asian CFD Conf. Hong Kong, 1995. P. 1195–1199.
4. Андреев В. К. Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука, 1992.
5. Франк А. М., Огородников Е. И. Метод частиц для несжимаемой жидкости // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 6. С. 958–962.
6. Франк А. М., Огородников Е. И. Консервативный свободно-лагранжев метод для несжимаемой жидкости. Красноярск, 1992. Деп. в ВИНТИ 01.07.92. № 2123-B92.
7. Frank A. M. Particle method for water waves simulation // Proc. 3rd Intern. Conf. on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, 24–28 April, 1995, Mandelieu-la-Napoule, France (SIAM-INRIA) / G. Cohen (Ed.). P. 96–103.
8. Альбом течений жидкости и газа / Сост. М. Ван-Дайк. М.: Мир, 1986.

*Поступила в редакцию 30/X 1996 г.,
в окончательном варианте — 19/I 1997 г.*
