ние. Однако наличие упругой нелинейности в материале может привести к взаимодействию продольных и изгибных волн уже на прямолинейном участке стержня [5]. Наличие некоторых количественных расхождений теоретического расчета с экспериментом можно объяснить, в частности, этим фактором.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Никифоров А. С., Будрин С. В.** Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах.— Л.: Судостроение, 1968.
2. **Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.** Введение в акустическую динамику машин.— М.: Наука, 1979.
3. **Михайлова Е. В.** Асимптотический анализ продольных и изгибных волн, распространяющихся в системе из двух пластин, скрепленных под углом // ПМТФ.— 1982.— № 5.
4. **Григолюк Э. И., Селезов И. Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек.— М.: ВИНИТИ, 1973.
5. **Ерофеев В. И., Потапов А. И.** Параметрическая трансформация продольных волн в изгибные в тонких стержнях // Волны и дифракция.— М.: ИРЭ АН СССР, 1981.— Т. 2.

Поступила 6/II 1986 г.

УДК 539.3

АСИМПТОТИКА СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ. ФОРМУЛИРОВКА УКОРОЧЕННОЙ ЗАДАЧИ

В. М. Корнев, А. О. Мулькибаев

(*Новосибирск*)

При применении асимптотического метода [1—3] к расчету собственных колебаний прямоугольных пластин не принимается во внимание краевой эффект в угловых точках. Ниже показано, как уточнить построение асимптотики с учетом угловых погранслоев [4, 5]. Поскольку изменяемость основной части решения и краевого эффекта имеет одинаковый порядок, отсутствует возможность записать краевые условия исходной задачи [1—3] в каноническом виде [6], и поэтому используется метод исключения [7, 8].

Исходная задача о свободных колебаниях защемленной прямоугольной пластины разбивается на две задачи меньшего порядка. Первая описывает осциллирующую основную часть решения, вторая рассматривается как задача о возмущении, где малый параметр связывался с большим собственным значением.

Постановка укороченной задачи позволяет сводить исследование асимптотики собственных функций и собственных значений исходной задачи к изучению собственных функций и собственных значений укороченной задачи, которая имеет меньший порядок.

1. Постановка задачи. Асимптотические разложения. В прямоугольной области $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ рассматривается асимптотика собственных форм и частот колебаний защемленной пластины постоянной толщины

$$\Delta\Delta w(x, y) - \omega^2 k^2 w(x, y) = 0, \tag{1.1}$$

где $w(x, y)$ — нормальный прогиб; ω — собственная частота колебаний; $k^2 = \rho h/D$; h — толщина пластины; ρ — удельная масса; D — цилиндрическая жесткость. Краевые условия

$$w\,|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = 0. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.1) имеет представление

$$(\Delta + \omega k)(\varepsilon^2\Delta - k)w(x, y) = 0, \ \varepsilon^2 = \omega^{-1}.$$

Пусть $\omega \gg 1$, тогда $\varepsilon \ll 1$. Допустим, что $w(x, y) = u(x, y) + v(x, y)$, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta u(x, y) + \omega k u(x, y) = 0; \tag{1.3}$$

$$\varepsilon^2 \Delta v(x, y) - k v(x, y) = 0. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.3) дает основную осциллирующую часть решения (1.1), а (1.4) — быстро затухающую часть, т. е. краевой эффект при колебаниях.

Решение уравнения (1.4) ищем в виде, предложенном в [4]:

$$v(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i [\Pi_{1i}(\xi_1, y) + \Pi_{2i}(\xi_2, y) + Q_{1i}(x, \eta_1) + Q_{2i}(x, \eta_2) + \\ + P_{1i}(\xi_1, \eta_1) + P_{2i}(\xi_1, \eta_2) + P_{3i}(\xi, \eta_1) + P_{4i}(\xi_2, \eta_2)] \\ (\xi_1 = x/\varepsilon,\ \xi_2 = (a - x)/\varepsilon,\ \eta_1 = y/\varepsilon,\ \eta_2 = (b = y)/\varepsilon). \tag{1.5}$$

Погранслойная часть асимптотики состоит из погранфункций двух типов. В окрестности каждой стороны прямоугольника строятся обыкновенные погранслои Π_{1i}, Π_{2i}, Q_{1i}, Q_{2i}, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Например, в окрестности стороны $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant b$ погранфункции $\Pi_{1i}(\xi_1, y)$ определяются последовательно с помощью уравнений

$$\frac{\partial^2 \Pi_{1i}}{\partial \xi_1^2} - k\Pi_{1i} = g_i(\xi_1, y) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $g_i(\xi_1, y) = -\dfrac{\partial^2 \Pi_{1, i-2}}{\partial y^2}$; $g_0 \equiv g_1 \equiv 0$.

Погранслойные операторы в окрестности других сторон аналогичны. В дальнейшем нам понадобится конкретный вид нулевого приближения:

$$\Pi_{10}(\xi_1, y) = p_0(0, y) \exp(-\sqrt{k}\xi_1); \tag{1.6}$$

$$Q_{10}(x, \eta_1) = p_0(x, 0) \exp(-\sqrt{k}\eta_1). \tag{1.7}$$

Здесь $p_0(0, y)$, $p_0(x, 0)$ — неизвестные функции, характеризующие амплитуду погранслоя, которые будут определены через решение укороченной задачи. Функции Π и Q, устраняя невязку в граничных условиях для $u(x, y)$, вносят дополнительную невязку в граничные условия в окрестности угловых точек. Для устранения этих невязок вводятся погранфункции P, определяемые из эллиптических уравнений. Так, в окрестности вершины $(0, 0)$ погранфункции $P_{1i}(\xi_1, \eta_1)$ определяются последовательно с помощью уравнений

$$(\Delta - k) P_{1i}(\xi_1, \eta_1) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2} \quad (i = 0, 1 \ldots) \tag{1.8}$$

в области $\xi_1 \geqslant 0$, $\eta_1 \geqslant 0$. Из приведенных выше рассуждений имеем для P_{1i} краевые условия и условия на бесконечности:

$$P_{1i}(\xi_1, \eta_1) \to 0 \text{ при } \xi_1 \to \infty,\ P_{1i}(\xi_1, \eta_1) \to 0 \text{ при } \eta_1 \to \infty,$$

на границе $x = 0$

$$P_{1i}(0, \eta_1) = -Q_{1i}(0, \eta_1); \tag{1.9}$$

на границе $y = 0$

$$P_{1i}(\xi_1, 0) = -\Pi_{1i}(\xi_1, 0). \tag{1.10}$$

Для нулевого приближения, учитывая (1.6), (1.7), получим краевые условия

$$P_{10}(0, \eta_1) = -p_0(0, 0) \exp(-\sqrt{k}\eta_1),$$
$$P_{10}(\xi_1, 0) = -p_0(0, 0) \exp(-\sqrt{k}\xi_1).$$

Так же как и в [4], проведем замену функции в уравнении (1.8), сводящую исходную задачу к задаче с однородными краевыми условиями:

$$P_{10}(\xi_1, \eta_1) = -p_0(0, 0) \exp(-\sqrt{k}(\xi_1 + \eta_1)) + \Omega_0(\xi_1, \eta_1),$$

где функция $\Omega_0(\xi_1, \eta_1)$ определяется из краевой задачи

$$(1.11) \qquad (\Delta - k)\Omega_0(\xi_1, \eta_1) = kp_0(0, 0) \exp(-\sqrt{k}(\xi_1 + \eta_1)),$$

$$\Omega_0(0, \eta_1) = 0,\ \Omega_0(\xi_1, 0) = 0,\ \Omega_0(\xi_1, \eta_1) \to 0 \text{ при } \xi_1 \to \infty \text{ и } \eta_1 \to \infty.$$

Решение (1.11) с помощью функции Грина приведено в [4]:

$$(1.12) \qquad \Omega_0(\xi, \eta) = \int_0^\infty \int_0^\infty G(\xi, \eta, s, t)\, kp_0(0, 0) \exp\left(-\sqrt{k}(t + s)\right) dt\, ds,$$

$$G(\xi, \eta, s, t) = \frac{1}{2\pi}\left[K_0\left(\sqrt{k}R_1\right) + K_0\left(\sqrt{k}R_2\right) - K_0\left(\sqrt{k}R_3\right) - K_0\left(\sqrt{k}R_4\right)\right].$$

Здесь $K_0(z)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента;

$$R_1 = \sqrt{(\xi - t)^2 + (\eta - s)^2};\ R_2 = \sqrt{(\xi + t)^2 + (\eta + s)^2};$$

$$R_3 = \sqrt{(\xi - t)^2 + (\eta + s)^2};\ R_4 = \sqrt{(\xi + t)^2 + (\eta - s)^2}.$$

В [4, 5] установлены оценки для функции $\Omega_0(\xi_1, \eta_1)$ и ее производных:

$$(1.13) \qquad \left|\Omega_0, \frac{\partial \Omega_0}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \Omega_0}{\partial \eta_1}\right| \leqslant C \exp(-\varkappa\rho_0),$$

где $\rho_0 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}$; $0 < \varkappa \leqslant \sqrt{k}$; C и $\varkappa$ — произвольные постоянные. Для последующих членов P_{1i} ($i = 1, 2, \ldots$) краевые условия имеют вид

$$P_{1i}(0, \eta_1) = \beta_i(\eta_1) \exp(-\sqrt{k}\eta_1),\ P_{1i}(\xi_1, 0) = \alpha_i(\xi_1) \exp(-\sqrt{k}\xi_1)$$

($\alpha_i(\xi_1)$ и $\beta_i(\eta_1)$ — многочлены относительно ξ_1 и η_1). И так как в угловой точке краевые условия согласованы, то $\alpha_i(0) = \beta_i(0)$. Делая в (1.8) соответствующую замену

$$P_{1i}(\xi_1, \eta_1) = \Omega_i(\xi_1, \eta_1) + [\alpha_i(\xi_1) + \beta_i(\eta_1) - \alpha_i(0)] \exp(-\sqrt{k}(\xi_1 + \eta_1)),$$

получаем для $\Omega_i(\xi_1, \eta_1)$ краевую задачу, аналогичную (1.11). Функции Ω_i и их производные имеют экспоненциальные оценки вида (1.13). Аналогично строятся функции P_{2i}, P_{3i}, P_{4i}, которые играют роль угловых погранслоев вблизи угловых точек $(0, b)$, $(a, 0)$, (a, b).

Таким образом, завершено полное построение краевого эффекта (динамического краевого эффекта В. В. Болотина) с учетом угловых погранслоев.

2. Укороченная задача. Сформулируем граничные условия для уравнения (1.3) относительно функции $u(x, y)$. Для этого подставляем в граничные условия (1.2) функцию $w(x, y) = u(x, y) + v(x, y)$ ($v(x, y)$ определяется из разложения (1.5)). Полагая $\varepsilon \ll 1$ в (1.5), ограничимся нулевыми членами разложения. Из (1.2)

$$(2.1) \qquad u|_\Gamma = -v|_\Gamma, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = -\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma.$$

В качестве примера рассмотрим границу $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant b$:

$$u(0, y) = -v(0, y),\ u_x(0, y) = -v_x(0, y).$$

Подставим представление решения (1.5) с учетом (1.6), (1.7), (1.12) в краевые условия (2.1) и, пренебрегая взаимным влиянием обычных и угловых погранслоев, получим на границе $x = 0$

$$(2.2) \qquad u(0, y) = -[\Pi_{10}(0, y) + Q_{10}(0, \eta_1) + Q_{20}(0, \eta_2) + P_{10}(0, \eta_1) + P_{20}(0, \eta_2)] = -p_0(0, y);$$

$$(2.3)\quad u_x(0, y) = -[\Pi_{10,x}(0, y) + Q_{10,x}(0, \eta_1) + Q_{20,x}(0, \eta_2) + P_{10,x}(0, \eta_1) + $$
$$+ P_{20,x}(0, \eta_2)] = \frac{\sqrt{k}}{\varepsilon} p_0(0, y) - \frac{\sqrt{k}}{\varepsilon} p_0(0, 0)\Big[\exp(-\sqrt{k}\eta_1) +$$
$$+ \varepsilon\sqrt{k}\frac{\partial I(0, \eta_1)}{\partial x}\Big] - \frac{\sqrt{k}}{\varepsilon} p_0(0, b)\Big[\exp(-\sqrt{k}\eta_2) + \varepsilon\sqrt{k}\frac{\partial I(0, \eta_2)}{\partial x}\Big] -$$
$$- p_{0,x}(0, 0)\exp(-\sqrt{k}\eta_1) - p_{0,x}(0, b)\exp(-\sqrt{k}\eta_2),$$

где $I(\xi, \eta) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty G(\xi, \eta, s, t)\exp(-\sqrt{k}(t+s))\,dtds$;

$G(\xi, \eta, s, t)$ определяется из (1.12) и справедливы оценки (1.13).

Исключая в (2.2), (2.3) функцию $p_0(0, y)$, находим

$$(2.4)\quad \varepsilon u_x(0, y) + \sqrt{k}u(0, y) = -\sqrt{k}p_0(0, 0)\Big[\exp(-\sqrt{k}\eta_1) + \varepsilon\sqrt{k}\frac{\partial I(0, \eta_1)}{\partial x}\Big] -$$
$$- \sqrt{k}p_0(0, b)\Big[\exp(-\sqrt{k}\eta_2) + \varepsilon\sqrt{k}\frac{\partial I(0, \eta_2)}{\partial x}\Big] - \varepsilon p_{0,x}(0, 0)\times$$
$$\times\exp(-\sqrt{k}\eta_1) - \varepsilon p_{0,x}(0, b)\exp(-\sqrt{k}\eta_2).$$

Величины $p_0(0, 0), p_{0,x}(0, 0)$ можно определить из условия согласованности краевых условий в угловой точке $u(0, 0) = -v(0, 0)$, $u_x(0, 0) = -v_x(0, 0)$. Воспользуемся разложением (1.5), пренебрегая взаимным влиянием обычных и угловых погранслоев, тогда в угловой точке (0, 0)

$$(2.5)\quad u(0, 0) = -[\Pi_{10}(0, 0) + Q_{10}(0, 0) + P_{10}(0, 0)] = -p_0(0, 0).$$

Аналогично находим и остальные функции, характеризующие амплитуду погранслоев:

$$(2.6)\quad u(0, b) = -p_0(0, b),\ u_x(0, 0) = -p_{0,x}(0, 0),\ u_x(0, b) = -p_{0,x}(0, b).$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.4), получим краевое условие уравнения (1.3) на границе $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Окончательно краевые условия для задачи (1.3) можно выписать в виде

$$(2.7)\quad [\varepsilon u_x(x, y) + \sqrt{k}u(x, y)]_{x=x_j} = \sum_{i=1}^{2}\Big\{\sqrt{k}u(x_j, y_i)\Big[\exp(-\sqrt{k}\eta_i) +$$
$$+ \sqrt{k}\frac{\partial I(0, \eta_i)}{\partial \xi_j}\Big] + \varepsilon u_x(x_j, y_i)\exp(-\sqrt{k}\eta_i)\Big\}\quad (j = 1, 2);$$

$$(2.8)\quad [\varepsilon u_y(x, y) + \sqrt{k}u(x, y)]_{y=y_j} = \sum_{i=1}^{2}\Big\{\sqrt{k}u(x_i, y_j)\Big[\exp(-\sqrt{k}\xi_i) +$$
$$+ \sqrt{k}\frac{\partial I(\xi_i, 0)}{\partial \eta_j}\Big] + \varepsilon u_y(x_i, y_j)\exp(-\sqrt{k}\xi_i)\Big\}\quad (j = 1, 2),$$
$$x_1 = 0,\quad x_2 = a,\quad y_1 = 0,\quad y_2 = b.$$

Таким образом, получим обобщенную задачу о собственных функциях и числах (1.3), (2.7), (2.8), которую назовем укороченной задачей исходной задачи (1.1) и (1.2).

Пусть получено решение (1.3), (2.7), (2.8). Теперь можно восстановить краевые эффекты в представлении (1.5). Так, из выражений (2.5), (2.6) находим значение функции $p_0(x, y)$ и ее производных в угловых точках (0, 0), (0, b), (a, 0), (a, b) через функцию $u(x, y)$. Подставляя значение $p_0(x, y)$ в угловых точках в решения, описывающие погранслои, полностью их определяем. Далее, подставляя функции $u(x, y)$ и $P_i(\xi, \eta)$ в (2.2) и аналогичные выражения для других границ, находим функции $p_0(0, y)$, $p_0(a, y)$, $p_0(x, 0)$, $p_0(x, b)$ и через них краевые эффекты на границах. Итак, полностью завершено построение функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, и, следовательно, получено решение исходной задачи.

Переходим к обсуждению возможных упрощений, следуя [1—3]. С использованием (1.13) правые части в (2.7), (2.8) имеют оценки

$$\text{(2.9)}\quad [\varepsilon u_x(x, y) + \sqrt{k}u(x, y)]_{x=x_j} \leqslant C_{1j}\exp(-\varkappa\eta_1) + C_{2j}\exp(-\varkappa\eta_2),$$

$$[\varepsilon u_y(x, y) + \sqrt{k}u(x, y)]_{y=y_j} \leqslant D_{1j}\exp(-\varkappa\xi_1) + D_{2j}\exp(-\varkappa\xi_2),$$

где $0 < \varkappa \leqslant \sqrt{k}$; C_{ij}, D_{ij} — константы. Из (2.9) вытекает, что правые части (2.7), (2.8) существенно отличны от нуля лишь вблизи угловых точек.

Если пренебречь второстепенными частями в равенствах (2.7) и (2.8), то получим решение исходной задачи (1.1), (1.2), которое совпадает с решением задачи, предложенным в [1—3]. В методе [1—3] не учитывается влияние угловых погранслоев.

Укороченная задача сформулирована в случае существования осей симметрии относительно граничных условий. Основная часть решения симметрична относительно этих же осей симметрии, и после упрощений возможно разделение пространственных переменных — это хорошо согласуется с результатами [9]. При отсутствии осей симметрии относительно граничных условий формулировка укороченной задачи существенно усложняется, так как краевые условия в угловых точках могут быть разрывными и построение угловых погранслоев существенно затруднено.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Болотин В. В.** Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек // ПММ.— 1960.— Т. 24, вып. 5.
2. **Болотин В. В.** Асимптотический метод исследования задач о собственных значениях для прямоугольных областей // Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию акад. М. И. Мусхелишвили.— М.: Изд-во АН СССР, 1961.
3. **Прочность,** устойчивость, колебания. Справочник/Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко.— М.: Машиностроение, 1968.
4. **Бутузов В. Ф.** Асимптотика решения уравнения $\mu^2\Delta u - k^2(x, y)u = f(x, y)$ в прямоугольной области // ДУ.— 1973.— Т. 9, № 9.
5. **Бутузов В. Ф.** Об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области // ДУ.— 1975.— Т. 11, № 6.
6. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // УМН.— 1960.— Т. 15, вып. 3.
7. **Вахромеев Ю. М., Корнев В. М.** Динамический краевой эффект в стержнях. Формулировка укороченных задач // Изв. АН СССР. МТТ.— 1972.— № 4.
8. **Вахромеев Ю. М., Корнев В. М.** О краевых задачах с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // ДУ.— 1977.— Т. 13, № 7.
9. **Krasny I.** Some problems arising from the application of the asymptotic methods to bending vibration of rectangular plates // Dynam. strojov.— Bratislava; Smolenice, 1970.— V. 2.

Поступила 24 /II 1986 г.

УДК 539.374

О КОРОТАЦИОННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ ТЕОРИИ БОЛЬШИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

П. В. Трусов

(*Пермь*)

В последнее десятилетие резко повысился интерес к задачам упругопластичности с учетом больших деформаций, под которыми здесь будут пониматься деформации с градиентами перемещений, превышающими (покомпонентно) 0,1. Основной вопрос теории больших упругопластических деформаций — установление определяющих соотношений, в формулировке которых широкое распространение нашли некоторые типы объективных производных мер напряженного и деформированного состояний,