УДК 539.374

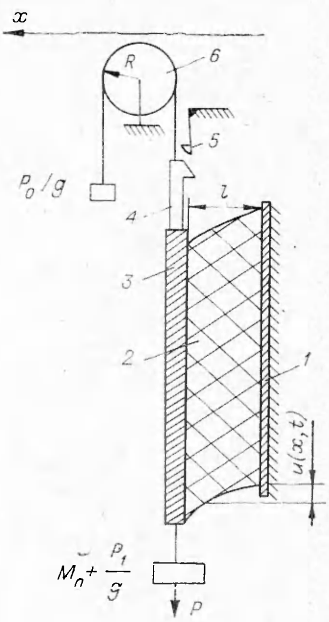
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СТАНДАРТНОГО ЛИНЕЙНОГО ТЕЛА В ПЛАСТОМЕРЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО СДВИГА

П. М. Горбунов

(*Москва*)

Рассмотрим поведение пластомера, содержащего легко деформирующийся материал, локальные механические свойства которого описываются моделью стандартного линейного тела [1—4], характеризующегося тремя физическими величинами: коэффициентом вязкости η, мгновенным модулем сдвига G_0 и длительным модулем сдвига μ.

Пластомер, предназначенный для исследований нетекучих материалов, схематически изображен на фигуре, где *1* — жестко прикрепленная к прибору стальная пластина, *2* — образец толщиной l, *3* — сдвигаемая жесткая пластина, *4* — индикаторный шток, жестко прикрепленный к сдвигаемой пластине, *5* — замок, предназначенный для фиксирования исходного состояния системы и для создания необходимых начальных условий движения пластины, *6* — шкив с приведенным моментом инерции I и внешним радиусом R, M_0 — приведенная масса сдвигаемой пластины и прикрепленного к ней штока, P_1 и P_0 — присоединенные к сдвигаемой пластине грузы, $u(x, t)$— функция смещения бесконечно тонкого вертикального слоя исследуемого материала в направлении действия внешней силы плоскопараллельного сдвига, x — ось координат, t — время. Груз P_0 присоединен к пластине стальной струной. Применяется образец с жесткостью, много меньшей, чем жесткость деталей прибора [5]. В исходном состоянии положение штока удерживается замком жестко. В момент времени $t = 0$ верхний конец штока освобождается от замка и пластина начинает сдвигаться под действием результирующей нагрузки $P = P_1 + M_0g - P_0$. При этом присоединенная масса [5] $M = M_0 + (P_1+P_0)/g + I/R^2$, где P_1/g, P_0/g и I/R^2—приведенные массы грузов P_1, P_0 и вращающегося шкива, g — ускорение свободного падения тел. Предполагается, что сила трения f в подшипниках шкива много меньше, чем нагрузка P, так что величиной f можно пренебречь [5]. Эта система существенно отличается от пластомера, используемого в [5—7]. Отметим ее отличительные особенности.



1. Поскольку сдвиговая нагрузка составляет сложную величину $P = P_1 - P_0 + M_0g$, а $M = M_0 + (P_1 + P_0)/g + I/R^2$, при одинаковых значениях I, R, P можно увеличивать или уменьшать значение M в широких пределах, изменяя P_1 и P_0, но оставляя постоянной P. Это свойство позволяет исследовать материалы как при колебательном движении системы, так и при апериодическом.

2. Описанная система позволяет исключить f путем снятия груза P_0.

Так как упомянутые выше упруговязкие характеристики легко деформирующихся материалов могут зависеть, в частности, от температуры T [4] и этим обусловить процессы деформации образца, то условия эксперимента необходимо выбрать такими, чтобы можно было считать значения T и каждой из используемых характеристик η, G_0, μ, τ одинаковыми по всему объему образца однородного материала. Выберем условия деформации образца так, чтобы можно было записать дифференциальное соотношение между локальной относительной деформацией γ и напряжением σ плоскопараллельного сдвига в виде

$$\sigma + \tau\dot{\sigma} = \mu\gamma + G_0\tau\dot{\gamma}, \quad (1)$$

где $\tau = \eta/(G_0 - \mu)$— время релаксации, $G_0 > \mu$.

Пусть длина образца и пластин пластомера будет достаточно велика по сравнению с расстоянием между пластинами l, а внешняя сдвиговая нагрузка невелика, чтобы максимальная величина напряжения не превосходила критического значения, при котором наступает пластическое течение. Тогда можно считать, что микроструктура образца остается неизменной, а деформация имеет вид плоскопараллельного сдвига. Пусть при этом жесткость образца будет много меньше жесткости деталей пластомера. Пренебрежем деформациями последних и примем, что все элементы приведенной массы M смещаются во времени с одинаковыми скоростью и ускорением, оставаясь параллельными самим себе. Тогда, как и в [5], можно полагать, что масса M сосредоточена в бесконечно тонком слое на сдвигающейся границе $S(l)$ образца, где $S(l)$ — площадь контакта «сдвигающаяся пластина — образец». Под действием сдвиговой силы, созданной нагрузкой P на поверхности $S(l)$ при $\eta \to \infty$, возникает напряжение плоскопараллельного сдвига в виде (2) работы [5]. При $f \ll P$ величиной f можно пренебречь, а при $P \geqslant f$ необходимо снять груз P_0, чтобы величина f была исключена из соотношения вида (2) в [5]. В последнем случае $M = M_0 + P_1/g$. Все другие необходимые допущения и приближения примем такими же, как и в работе [5]. Основным из них считаем предположение, что процесс деформации изотермичен и температура по всей области существования образца одинакова. При принятых допущениях и приближениях движение системы описывается функцией $u(x, t)$, дающей величину вертикального смещения бесконечно тонкого слоя материала на расстоянии x от закрепленной границы образца, причем относительный сдвиг этого слоя дает величину $\gamma = \partial u(x, t)/\partial x$ (формула (3) работы [5]). Используя соотношение (1), запишем дифференциальное уравнение для нахождения функции $u(x, t)$ в виде

$$\tau\rho u_{ttt} + \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + G_0\tau u_{txx}, \quad (2)$$

где ρ — плотность деформируемого материала. Далее примем, что при $t < 0$ верхний конец штока закреплен замком жестко и величина внешней нагрузки на границе $S(l)$ образца есть $P = 0$, а при $t \geqslant 0$ верхний конец штока отомкнут и внешняя нагрузка $P = P_1 + M_0 g = \mathrm{const}$ (или $P = P_1 + M_0 g - P_0$ при $P \gg f$). Тогда два начальных условия задачи можно представить в виде

$$u(x, 0) = 0, \; u_t(x, 0) = 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l. \quad (3)$$

В качестве третьего начального условия возьмем соотношения [5]

$$\rho u_{tt}(x, 0) = G_0 u_{xx}(x, 0) \text{ при } 0 \leqslant x < l; \quad (4)$$

$$SG_0 u_x(l, 0) = P - Mu_{tt}(l, 0) \text{ при } x = l. \quad (5)$$

Граничные условия движущейся массы образца при $t > 0$ также запишем известным способом в виде [3]

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad & S[\mu u_x(l,\ t)+G_0\tau u_{xt}(l,\ t)]= \\
& = P - M[\tau u_{ttt}(l,\ t)+ u_{tt}(l,\ t)],\ u(0,\ t)= 0.
\end{aligned}
$$

Соотношения (4)—(6) означают, что в начальный момент действия груза $P(t = 0)$ образец ведет себя как идеализированно упругая система, а при $t > 0$ — как упруговязкая. Имеется в виду, что до момента $t = 0$, система находилась в исходном естественном состоянии [1, 2], а под действием груза P в любой момент времени $t \geqslant 0$ напряжение и деформация в образце распространяются с конечной скоростью, не превышающей скорости звука [8], причем релаксационные процессы, обусловленные силой сопротивления внутреннего трения, запаздывают относительно моментов распространения напряжения в деформируемой распределенной массе. В связи с этими физическими свойствами характер перераспределения сил на границе $S(l)$ образца выражается условием вида (5) при $t = 0$ и (6) при $t > 0$, а внутри образца и вблизи границы $S(l)$— уравнением (4) при $t = 0$ и (2) при $t > 0$ соответственно.

Все коэффициенты при частных производных в (2)—(6) считаем постоянными. Уравнение (2) с (3)—(6) отличается от задачи, рассмотренной в [5], наличием членов с коэффициентом μ и величины P_0.

Кроме того, если при решении задачи для тела Максвелла исходное уравнение третьего порядка по времени t (см. (4) в [5]) математически преобразуется в уравнение второго порядка с неоднородными начальными условиями, а решение задачи упрощается и математически сводится в конце концов к решению дифференциального уравнения второго порядка без особенностей типа (4), (5) (см. (6), (7) в работе [5]), то в этом случае уравнение (2) принципиально не поддается такому математическому преобразованию, а при определении переходной части искомой функции смещения массы образца особенности типа (4), (5) остаются, оказывая влияние на процесс и результат решения нашей задачи. Отметим, что аналогичная задача, но с другими начальными и граничными условиями рассмотрена в [2,3].

Производя разделение переменных выражений (2)—(6), решение задачи (2) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
& u(x,\ t) = \nu x + 4\nu e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\beta_k \sin\beta_k \frac{x}{l}}{\beta_k(2\beta_k + \sin 2\beta_k)} e^{-\frac{t}{3\tau}} \times \\
(7)\qquad & \times \left[\frac{C_k e^{\alpha_k t} + e^{-\frac{\alpha_k}{2}t}(M_k \cos w_k t + N_k \sin w_k t)}{3\alpha_k^2 + p_k} \right],
\end{aligned}
$$

где β_k — положительные решения уравнения

$$
(8)\qquad \mathrm{ctg}\beta = M\beta/\rho l S.
$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$
C_k = (G_0 - \mu)\beta_k^2/\rho l^2 + 2/9\tau^2 - \alpha_k/3\tau - \alpha_k^2,
$$

$$
M_k = 1/9\tau^2 + \alpha_k/3\tau - 2\alpha_k^2 - \beta_k^2\mu/\rho l^2,
$$

$$
N_k = \frac{1}{w_k}\left[\alpha_k\left(p_k + \frac{1}{6\tau^2} - \frac{3\mu\beta_k^2}{\rho l^2}\right) - \frac{\alpha_k^2}{\tau} - \frac{p_k}{3\tau}\right],
$$

$$\alpha_k = v_k - p_k/3v_k,\ v_k = \sqrt[3]{-q_k/2 + \sqrt{D_k}},$$
$$w_k = \sqrt{3}\,(v_k + p_k/3v_k)/2,\ p_k = G_0\beta_k^2/\rho l^2 - 1/3\tau^2,$$
$$q_k = (\mu - G_0/3)\,\beta_k^2/\tau\rho l^2 + 2/27\tau^3,\ \nu = P/S\mu,$$
$$D_k = p_k^3/27 + q_k^2/4 > 0. \tag{9}$$

Выражение вида (7) с учетом (8) справедливо только при $D_k > 0$ (9). При $D_k < 0$ выражение вида (7) может содержать апериодические решения уравнения для переходной части искомой функции $u\,(x,\ t)$. Для определения пределов применимости (7) удобно преобразовать D_k(9) к виду

$$D_k = \{y_k^2 - by_k/4 + a^3\}\ \mu^3\beta_k^6/27\rho^3l^6, \tag{10}$$

где

$$y_k = \rho l^2/\tau^2\mu\beta_k^2; \tag{11}$$
$$b = a^2 + 18a - 27;\ a = G_0/\mu.$$

Корни трехчлена (10) равны $y_k^{(1)} = b/8 - \sqrt{d}$, $y_k^{(2)} = b/8 + \sqrt{d}$, где $d = (a - 1)(a - 9)^3/64$. Условие положительности D_k (9) выполняется в следующих случаях: $y_k < y_k^{(1)}$ при $d > 0$ или $y_k > y_k^{(2)}$ при $d > 0$, $y_k \neq y_k^{(1)} = y_k^{(2)} = b/8$ при $d = 0$ и для всех y_k при $d < 0$ $(1 < a < 9)$. (В дальнейшем примем $a > 1$, что всегда выполняется для выбранной модели.)

Если $a > 9$ и при этом y_k находится в интервале

$$b/8 - \sqrt{d} < y_k < b/8 + \sqrt{d}, \tag{12}$$

то $D_k < 0$. Поэтому уравнение (2) в данном случае при $a > 9$ уже может содержать упомянутые апериодические решения в сумме ряда переходной функции в выражении вида (7). Рассмотрим случаи существования таких решений. Пусть $Sl\rho/M \ll 1$, что часто реализуется на практике. Тогда корни уравнения (8) можно представить в виде [8]

$$\beta_1 \cong \sqrt{\rho l S/M},\ \beta_k \cong (k - 1)\pi + 2\rho l S/M$$

Допустим, что один из них, например β_1, входящий в соотношение (11), удовлетворяет при $a > 9$ неравенству $y_1 > b/8 + \sqrt{d}$. Тогда могут найтись следующие за ним величины y_k, попадающие в интервал (12) и тем самым обусловливающие наличие упомянутых выше апериодических решений в сумме ряда вида (7). Такие ситуации можно ожидать при исследовании поведения в пластомере резин [4].

Покажем, что при деформации в пластомере эластомеров (находящихся в высокоэластическом состоянии) переходная функция решения вида (7) может реально содержать апериодические решения. Для этого запишем неравенства вида (12) через действительные параметры образца и используемой установки. Возьмем образец с длиной $h = 10$ см, $l = 0{,}4$ см $S = 20$ см^2, $P_0 = 10^6$ дин, $P = 3\cdot 10^4$ дин, $\eta = 10^3$ П, $G_0 - \mu = 3\cdot 10^5$ дин/см^2, $\mu = 3\cdot 10^3$ дин/см^2, $\rho = 1$ г/см^3, $I/R^2 = 40$ г. Тогда $M = 2{,}07\cdot 10^3$ г. Выразим неравенство (12) для первых членов суммы ряда разложения переходной части функции (7) с параметром $\beta_1 \cong \sqrt{\rho l S/M} \ll 1$ в виде

$$(G_0^2/\mu^2 + 18G_0/\mu - 27)/8 - \sqrt{(G_0/\mu - 1)(G_0/\mu - 9)^3/64} < \rho l^2/\tau^2\cdot\mu\beta_k^2 <$$
$$< (G_0^2/\mu^2 + 18G_0/\mu - 27)/8 + \sqrt{(G_0/\mu - 1)(G_0/\mu - 9)^3/64}.$$

Подставляя в это неравенство взятые значения используемых параметров (с приближениями, что $\sqrt{(G_0/\mu - 1)(G_0/\mu - 9)^3/64} \cong 1104$ и $M \cong 2\cdot 10^3$ г), получим $y_1 \cong 1{,}2\cdot 10^3$, $y_k^{(2)} \cong 2{,}6\cdot 10^3$, $y_k^{(1)} \cong 395$, т. е. $395 < y_1 < 2{,}6\cdot 10^3$.

Если подставить в (12) параметр $\beta_2 \cong \pi + 2\rho lS/M$, то y_2 окажется меньше, чем 395, т. е. $y_2 \cong 1{,}6$. Таким образом, при используемых условиях эксперимента первые члены с β_1 в сумме ряда разложения переходной части функции вида (7) отвечают апериодическому движению деформируемой массы, а последующие за ними члены с β_2, β_3, β_4, ... — колебательному.

Поэтому при определении физических величин η, G_0, μ и τ, а также при составлении и отработке программ для расчетов их на ЭВМ с использованием формулы типа (7) следует иметь в виду всевозможные ситуации, возникающие при $a > 9$ и $y_1 > b/8 + \sqrt{d}$ (или $y_1 > b/8 - \sqrt{d}$). Решение вида (7) при $\mu = 0$, как и следовало ожидать, переходит в результат работы [5]. Если положить в (7) $M = 0$ и перейти к пределу при $\eta \to \infty$, то (7) согласуется с решением аналогичной задачи для идеализированно упругой системы [5]. Поскольку в нашем случае масса $M = (P_1 + M_0 g)/g$ (или $P_1/g + P_0/g + M_0$, когда $P \gg f$), представляет интерес также и предел выражения (7) при $\eta \to \infty$, когда $M \neq 0$,

$$u(x, t) - \frac{\nu\mu}{G_0}\left\{x - 4l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\beta_k \sin\beta_k \frac{x}{l} \cos\beta_k \sqrt{\frac{G_0}{\rho l^2}}t}{\beta_k(2\beta_k + \sin 2\beta_k)}\right\}. \tag{13}$$

Таким образом, решение вида (7) является более общим, чем данное в работе [5]. Оно может быть применимо для описания процессов движения стандартного линейного тела, тела Максвелла, а также при исследовании материалов с высокой вязкостью ($\eta \to \infty$).

Видно, что (7) содержит основные локальные (в том числе и упруговязкие) характеристики образца (ρ, G_0, μ, η, τ) и технические характеристики прибора и внешней нагрузки (P, M, S, l, y_k, α_k, w_k) в их весьма сложных соотношениях. В связи с этим выражение (7), представляющее собой функцию ползучести, является конкретным и по этой причине пригодным к описанию конкретных экспериментальных ситуаций. Решение вида (7) можно также использовать в качестве одной из исходных функций как при определении упруговязких свойств образцов, так и при прогнозировании механического поведения легко деформирующихся при сдвиге упруговязких материалов, находящихся в технических системах под воздействием небольших внешних сосредоточенных нагрузок.

Автор выражает благодарность Г. Я. Коренману, И. А. Лукьянову, Э. Г. Позняку, Е. С. Савину за интерес к работе и обсуждение ее результатов.

Поступила 11 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ржаницын А. Р.** Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968.
2. **Ишлинский А. Ю.** Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации.— ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
3. **Постников В. С.** К вопросу затухания колебаний цилиндрического образца.— «Физика металлов и металловедение», 1958, т. 6, вып. 3.
4. **Александров А. П., Лазуркин Ю. С.** Изучение полимеров. I. Высокоэластическая деформация полимеров.— ЖТФ, 1939, т. 9, вып. 14.

5. **Горбунов П. М.** Решение одной задачи о движении упруговязких материалов.— ПМТФ, 1974, № 6.
6. **Сабсай О. Ю., Колтунов М. А., Виноградов Г. В.** Аналитическое описание ползучести полимеров в текучем состоянии в линейной области деформирования.— «Механика полимеров», 1972, № 4.
7. **Бартенев Г. М., Зотеев Н. П., Ермилова Н. В.** Особенности высокоэластического поведения каучукоподобных полимеров при малых скоростях деформирования.— «Механика полимеров», 1974, № 4.
8. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.

УДК 620.178.7

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ОДНОСЛОЙНЫХ И МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СОСУДОВ ПРИ ВНУТРЕННЕМ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ ИМПУЛЬСАМИ РАЗЛИЧНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

В. А. Баталов, А. Г. Иванов, Г. Г. Иванова,
В. Н. Минеев, В. Н. Софронов, В. И. Цыпкин

(*Москва*)

Использование взрывчатых веществ (ВВ) в технологических процессах и экспериментальных исследованиях вызывает необходимость обеспечить герметизацию продуктов взрыва (ПВ), безопасность персонала и защиту оборудования при детонации ВВ. Часто условия испытаний предъявляют жесткие требования к габаритам и весу сосудов, предназначенных для локализации действия импульсных нагрузок различного вида.

При изготовлении сосудов высокого давления, работающих при статических нагрузках (где определяющим рабочим параметром является давление), широко используются многослойные конструкции, в которых удается повысить уровень рабочего давления и избежать катастрофического разрушения конструкции в целом вследствие торможения трещин в отдельных слоях [1, 2].

Представляет интерес выяснить поведение многослойных оболочек при воздействии импульсных нагрузок различной длительности.

Исследовалось разрушение замкнутых цилиндрических сосудов с наружным радиусом R_0 и общей толщиной стенок δ_0 (фиг. 1), заполненных нормальной воздушной атмосферой, при взрыве внутри них заряда ВВ.

Различие в длительности импульсного нагружения достигалось различными схемами нагружения стенок сосудов. В первом случае (фиг. 1, *а*) стенки сосуда нагружались ПВ, во втором (фиг. 1, *б*)—ударом тонкой дополнительной оболочки *3*, разгоняемой ПВ.

Сосуды изготовлены из аустенитной нержавеющей стали Х18Н10Т (в состоянии поставки) и при одинаковых геометрических размерах имели разное исполнение корпуса *1*. Однослойный корпус изготавливался из трубной заготовки (ГОСТ 5632-61) и имел один сварной шов вдоль образующей цилиндра. Корпус сочленялся без зазора с цельнотянутым сердечником *2* толщиной $\delta' = 2$ мм (фиг. 1). Многослойный корпус изготавливался путем намотки на сердечник пяти слоев миллиметровой ленты (лист 1 ГОСТ 3680-71) шириной 4 R_0, т. е. был рулонированным [1]. Для исключения зазора между слоями намотка ленты осуществлялась с незначительным натягом; внутренний и внешний концы ленты закреплялись сваркой. Крышки сосудов *4* крепились двенадцатью болтами М 16. Исходные ме-