

АСИМПТОТИКА ТЕЧЕНИЯ ПРИ ПАДЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ
НА КЛИНОВИДНУЮ ПОЛОСТЬ

Я. М. Каждан

(Москва)

Исследуется асимптотика движения, возникшего в результате падения ударной волны на клиновидную полость в металле, при стремлении амплитуды волны к нулю. В работе [1] было показано, что при этом течение разбивается на две области. В первой области главный член, определяющий течение, совпадает со звуковым приближением. Во второй области течение в главном члене описывается уравнениями несжимаемой жидкости.

В данной работе определение течения во второй области сведено к решению сингулярного нелинейного интегрального уравнения. Для серии значений углов раствора полости найдено численное решение.

1. По металлической среде с вырезанной клиновидной полостью, ребро которой совпадает с осью z , плоскость симметрии — с плоскостью yz , а угол раствора равен 2γ ($\gamma < \pi/2$), идет ударная волна, параллельная плоскости xz с постоянным давлением $p = p_1$. Уравнение состояния среды

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} (\delta^{\gamma} S - 1) \quad (1.1)$$

Перед волной скорость $u = 0$, давление $p = 0$, плотность $\rho = \rho_0$, скорость звука $c = c_0$, относительная плотность $\delta = 1$ и энтропийная величина $S = 1$. В момент $t = 0$ фронт ударной волны пересекает ребро полости. Течение в металле при $t > 0$ становится двумерным и автомодельным, т. е. газодинамические функции зависят от двух переменных: $\xi = x/t$, $\eta = y/t$. Так как плоская ударная волна постоянной амплитуды движется по покоящемуся веществу, то течение за фронтом ударной волны будет также и потенциальным. В силу автомодельности потенциал течения представим в виде

$$\varphi(x, y, t) = t\Phi(\xi, \eta) \quad (1.2)$$

Определение течения, возникающего за фронтом ударной волны, возможно путем численного интегрирования соответствующей системы уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. Однако при существенном предположении малости отношения

$$\varepsilon = p_1 / \rho_0 c_0^2 \ll 1 \quad (1.3)$$

может быть получена асимптотика течения при $\varepsilon \rightarrow 0$. С этих позиций эта задача рассматривалась в работе [1]. Исходя из малости значения ε , было выписано звуковое приближение. Оказалось, что оно может служить аппроксимацией течения лишь в области I , где

$$\varepsilon r^{\alpha-2} \ll 1, \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} / c_0, \quad \alpha = \pi/2(\pi - \gamma) \quad (1/2 < \alpha < 1) \quad (1.4)$$

В этой области асимптотика течения при $r \rightarrow 0$ выглядит так:

$$\begin{aligned} \Phi &\approx 2^{2-\alpha} \varepsilon c_0^2 \cos \alpha \gamma \cos \alpha (\pi - \theta) r^\alpha / (\alpha - 1) \pi \\ \delta - 1 &\approx 4\varepsilon \cos \alpha \gamma \cos \alpha (\pi - \theta) r^\alpha / (\alpha - 1) \pi \\ \theta &= \arctg \xi / \eta. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для продолжения решения в области II , где

$$\varepsilon r^{\alpha-2} \approx O(1) \quad (1.6)$$

была совершена замена переменных, учитывающая определение области II (1.6) и асимптотику (1.5)

$$\begin{aligned} \Phi &= \varepsilon^{2/(2-\alpha)} \tilde{\Phi}_1, \quad \xi = \varepsilon^{1/(2-\alpha)} \xi_1, \quad \eta = \varepsilon^{1/(2-\alpha)} \eta_1, \quad r = \varepsilon^{1/(2-\alpha)} R, \\ -1 &= \varepsilon^{2/(2-\alpha)} \Delta_1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

При этом области II соответствует область конечных значений R , а предельному переходу $R \rightarrow \infty$ соответствует переход в область I . Функция $\Phi_1(\xi_1, \eta_1)$, как следует из подстановки (1.7) в систему газодинамических уравнений, при $\varepsilon \rightarrow 0$ и конечных значениях R в главном члене должна удовлетворять уравнению Лапласа, т. е. в главном члене течение в этой области описывается уравнениями несжимаемой жидкости. Определение асимптотики течения в этой области при $\varepsilon \rightarrow 0$ составляет содержание предлагаемой работы.

В силу симметрии течения достаточно рассмотреть область, ограниченную осью симметрии и неизвестной свободной границей $\eta_1 = \eta_1(\xi_1)$, $\xi_1 \geq 0$, после чего задача может быть сформулирована так: для заданного угла γ найти уравнение свободной границы $\eta_1 = \eta_1(\xi_1)$ и гармоническую функцию $\Phi_1(\xi_1, \eta_1)$, удовлетворяющую граничным условиям на свободной границе

$$\frac{d\eta_1}{d\xi_1} = \frac{\Phi_{1\eta_1} - \eta_1}{\Phi_{1\xi_1} - \xi_1} \quad (1.8)$$

$$p(\xi_1, \eta_1(\xi_1)) = 0 \quad (1.9)$$

На оси симметрии

$$\Phi_{1\xi_1} = 0 \quad (1.10)$$

Кроме того, для «склейки» со звуковым приближением при $R \rightarrow \infty$ должна иметь место асимптотика

$$\Phi_1 \approx 2^{2-\alpha} c_0^2 \cos \alpha \gamma \cos \alpha (\pi - \theta) R^\alpha / (\alpha - 1) \pi \quad (1.11)$$

и на свободной границе

$$\xi_1 \approx \operatorname{tg} \gamma \eta_1 \quad (1.12)$$

Индекс 1 в дальнейшем опускается.

2. Сформулированная только что задача по постановке близка к задаче о равномерном погружении клина в полупространство, занятое идеальной несжимаемой жидкостью. З. Н. Добровольская, решая задачу о клине, свела ее к отысканию решения некоторого нелинейного сингулярного интегрального уравнения [2, 3]. Этот метод использован и в этой работе.

В плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ рассматривается комплексный потенциал

$$F(\zeta) = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta) \quad (2.1)$$

Область течения в плоскости ζ представляется как образ при конформном отображении $\zeta = \zeta(w)$ верхней полуплоскости комплексного переменного $w = u + iv$. Это отображение строится так, что начало координат ($u = 0, v = 0$) переходит в вершину свободной границы ζ_A ($\xi = 0, \eta = \eta_A$), действительная положительная полуось ($u \geq 0, v = 0$) — в ось симметрии течения ($\xi = 0, \eta \leq \eta_A$), отрицательная полуось ($u \leq 0, v = 0$) — в свободную границу, а точка $w = \infty$ — в точку $\zeta = \infty$. Учитывая асим-

птотику (1.12), отсюда следует, что

$$\arg \zeta'(u) = -\pi/2 \text{ при } 0 \leq u < \infty \quad (2.2)$$

$$\arg \zeta'(u) \rightarrow -(\pi/2 + \gamma) \text{ при } u \rightarrow -\infty \quad (2.3)$$

(Здесь и далее ' означает производную.)

Потенциал $F(\zeta)$ при этом переходит в функцию $F(w)$, определенную в верхней полуплоскости w . Из граничных условий (1.8) и (1.9) следуют соотношения, связывающие функции $\zeta(w)$ и $F(w)$:

$$\operatorname{Re} [iF'(u)] = \overline{\operatorname{Re} [i\zeta'(u)\bar{\zeta}(u)]} \text{ при } -\infty < u < 0 \quad (2.4)$$

$$p = 0 \quad \text{при } -\infty < u < 0 \quad (2.5)$$

из условия симметрии течения (1.10)

$$\operatorname{Re} [iF'(u)] = 0 \text{ при } 0 < u < \infty \quad (2.6)$$

и, наконец, должна быть выполнена следующая из (1.11) асимптотика

$$F(\zeta) = (2c_0)^{2-\alpha} \cos \alpha\gamma (i\zeta)^\alpha / (\alpha - 1)\pi \text{ при } \zeta \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

Таким образом, задача может быть сформулирована так: определить две аналитические функции $\zeta(w)$ и $F(w)$ по граничным условиям, заданным на действительной оси плоскости w и асимптотике на бесконечности. Определение этих функций допускает одну степень произвола: переменная w может быть помножена на произвольную положительную постоянную.

Потенциал $F(w)$ может быть исключен из граничных условий, после чего получится граничная задача для одной функции $\zeta(w)$. Для этой цели используется функция Вагнера [4]

$$h(\zeta) = \int_{\zeta_A}^{\zeta} \sqrt{d^2F/d\zeta^2} d\zeta \quad (2.8)$$

В плоскости h образом области течения в плоскости ζ будет угол $\pi/4$: $0 \leq \arg h(\zeta) \leq \pi/4$, причем свободная граница отображается на луч $\arg h(\zeta) = \pi/4$, а ось симметрии на луч $\arg h(\zeta) = 0$ (см. приложение 1). Поэтому

$$h[\zeta(w)] = D_0 w^{1/4}, \quad D_0 > 0 \quad (2.9)$$

Следовательно

$$\frac{d^2F}{d\zeta^2} = \left(\frac{dh}{d\zeta}\right)^2 = \left(\frac{dh}{dw}\right)^2 \left(\frac{d\zeta}{dw}\right)^{-2} = \frac{1}{16} D_0^2 w^{-3/2} \left(\frac{d\zeta}{dw}\right)^{-2} \quad (2.10)$$

и так как скорость вершины свободной границы ζ_A в силу автомодельности совпадает с вектором ζ_A , то

$$\frac{dF}{d\zeta} = \bar{\zeta}_A + \frac{D_0^2}{16} \int_0^w w^{-3/2} \left(\frac{d\zeta}{dw}\right)^{-1} dw \quad (2.11)$$

($\bar{\zeta}_A$ — комплексно сопряженное значение ζ_A).

С помощью квадратуры (2.11) из граничного условия (2.4) исключается $F'(u)$ и в результате на отрицательной части действительной оси по-

лучается интегральное уравнение уже для одной функции $\zeta'(u)$

$$\operatorname{Re} \left\{ i \zeta'(u) \int_0^u \overline{\zeta'(u)} - D_0^2 / [16u^{3/2} \zeta'(u)] \right\} du = 0 \quad (2.12)$$

где под $\zeta'(u)$ понимается предельное значение $\zeta'(w)$ при $w \rightarrow u$. Представляется удобным комплексную функцию $\zeta'(u)$ заменить действительной функцией $f(u)$, определенной равенством

$$f(u) = \arg \zeta'(u) + \pi / 2 + \gamma \quad (2.13)$$

Для этого вводится в рассмотрение функция

$$q(w) = -i \ln [iw^{\gamma/\pi} \zeta'(w)] \quad (2.14)$$

Из (2.13) и (2.2) следует:

$$\operatorname{Re} q(w) = f(u) \text{ при } -\infty < u \leq 0, \operatorname{Re} q(w) = 0 \text{ при } 0 < u < \infty \quad (2.15)$$

Во всей верхней полуплоскости w с помощью интеграла Шварца

$$J(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{f(u) du}{u-w} \quad (2.16)$$

восстанавливается функция $q(w)$ и затем $\zeta'(w)$

$$\zeta'(w) = -i D w^{-\gamma/\pi} \exp [J(w)], \quad D > 0 \quad (2.17)$$

после чего в результате перехода к пределу при $w \rightarrow u$ в формуле (2.17) согласно теореме Сохоцкого и подстановке предельного значения в уравнение (2.12) получается интегральное уравнение для функции $f(u)$

$$\frac{df(u)}{du} = \frac{D_0^2 (-u)^{\gamma/\pi - 3/2} \exp [-J(u)]}{16D^2 \int_0^u [-u_1]^{-\gamma/\pi} \exp [J(u_1)] du_1} \quad (2.18)$$

Сингулярный интеграл J понимается в смысле главного значения. Из определения (2.13) и асимптотики (2.5) следует:

$$f(-\infty) = 0 \quad (2.19)$$

После того как функция $f(u)$ будет найдена из (2.17) с точностью до постоянной ζ_A , восстанавливается отображающая функция $\zeta(w)$, уравнение свободной границы

$$\zeta(u) = \zeta_A - i D \int_0^u u_1^{-\gamma/\pi} \exp [J(u_1) + if(u_1)] du_1 \quad (4.20)$$

распределение скоростей

$$F'(w) = \bar{\zeta}_A + i \frac{D_0^2}{16D} \int_0^w w_1^{\gamma/\pi - 3/2} \exp [-J(w_1)] dw_1 \quad (2.21)$$

Давление p определяется законом Бернулли.

В силу определения (2.13) искомая функция $f(u)$ должна быть ограничена. Кроме того, в дальнейшем предполагается, что при $u \rightarrow -\infty$ функция $f(u)$ стремится к нулю, как $(-u)^{-k}$, а ее производная $f'(u)$ — как

$(-u)^{-(k+1)}$, где $k > 0$. Тогда интеграл J конечен для каждого значения w и при $w \rightarrow -\infty$ стремится к нулю. Поэтому функция $f(u)$ имеет при любом значении $u \neq 0$ конечную отрицательную производную, и при $u \rightarrow -\infty$ справедливы асимптотики

$$f(u) \approx \frac{D_0^2}{8D^2} \frac{\pi - \gamma}{4\gamma - 3\pi} |u|^{(4\gamma - 3\pi)/2\pi}, \quad f'(u) \approx -\frac{D_0^2}{16D^2} \frac{\pi - \gamma}{\pi} |u|^{(4\gamma - 5\pi)/2\pi} \quad (2.22)$$

Таким образом, сделанные предположения не входят в противоречие с уравнением (2.18) и $k = (4\gamma - 3\pi) / 2\pi$. Так как производная $f'(u)$ отрицательна при любом значении u , то функция $f(u)$ монотонно растет от $f(0)$ до 0, при изменении u от 0 до $-\infty$, при этом оказывается, что значение $f(0)$ должно удовлетворять неравенству

$$\gamma - \pi < f(0) < \gamma - \frac{3}{4}\pi \quad (2.23)$$

Иначе из асимптотики $J(w)$ при $w \rightarrow 0$ следует, что либо $f(0) \rightarrow \infty$, либо $f(u) \equiv 0$, что недопустимо. Неравенство (2.23) имеет геометрическое содержание, ибо угол β между осью симметрии и свободной границей в ее вершине определяется равенством

$$\beta = \gamma - f(0) \quad (2.24)$$

Для завершения постановки задачи необходимо найти значение трех, пока неопределенных параметров (D_0 , D , ζ_A). Их значения определяются заданной асимптотикой на бесконечности. Так как $F'(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$, то из (2.2) следует:

$$\zeta_A = \frac{D_0^2}{16D} i \int_0^\infty u_1^{\gamma/\pi - 3/2} \exp[-J(u_1)] du_1 \quad (2.25)$$

Согласно (2.17) и (2.21) при $w \rightarrow \infty$ величина $\zeta(w) \rightarrow \infty$ и

$$F'(\zeta) \approx \frac{D_0^2}{D^2} i^\alpha \frac{\pi^{2-\alpha} (\pi - \gamma)^{\alpha-1}}{8(2\gamma - \pi)} \zeta^{\alpha-1} \quad (2.26)$$

Из сравнения с заданной асимптотикой (2.7) следует:

$$D_0^2 / D^2 = 16(\alpha)^{\alpha-1} c_0^{2-\alpha} \cos \alpha\gamma / \pi \quad (2.27)$$

Оказывается, условия (2.25) и (2.27) полностью определяют течение, так как при выполнении этих условий график свободной границы и распределение скоростей в плоскости $\xi\eta$ не зависят от конкретных значений D_0 и D .

Действительно, пусть (D_{01}, D_1) и (D_0, D) — две пары чисел, удовлетворяющих условию (2.27). Тогда

$$D_0^2 / D_{01}^2 = (D / D_1)^{\alpha/2} = k^{-1/4} \quad (2.28)$$

где k — некоторое положительное число.

Если $f(u)$ соответствует (D_{01}, D_1) , то $f(u/k)$ соответствует (D_0, D) . Поэтому $\zeta(u)$ и $F'(\zeta)$, соответствующие (D_0, D) , определяются формулами

$$\zeta(u) = \zeta_A - iD_1 \int_0^{u/k} u_1^{-\gamma/\pi} \exp[J(u_1) + if(u_1)] du_1 \quad (2.29)$$

$$F'(\zeta) = \bar{\zeta}_A + i \frac{D_{01}^2}{16D_1} \int_0^{w/k} w_1^{\gamma/\pi - 3/2} \exp[-J(w_1)] dw_1 \quad (2.30)$$

т. е. в плоскости ζ форма свободной границы и распределение скоростей не изменились. Поэтому $D_0^2/16 D^2$ можно принять равным единице. Но тогда

$$D = c_0 [(\alpha)^{\alpha-1} \cos \alpha \gamma]^{1/(2-\alpha)} \pi^{1/(\alpha-2)}, \quad D_0 = 4D \quad (2.31)$$

3. Итак, задача сведена к отысканию решения $f(u)$ интегрального уравнения (2.18) с начальным значением (2.19). Функция $f(u)$ должна быть ограниченной, дифференцируемой, монотонно убывающей функцией u

$$f(0) \leq f(u) < 0 \quad (3.1)$$

причем

$$\gamma - \pi < f(0) < \gamma - 3/4 \pi \quad (3.2)$$

Численное решение уравнения (2.18) проводилось методом итераций для серии значений угла γ в интервале $0 < \gamma < \pi/2$. Учитывая, что на некотором итерационном шаге полученное значение $f(0)$ может выйти из допустимого интервала (3.2), итерационный процесс был построен следующим образом. Пусть на n -м шаге в результате подстановки в правую часть уравнения (2.18) функции $f_{n-1}(u)$ получена функция $f_{n1}(u)$ и

$$x = f_{n1}(0) / f_{n-1}(0) \quad (3.3)$$

Тогда в качестве результата n -й итерации принимается функция

$$f_n(u) = \frac{f_n(0)(1+u^2)f_{n1}(u)}{f_n(0) + f_n(0)u^2} \quad (3.4)$$

где значение $f_n(0)$ определяется формулой

$$f_n(0) = f_{n-1}(0) - \frac{(\gamma - \pi - f_{n-1}(0))(\gamma - 3/4\pi - f_{n-1}(0))(x-1)}{(\gamma - \pi - f_{n-1}(0)) - (\gamma - 3/4\pi - f_{n-1}(0))x} \quad (3.5)$$

Если $f_{n-1}(u)$ — ограниченная функция u на интервале $-\infty < u < 0$, удовлетворяющая условию (3.2) и вместе со своей производной асимптотике (2.22), то

$$J_{n-1}(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{f_{n-1}(u_1)}{u_1 - u} du_1 \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

при $u \rightarrow -\infty$. Поэтому при $u \rightarrow -\infty$ в силу уравнения (2.18) и формулы (3.5) функции $f_{n-1}(u)$ и $f_n(u)$ вместе со своими производными удовлетворяют асимптотике (2.22), а функция $f_n(u)$ удовлетворяет условию (3.2).

4. Функция $f_{n1}(u)$ определяется уравнением

$$\frac{df_{n1}}{du} = \frac{(-u)^{(2\gamma-3\pi)/2\pi} \exp[-J_{n-1}(u)]}{\int_0^u (-v)^{-\gamma/\pi} \exp[J_{n-1}(v)] dv} \quad (f_{n1}(-\infty) = 0) \quad (4.1)$$

Так как $f_{n-1}(0) = \gamma - \beta$, где β — некоторая величина, удовлетворяющая неравенству $3/4 \pi < \beta < \pi$, то при $u \rightarrow 0$

$$J_{n-1}(u) \approx [(\gamma - \beta)/\pi] \ln(-u), \quad \frac{df_{n1}}{du} \approx A (-u)^{\gamma\beta/\pi - 3/2} \rightarrow \infty \quad (4.2)$$

при $u \rightarrow -\infty$

$$df_{n1}/du \sim (-u)^{(4\gamma-5\pi)/2\pi} \quad (4.3)$$

Для удобства численного интегрирования желательно уравнение (4.1) заменить эквивалентным уравнением или системой уравнений, где промежуток интегрирования был бы конечен, не было бы расходящихся интегралов и бесконечных производных. Эта программа была осуществлена следующим образом.

Бесконечный промежуток интегрирования $0 > u > -\infty$ был сведен к конечному интервалу $0 < \tau < 1$ при помощи замены переменных

$$u = -\tau^\delta (1 - \tau)^{-\lambda} \quad (\delta = 2\pi / (4\beta - 3\pi), \quad \lambda = \pi / (\beta - \gamma)) \quad (4.4)$$

Чтобы избежать расходящихся интегралов, встречающийся в правой части интеграл типа Коши был представлен в следующем виде:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{f_{n-1}(v) dv}{v-u} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(v-u)} \left[f_{n-1}(v) - \frac{f_{n-1}(0)}{1-v} \right] dv + \frac{f_{n-1}(0) \ln(-u)}{\pi(1-u)} \quad (4.5)$$

Счет интеграла, стоящего в знаменателе уравнения (4.1), выполнялся в виде интегрирования дифференциального уравнения для некоторой функции $\chi_n(u)$, связанной с интегралом следующей формулой:

$$\int_0^u (-v)^{-\gamma/\pi} \exp[J_{n-1}(v)] dv = (-u)^{(\pi-\beta)/\pi} / \chi_n(u) \quad (4.6)$$

Такое представление связано с тем, что при $u \rightarrow 0$ стоящий слева интеграл стремится к нулю, как $(-u)^{(\pi-\beta)/\pi}$, а при $u \rightarrow -\infty$ стремится к бесконечности.

Для гладкости счета при $\tau \rightarrow 1$, функция f_{n1} была заменена функцией R_{n1} согласно формуле

$$f = R [1 + (-u)^{(4\beta-3\pi)/2\pi}] \quad (4.7)$$

После выполнения преобразований (4.4)–(4.7) уравнение (4.1) было заменено эквивалентной системой уравнений

$$\frac{d\chi_n}{d\tau} = \left[\frac{\delta}{\tau} + \lambda \frac{1}{1-\tau} \right] \left[\chi_n^2 L_{n-1}(\tau) + \frac{\pi-\beta}{\pi} \chi_n \right] \quad (4.8)$$

$$\frac{dR_n}{d\tau} = - \left[\delta + \lambda \frac{\tau}{1-\tau} \right] \left[\frac{\chi_n}{L_{n-1}(\tau)} + \frac{R_{n1}}{\delta} \right] \frac{1}{\tau + (1-\tau)^{\lambda/\delta}} \quad (4.9)$$

где

$$L_{n-1}(\tau) = (-u)^{u/[\lambda(u-1)]} \exp \left\{ - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{[\delta(1-y) + \lambda y] y^{\delta-1} (1-y)^{-(\lambda+1)}}{[y^\delta (1-y)^{-\lambda} - \tau^\delta (1-\tau)^{-\lambda}]} \varphi_{n-1}(y) dy \right\}$$

$$\varphi_{n-1}(y) = \left[R_{n-1}(y) (1 + y(1-y)^{-\lambda/\delta}) - \frac{R_{n-1}(0)}{1 + y^\delta (1-y)^{-\lambda}} \right] \quad (4.10)$$

Входящий в $L_{n-1}(\tau)$ интеграл понимается в смысле главного значения, т. е.

$$\int_0^1 \frac{[\delta(1-y) + \lambda y] y^{\delta-1} (1-y)^{-(\lambda+1)}}{[y^\delta (1-y)^{-\lambda} - \tau^\delta (1-\tau)^{-\lambda}]} \varphi(y) dy = \quad (4.11)$$

$$= \int_0^1 \left\{ \frac{[\delta(1-y) + \lambda y] y^{\delta-1} (1-y)^{-(\lambda+1)} \varphi(y) y - \tau}{y^\delta (1-y)^{-\lambda} - \tau^\delta (1-\tau)^{-\lambda}} - \varphi(\tau) \right\} \frac{dy}{y-\tau} + \varphi(\tau) \ln \frac{1-\tau}{\tau}$$

Интегрирование системы (4.8), (4.9) было осуществлено в два этапа.
1. Интегрировалось уравнение (4.8) от $\tau = 0$ до $\tau = 1$

$$\chi_n(0) = -\pi^{-1}(\pi - \beta)L_{n-1}(0), \quad \chi(1) = 0 \quad (4.12)$$

Точка ($\tau = 0, \chi = \chi(0)$) является седлом, а точка ($\tau = 1, \chi = 0$) — узлом для уравнения (4.1). Выход из точки ($\tau = 0, \chi = \chi(0)$) осуществляется согласно асимптотике

$$\chi(\tau) = \chi(0) - \frac{(\pi - \beta)^2 \delta \operatorname{ctg}(1 - 1/\delta)\pi}{\pi^2(2\beta - \pi)L_{n-1}^2(0)} \tau \quad (4.13)$$

при этом интегральная кривая приходит в точку $\tau = 1, \chi = 0$ согласно асимптотике

$$\chi_n(\tau) \approx \frac{\gamma - \pi}{\pi} \left[1 + \frac{\delta}{\lambda} (1 - \tau) + C(1 - \tau)^{(\pi - \gamma)/(\beta - \gamma)} \right] (1 - \tau) + \dots \quad (4.14)$$

где C — константа, полученная в результате интегрирования.

2. После получения функции $\chi_n(\tau)$ интегрировалось уравнение (4.9) от точки $\tau = 1$ до точки $\tau = 0$. При $\tau \rightarrow 1$ функция $R_{n1}(\tau) \rightarrow 0$. Для лучшего учета асимптотики (4.14) функцию $R_{n1}(\tau)$ целесообразно представить в следующем виде:

$$R_n(\tau) \approx \frac{2(\pi - \gamma)}{4\gamma - 3\pi} (1 - \tau)^2 \left\{ 1 - (1 - \tau)^{\lambda\gamma\delta} + \left[1 - 4 \frac{(\lambda - 2\delta)(4\gamma - 3\pi)}{(\lambda - 3\delta)(4\beta - 3\pi)} - \frac{\lambda\delta [\pi\chi_n(\tau) - (\gamma - \pi)(1 - \tau)]}{\pi(\lambda - 3\delta)(1 - \tau)^2} \right] (1 - \tau) + \dots \right\} \quad (4.15)$$

Значение функции $R_n(\tau)$ при $\tau = 0$ может быть получено только в результате интегрирования.

Уравнения (4.8) и (4.9) интегрировались по методу Эйлера с пересчетом с постоянным шагом h , а интегралы считались по формуле Гаусса с n узлами. Оказалось, что $h = 0.01$ и $n = 16$ обеспечивают достаточную точность.

ν	β	$\eta_A, \text{ км/сек}$
$11\pi/24$	2.8762	1.6563
$5\pi/12$	2.9148	1.9443
$\pi/3$	2.9915	2.2988
$\pi/4$	3.0468	3.5548
$\pi/6$	3.0905	4.8422
$\pi/12$	3.1260	7.5936
$\pi/24$	3.1384	11.6282

5. Согласно преобразованиям (4.4) и (4.7) искомой функцией стала $R(\tau)$. Соответственно были преобразованы итерационные формулы (3.3) — (3.5). В качестве $R_0(\tau)$ была взята монотонно возрастающая функция τ , удовлетворяющая условиям

$$\gamma - \pi < R_0(0) < \gamma - 3/4\pi, \quad R_0(\tau) \approx \frac{2(\pi - \gamma)}{4\gamma - 3\pi} (1 - \tau)^2 \quad \text{при } \tau \rightarrow 1 \quad (5.1)$$

Итерации проводились до тех пор, пока не выполнялось неравенство

$$M(n) = \max |R_{n1}(\tau) / R_{n-1}(\tau) - 1| \leq 0.001 \quad (5.2)$$

При выбранном методе итерации функция $M(n)$ оказалась монотонно убывающей и быстро стремящейся к нулю. С уменьшением угла γ число итераций, необходимых для выполнения (5.2), росло.

Полученная функция $R(\tau)$ использовалась для определения профиля свободной границы согласно уравнениям

$$\begin{aligned} \xi &= \tau^{\delta(\pi-\beta)/\pi} (1-\tau)^{-\lambda(\pi-\gamma)/\pi} \xi_1, & \eta &= \eta_A + \tau^{\delta(\pi-\beta)/\pi} (1-\tau)^{-\lambda(\pi-\gamma)/\pi} \eta_1 \\ \frac{d\xi_1}{d\tau} &= a(\tau) \sin b(\tau) + \xi_1 c(\tau), & \frac{d\eta_1}{d\tau} &= -a(\tau) \cos b(\tau) + \eta_1 c(\tau) \quad (5.3) \\ a(\tau) &= D [\delta(\tau-1)/\tau - \lambda] L(\tau) \\ b(\tau) &= R(\tau) [1 + \tau(1-\tau)^{-\lambda/\delta}] - \gamma \\ c(\tau) &= (\beta - \pi) \delta / \pi \tau - (\pi - \gamma) \lambda / \pi (1 - \tau) \end{aligned}$$

Значение η_A , совпадающее со скоростью в вершине свободной границы, согласно (2.25) определяется формулой

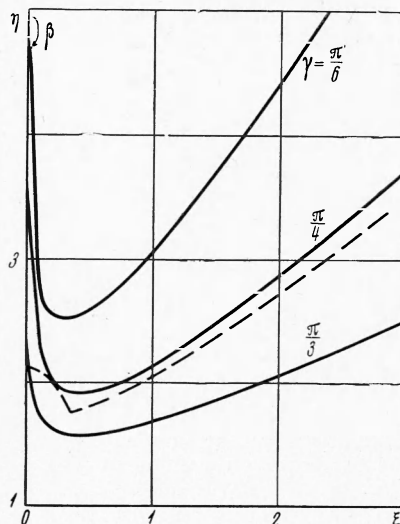
$$\begin{aligned} \eta_A &= D \int_0^1 u^{(l+l+u/k)/(1-u)} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi(\tau_1) u_1}{u_1 + u} \left(\frac{\delta}{\tau_1} + \frac{\lambda}{1-\tau_1} \right) d\tau_1 \right] \left(\frac{l}{\tau} + \frac{k}{1-\tau} \right) d\tau \\ u &= \tau^l (1-\tau)^{-k}, \quad u_1 = \tau_1^\delta (1-\tau_1)^{-\lambda}, \quad l = 2\pi / (2\beta - \pi), \quad k = \pi / (\pi - 2\gamma) \quad (5.4) \end{aligned}$$

Профили свободных границ были определены для серии значений угла γ . Выше приведена таблица соответствующих значений углов γ , β и величины η_A . На фигуре приведены графики свободных границ в плоскости $\xi\eta$, определенной в п. 1. Значения η_A и графики свободных границ соответствуют значениям $\varepsilon = 0.1$ и $c_0 = 5.5$ км/сек.

Как следует из приведенной таблицы, при $\gamma \rightarrow \pi/2$ угол β близок к 0.9π . С другой стороны, очевидно, что при угле раствора полости $2\gamma = \pi$ величина угла $\beta = \pi/2$. Таким образом, сколь угодно малое отклонение угла γ от величины $\pi/2$ ведет к конечному изменению угла β .

Численное решение этой задачи было выполнено на ЭВМ БЭСМ-4.

Для значения угла $\gamma = \pi/4$ был выполнен расчет падения ударной волны на клиновидную полость разностным методом. Использовалась методика для счета двумерных нестационарных задач газовой динамики в областях со сложной геометрией, разработанная С. К. Годуновым, А. В. Забродиным, Л. А. Плинер, Г. П. Прокоповым. Полученный при этом график свободной границы для сравнения нанесен пунктиром на фигуре. Автор признателен А. В. Забродину, Л. А. Плинер, Г. П. Прокопову за полезное обсуждение результатов, а Н. В. Баничук за программирование и расчет.



Приложение. Образом области течения в плоскости h будет угол

$$0 \leq \arg h(\zeta) < \pi/4$$

Действительно, из (1.8) и (1.9) следует, что вдоль свободной границы справедливо соотношение

$$d^2 F / d\zeta^2 \approx -s d^2 s / d\zeta^2 \quad (1)$$

где s — длина дуги, отсчитываемая от вершины свободной границы ζ_A [5]. Так как

$$d\zeta/ds = e^{ig(s)} \quad (2)$$

где $g(s)$ — действительная функция, то в силу (2.8), (1) и (2)

$$h(\zeta) = \int_0^s \sqrt{isg'(s)} ds \quad (3)$$

Предполагается, что свободная граница имеет кривизну постоянного знака, а именно $g'(s) > 0$. (При $g'(s) < 0$ асимптотика (2.7) не может быть выполнена.) Тогда в силу (3) на свободной границе $\arg h(\zeta) = \pi/4$. Далее, вдоль оси симметрии $\xi = 0$

$$\frac{d^2F}{d\zeta^2} = - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} \Big|_{\xi=0}$$

При естественном предположении, что скорость на оси симметрии монотонная функция η , знак $d^2F/d\zeta^2$ совпадает со знаком, полученным из асимптотики (2.7)

$$d^2F/d\zeta^2 \approx - (2c_0)^{2-\alpha} \cos \alpha\gamma (-\eta)^{\alpha-2} < 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow -\infty \quad (4)$$

Поэтому вдоль оси симметрии

$$h(\zeta) = i \int_{\zeta_A}^{\eta} \sqrt{d^2F/d\zeta^2} d\eta > 0 \quad (5)$$

и $h(\zeta)$ совпадает с действительной положительной осью ($h_1 \geq 0$, $h_2 = 0$). Так как $1/2 < \alpha < 1$, то из (2.7) следует, что при $\zeta \rightarrow \infty$ интеграл, определяющий $h(\zeta)$, расходится и $h(\zeta) \rightarrow \infty$ при $\zeta \rightarrow \infty$. Из той же асимптотики (2.7) следует, что образом течения в плоскости h будет внутренность полученного угла.

Поступила 9 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Каждан Я. М., Симонов В. А. О падении ударной волны на клиновидную полость, ПМТФ, 1969, № 6, стр. 57—61.
2. Добровольская З. Н. Некоторые нелинейные автомодельные задачи о движении несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. В сб. «Приложения теории функций в механике сплошной среды», т. 2, М., «Наука», 1965, стр. 150—170.
3. Добровольская З. Н. Численное решение интегрального уравнения одной плоской автомодельной задачи о движении жидкости со свободной поверхностью. Ж. Вычислит. матем. и матем. физ., 1966, № 6, стр. 934—941.
4. Wagner H. Über Stoß- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten. Z. angew. Math. und Mech., 1932, Bd 12, Nr 4, S. 193—215.
5. Garabedian P. R. Oblique water entry of a wedge. Commun. Pure and Appl. Math., 1953, vol. 6, No. 2, pp. 157—165.