

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ ПОРОХА

В. Б. Либрович, Б. В. Новожилов

(Москва)

Автомоделное решение задачи о нестационарной скорости горения пороха при уменьшающемся давлении, полученное Я. Б. Зельдовичем для частной зависимости стационарной скорости горения от давления и начальной температуры [1], обобщается на случай произвольных зависимостей. Показывается, что при довольно общих предположениях могут существовать два решения, соответствующие малой и большой скоростям горения. При резком изменении давления автомоделные решения перестают существовать, что может быть отнесено к достижению критических условий потухания пороха.

С использованием интегрального уравнения, связывающего скорость горения, температуру поверхности и градиент температуры у поверхности, которое было выведено в работе [2], получены автомоделные решения для модели горения пороха с переменной температурой поверхности. Показано, что такие решения могут существовать лишь при определенных зависимостях температуры поверхности от давления и градиента температуры у поверхности. Устанавливается приближенная связь между произвольными параметрами, входящими в решение, и кинетическими характеристиками реакции газификации пороха.

Проводится исследование устойчивости автомоделных решений при постоянной температуре поверхности пороха; из двух возможных решений устойчивым, как оказалось, является лишь одно, соответствующее меньшей скорости горения.

1. В [1] получено решение нелинейной задачи о нестационарной скорости горения пороха в случае, когда стационарная скорость горения u^0 следующим образом связана с давлением p и начальной температурой пороха T_0

$$u^0 = B p^\nu e^{\beta T_0} \quad (B, \nu, \beta = \text{const}, \nu < 1, B > 0) \quad (1.1)$$

При этом оказалось, что давление должно убывать со временем по закону

$$p = A t^{-\frac{1}{2\nu}} \quad (A = \text{const} > 0) \quad (1.2)$$

Рассмотрим случай произвольной зависимости $u^0(p, T_0)$, причем температуру поверхности пороха, как и в [1], положим постоянной. Будем исходить из уравнения теплопроводности, описывающего одномерное распространение тепла в порохе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + w \frac{\partial \theta}{\partial \xi} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}, & -\infty < \xi \leq 0 \\ & & -\infty < \tau < \infty \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_S - T_0}, \quad w = \frac{u}{U}, \quad \tau = \frac{u^2 t}{\kappa}, \quad \xi = \frac{U x}{\kappa}$$

Здесь T , T_S и T_0 — текущая температура, температура поверхности и начальная температура; u — линейная скорость горения, U — характерная скорость (будет определена позже); κ , t и x — температуропроводность, время и координата (начало координат связано с поверхностью пороха).

Известно [3], что уравнение (1.3) с граничными условиями

$$\xi = -\infty, \theta = 0; \xi = 0, \theta = 1 \quad (1.4)$$

имеет автомодельное решение, если скорость w зависит от времени как

$$w = C\tau^{-1/2} \quad (C = \text{const} > 0) \quad (1.5)$$

Это решение имеет вид

$$\theta = \frac{\text{erfc}(C-y)}{\text{erfc} C} \quad \left(\text{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy, \quad y = \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) \quad (1.6)$$

Автомодельное решение можно рассматривать лишь как промежуточную асимптотику решения о переходе горения пороха с одного стационарного режима на другой, если закон изменения давления на некотором отрезке переходного процесса обеспечивает временную зависимость скорости горения вида (1.5). Промежуточность заключается в том, что система уже перестала «помнить» начальные условия стационарного горения, но еще далека от конечного стационарного режима, когда изменение давления отклоняется от соответствующего автомодельному решению.

Для определения закона изменения давления во времени, обеспечивающего скорость горения вида (1.5), будем считать, что функция

$$w = w(p, \varphi) \quad (\varphi = (\partial\theta / \partial\xi)_S) \quad (1.7)$$

известна, так как она может быть получена [1] из экспериментально определяемой зависимости скорости горения от давления и начальной температуры в стационарном режиме $u^0 = u^0(p, T_0)$. Подстановка в эту зависимость выражения начальной температуры через температуру поверхности и градиент температуры на поверхности приводит к соотношению

$$u = u \left[p, T_S - \frac{\kappa}{u} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_S \right] \quad (1.8)$$

верному и для нестационарного режима [1, 4].

Для автомодельного решения (1.6) имеем

$$w = \frac{C}{\sqrt{\tau}} = w(p(\tau), T_*) \quad \left(T_* = T_S - \frac{(T_S - T_0)e^{-C^2}}{\sqrt{\pi} C \text{erfc} C} = \text{const} \right) \quad (1.9)$$

Обычно скорость стационарного горения растет с ростом давления, поэтому автомодельное решение реализуется при уменьшающемся давлении.

2. Если скорость стационарного горения взять в виде (1.1), то (1.9) конкретизируется следующим образом:

$$\frac{C}{\sqrt{\tau}} = \frac{B}{U} p^\nu e^{\beta T_*} \quad (2.1)$$

В качестве характерной скорости возьмем $U = B p_0^\nu e^{\beta T_0}$, где p_0 — единица измерения давления в (1.1). Тогда из (2.1) имеем

$$\frac{C}{\sqrt{\tau}} = z^\nu \exp k \left(1 - \frac{e^{-C^2}}{\sqrt{\pi} C \text{erfc} C} \right), \quad z = \frac{p}{p_0}, \quad k = \beta(T_S - T_0) \ll 1 \quad (2.2)$$

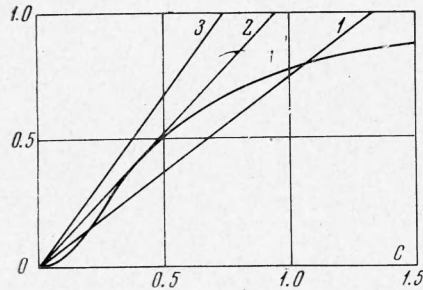
Здесь k — критерий устойчивости стационарного режима горения [1]. Из (2.2) следует закон изменения давления в безразмерном виде

$$z = D^{1/\nu} \tau^{-\frac{1}{2\nu}} \quad (2.3)$$

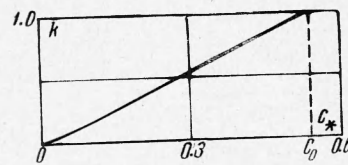
и связь между константами C и D в законе скорости горения (1.5) и законе изменения давления (2.3)

$$\frac{C}{D} = \exp \left[k \left(1 - \frac{e^{-C^2}}{\sqrt{\pi} C \operatorname{erfc} C} \right) \right] \quad (2.4)$$

Будем считать, что задана константа D в законе изменения давления (2.3). Соотношение (2.4) тогда определяет константу скорости горения C через D . Представим решение (2.5) графически. На фиг. 1 нанесены левая (прямые линии) и правая части уравнения (2.4) как функции C при одном значении параметра k ($k = 0.8$) и нескольких значениях константы D ($D = 1.33, 0.91, 0.75$). При больших D уравнение (2.4) относительно неизве-



Фиг. 1



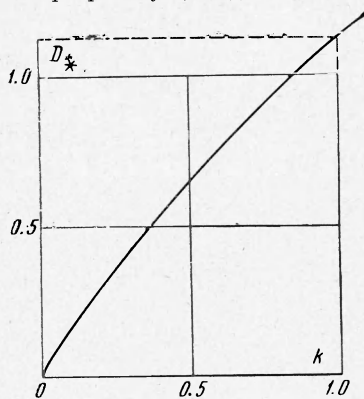
Фиг. 2

стной C имеет два решения, одно из которых соответствует малой нестационарности в скорости горения (большое значение C ; в этом случае, чтобы заметно изменилась абсолютная величина скорости горения, требуется большое время — см. (1.5)), а другое — сильной нестационарности (малое C). При $D < D_*$ решение (2.4) не существует. Значения D_* и соответствующего ему C_* найдем из условия касания кривых фиг. 1

$$C_* = \frac{k e^{-C_*^2}}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc} C_*} \left(1 + 2C_*^2 - \frac{2C_* e^{-C_*^2}}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc} C_*} \right) \quad (2.5)$$

(Значение D_* затем определяется из (2.4) подстановкой C_* .)

Зависимость (2.5) представлена на фиг. 2. При $k \rightarrow 0$, что соответствует [1] полностью прогретому и, следовательно, абсолютно устойчивому пороху, $C_* \rightarrow 0$. Таким образом, из двух решений остается лишь одно, соответствующее слабой нестационарности. При стремлении k к границе устойчивого стационарного горения ($k \rightarrow 1$) $C_* \rightarrow C_0 = 0,540$. В п. 4 будет показано, что из двух решений устойчивым является лишь то, которое соответствует верхнему пересечению кривых на фиг. 1.



Фиг. 3

Отсутствие решения при малых D может быть интерпретировано, следуя идеям, высказанным в [1], как погасание пороха при резком уменьшении давления. Величину D_* при этом можно назвать параметром критической скорости сброса давления, характеризующим прекращение горения (как функция k она изображена на фиг. 3). Интерпретация эта достаточно условна, поскольку отсутствие автомодельного решения не обязательно означать отсутствие решения задачи вообще.

Существование двух автомодельных решений не было отмечено в работе [1]. Критическая скорость уменьшения давления в этой работе определялась иначе — через условие достижения

критического градиента температуры у поверхности пороха, — что приводит к выражению для C_* , отличному от (2.5).

Неединственность решения является довольно общим свойством рассматриваемой задачи для широкого класса функций $u^\circ(p, T_0)$. В частности, она возникает для зависимостей типа

$$u^\circ = f_1(p) f_2(T_0)$$

где $f_2(T_0)$ — непрерывная гладкая функция — обращается в нуль при некотором значении аргумента, отличном от $-\infty$, при стремлении T_0 от $T_0 = T_S$ к $-\infty$. Примерами таких функций являются

$$f_2(T_0) = 1 + \alpha T_0, \quad \frac{1 + \alpha T_0}{1 - \beta T_0} \quad \text{при } \alpha, \beta > 0, \quad \alpha > \beta$$

и другие, которые употребляются в теории горения пороха.

3. Найдем теперь автомодельное решение задачи для модели пороха с переменной температурой поверхности и получим необходимые законы изменения давления со временем и вид зависимостей между температурой поверхности, давлением и начальной температурой вещества, допускающие автомодельные решения.

Будем исходить из интегрального уравнения, полученного в работе [2], которое связывает скорость горения, градиент температуры у поверхности и температуру у поверхности. В безразмерном виде оно записывается как

$$\begin{aligned} \theta_S(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^\tau \theta_S \exp \left[-\frac{I^2}{4(\tau - \tau')} \right] \left[\frac{\Phi}{\theta_S} - w + \frac{I}{2(\tau - \tau')} \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_\infty^0 \theta_S(\xi) \exp \left[-\frac{(\xi + K)}{4\tau} \right] d\xi \right\} \\ I = \int_{\tau'}^{-\infty} w(\tau'') d\tau'', \quad K = \int_0^\tau w(\tau'') d\tau'' \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\theta_0(\xi) = \theta(\xi, 0)$ — начальное стационарное распределение температуры в прогретом слое (до начала нестационарного процесса).

Автомодельное решение будем искать в форме, в которой скорость задается соотношением (1.5), температура поверхности

$$\theta_S = F\tau^n, \quad F = \text{const} > 0 \quad (3.2)$$

(n — произвольное действительное число) и связь между градиентом температуры и температурой поверхности

$$\frac{\Phi}{\theta_S} = \frac{G}{\sqrt{\tau}}, \quad G = \text{const} > 0 \quad (3.3)$$

Приняв во внимание, что автомодельное решение является промежуточной асимптотикой, при которой уже перестает сказываться влияние начальных условий (большие времена τ), опустим в (3.1) второй интеграл (он стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$). Подставляя затем в интегральное уравнение (1.5) (3.2) и (3.3) и переходя под интегралом к новой независимой переменной $\sigma = \tau / \tau'$, получаем

$$\sqrt{\pi} = \int_0^1 \sigma^n \left(\frac{G}{\sqrt{\sigma}} - \frac{C}{\sqrt{\sigma}} + \frac{C}{1 + \sqrt{\sigma}} \right) \exp \left[-C^2 \frac{1 - \sqrt{\sigma}}{1 + \sqrt{\sigma}} \right] \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \sigma}} \quad (3.4)$$

Таким образом, из интегрального уравнения полностью исключается время τ , что свидетельствует о правильном выборе временных зависимостей (1.5), (3.2) и (3.3). Оставшееся соотношение (3.4) служит для определения связи между константами C и G .

В частном случае $n = 0$, соответствующем модели пороха с $T_S = \text{const}$, интегралы в (3.4) могут быть вычислены, что приводит к связи

между G и C , согласующейся с результатами п. 2. При $n \neq 0$ для расчета связи $G(C)$, даваемой формулой (3.4), следует привлекать численные методы.

Обратимся теперь к изменению давления, которое обеспечивает автомодельное решение задачи для модели горения пороха с переменной температурой поверхности. Вместо (1.9) имеем

$$\frac{C}{V\tau} = w \left[p, (\tau), T_0 + F \left(1 - \frac{G}{C} \right) (T_S^\circ - T_0) \tau^n \right] \quad (3.5)$$

В частности, при зависимости вида (1.4) давление должно изменяться как

$$z = \frac{C^{1/\nu}}{\tau^{1/\nu}} \exp \left[- \frac{kF}{\nu} \left(1 - \frac{G}{C} \right) \tau^n \right] \quad (3.6)$$

где $T_S^\circ - T_0$ — характеристическая разность температуры, при помощи которой производилось обезразмеривание, например разность температуры поверхности и начальной температуры при стационарном режиме горения (см. ниже).

Посмотрим теперь, каким условиям должна удовлетворять зависимость температуры поверхности от начальной температуры и давления при стационарном горении, при которой в нестационарных условиях температура поверхности изменяется в соответствии с (3.2). Переход от стационарной зависимости $\theta_S = \theta_S(p, T_0)$ к нестационарной связи между температурой поверхности и давлением и градиентом температуры производится по аналогии (см. [4]) с соответствующим преобразованием для скорости горения (1.9)

$$\theta_S = \theta_S \left[p, T_S - \frac{\kappa}{u} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_S \right] \quad (3.7)$$

Используя соотношение (3.2), (1.5) и (3.3), приходим к выводу, что должно тождественно выполняться соотношение

$$F\tau^n = \theta_S \left[p(\tau), T_0 + F \left(1 - \frac{G}{C} \right) (T_S^\circ - T_0) \tau^n \right] \quad (3.8)$$

где $p(\tau)$ дается формулой (3.6). Следовательно, для того чтобы имело место автомодельное решение, функция $\theta_S^\circ(p, T_0)$ должна иметь строго определенный вид.

При обработке экспериментальных данных по изменению температуры поверхности горящего пороха часто используется связь [5] $u = u(p, T_S)$, которую можно получить из соотношений $u(p, \varphi)$ и $T_S(p, \varphi)$ исключением градиента. Употребительной, например, является экстраполяционная формула

$$u = H \exp(-E / RT_S) \quad (3.9)$$

где H — некоторая константа (реакция газификации нулевого порядка), R — газовая постоянная, а E — характерная энергия, которую можно рассматривать как энергию активации, если предполагать, что газификация есть результат гетерогенной реакции на поверхности топлива, или как приблизительную половинную величину энергии активации реакции объемного разложения пороха.

Если за характеристическую скорость выбрать скорость стационарного горения

$$u = H \exp(-E / RT_S^\circ) \quad (3.10)$$

то в безразмерном виде (3.9) переписывается

$$w = \exp\left(\varepsilon\Delta \frac{\theta_S - 1}{1 + \theta_S\Delta}\right) \quad (3.11)$$

$$\theta_S = \frac{T_S - T_0}{T_S^\circ - T_0}, \quad \varepsilon = \frac{E}{RT_S^\circ}, \quad \Delta = \frac{T_S^\circ - T_0}{T_0}$$

Считая, что $|\theta_S - 1| \ll 1$, формулу (3.11) можно переписать в приближенном виде

$$w \cong \theta_S^m \quad (m = \varepsilon\Delta / (1 + \Delta)) \quad (3.12)$$

В автомодельном решении скорость горения w и температура поверхности θ_S должны зависеть от времени в соответствии с (1.5) и (3.2). Подставляя эти функции в (3.12), можно видеть, что соотношение (3.9) (конечно, в приближении, использованном при выводе (3.12)) допускает автомодельное решение задачи, если выбрать в качестве F и n

$$F = C^{1/m}, \quad n = -1/2 m < 0 \quad (3.13)$$

т. е. температура поверхности падает со временем.

Ввиду обычно большой энергии E $|n| \ll 1$. Автомодельное решение задачи с постоянной температурой поверхности можно рассматривать, таким образом, как соответствующее бесконечно большой величине E ($n = 0$).

Распределение температуры внутри пороха может быть получено из решения уравнения теплопроводности (1.3). Оно сводится к уравнению в обыкновенных производных выбором автомодельной переменной y и введением новой функции ϑ

$$\theta = \tau^n \vartheta(y), \quad y = \xi / 2\sqrt{\tau} \quad (3.14)$$

Имеем

$$\frac{d^2\vartheta}{dy^2} + 2(y - C) \frac{d\vartheta}{dy} - 4n\vartheta = 0 \quad (3.15)$$

с граничными условиями

$$y = -\infty, \vartheta = 0; \quad y = 0, \vartheta = F = \text{const} \quad (3.16)$$

Уравнение (3.15) сводится к частному виду уравнения Уиттекера, решение которого выражается через функцию Уиттекера [6]

$$\vartheta = \frac{\exp[-1/2(y-C)^2]}{\sqrt{y-C}} \left\{ C_1 W\left(\left(n + \frac{1}{4}\right), \frac{1}{4}, -(y-C)^2\right) + \right. \quad (3.17) \\ \left. + C_2 W\left(-\left(n + \frac{1}{4}\right), \frac{1}{4}, (y-C)^2\right) \right\}$$

где W — функция Уиттекера, а C_1 и C_2 — константы интегрирования, которые должны определяться из условий (3.16). При $n > 0$, первая из функций W в фигурных скобках бесконечно растет при $y \rightarrow -\infty$, и поэтому первое из условий (3.16) требует, чтобы $C_1 = 0$. Вторая константа выражается через F

$$C_2 = \frac{i\sqrt{C}}{\exp(-1/2C^2)} W^{-1}\left(-\left(n + \frac{1}{4}\right), \frac{1}{4}, C^2\right) \quad (F^m = C) \quad (3.18)$$

Класс автомодельных решений для модели горения пороха с переменной температурой поверхности, рассмотренный выше, может быть еще расширен, если использовать следующий простой прием. Ранее, при решении уравнения теплопроводности, пространственная переменная ξ считалась заключенной в отрезке $[-\infty, 0]$. Продолжим теперь полученные решения (1.6) и (3.17) на интервал переменной $-\infty < \xi < +\infty$ и расположим поверхность пороха в точке $\xi = \xi_0$. При $\xi_0 = 0$ решение (1.6) соответствует модели горения с постоянной температурой поверхности, а решение (3.17) — с поверхностной температурой, изменяющейся в соответствии со степенным законом (3.2). При $\xi_0 \neq 0$ температура поверхности является функцией времени, отличной от постоянной и от (3.2). В частности, при $n = 0$ эта функция имеет вид

$$T_S(\xi_0, \tau) = T_0 + \frac{T_S^\circ - T_0}{\operatorname{erfc} C} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\eta}{C}} e^{-\eta^2} d\eta \right] \left(\eta' = C - \frac{\xi_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \quad (3.19)$$

Если $\xi_0 < 0$, то температура поверхности растет во времени и стремится в пределе при больших временах к постоянной величине T_S° . Если же $\xi_0 > 0$, температура поверхности уменьшается во времени и тоже стремится к T_S° .

Вычисляя из (3.19) градиент температуры у поверхности и подставляя, как раньше, в (1.9), получаем соотношение, задающее необходимый закон изменения давления

$$\frac{C}{\sqrt{\tau}} = w \left[p(\tau), T_S^\circ - \frac{T_S^\circ - T_0}{C \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} C} \exp \left(- \left(C - \frac{\xi_0}{2\sqrt{\tau}} \right)^2 \right) \right] \quad (3.20)$$

Из (3.9) следует соотношение для температуры поверхности, ограничивающее класс порохов с переменной температурой поверхности, для которого можно получать автомодельные решения

$$\theta_S = \theta_S \left[p(\tau), T_S^\circ - \frac{T_S^\circ - T_0}{C \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} C} \exp \left(- \left(C - \frac{\xi_0}{2\sqrt{\tau}} \right)^2 \right) \right] \quad (3.21)$$

Отметим, что (3.21) содержит свободный параметр ξ_0 , который может быть наряду с T_S° использован для аппроксимации экспериментальных данных.) Аналогичная процедура может быть выполнена и при $n \neq 0$.

4. В п. 2 для модели пороха с постоянной температурой поверхности было показано, что существует два решения автомодельной задачи. Возникает вопрос, какое из них реализуется в действительности, т. е. является устойчивым.

В отличие от исследований устойчивости стационарных решений, в которых неустойчивыми объявляются те решения, у которых абсолютная величина бесконечно малых возмущений растет со временем, у автомодельных решений следует следить за относительной величиной возмущений — отношением амплитуды возмущений к невозмущенному решению, которое тоже является функцией времени. (Такой подход использовался ранее при исследовании устойчивости ламинарного сферического пламени [7].) При этом к устойчивым относятся решения, траектория которых во времени при наличии возмущений остается близкой к траектории без возмущений.

Если перейти в уравнении теплопроводности (1.3) от независимых переменных (τ, ξ) к переменным $(\xi = \ln \tau, y)$ и от функции θ к функции ϑ в соответствии с (3.14), то после линеаризации получим уравнение для возмущений, которое не содержит в явном виде переменную ξ

$$4 \frac{\partial \delta \vartheta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \delta \vartheta}{\partial y^2} + 2(y - C) \frac{\partial \delta \vartheta}{\partial y} - 2C \delta \Sigma \frac{d\vartheta^\circ}{dy} - 4n \delta \vartheta \quad (4.1)$$

Здесь δ означает малые возмущения, $\delta \Sigma$ — относительная величина возмущения скорости $\delta \Sigma = \delta w / w$, ϑ° — невозмущенное решение (3.17).

Решение уравнения (4.1) можно искать, как обычно, в экспоненциальном виде относительно ξ . Однако необходимо также, чтобы дополнительные соотношения для возмущений скорости, температуры поверхности

и градиента температуры, которые следуют из алгебраических связей между скоростью горения, давлением и градиентом температуры и между температурой поверхности, давлением и градиентом температуры, не содержали бы время в явном виде.

Оказывается, что это возможно лишь для определенного вида связи между стационарной скоростью горения, давлением и начальной температурой. Действительно, функцию (3.5) можно записать в виде

$$w = \frac{C}{\sqrt{\tau}} = \Psi(z, j), \quad j = \theta_S - \frac{\Phi}{w} \quad (4.2)$$

Линеаризуя (4.2) и используя (3.2), (3.3)

$$\frac{\delta w}{w} = -\frac{\Psi_j}{\Psi} \frac{G}{C} F \tau^n \left[1 - \frac{\Psi_j}{\Psi} F \tau^n \left(\frac{1}{m} + \frac{G}{C} \right) \right]^{-1} \Psi_j = \frac{\partial \Psi}{\partial j} \quad (4.3)$$

Чтобы можно было применить метод решения с использованием экспоненциальных зависимостей возмущений относительно $\zeta = \ln \tau$, необходимо

$$\frac{\Psi_j}{\Psi} F \tau^n = \frac{\Psi_j}{\Psi} F \left(\frac{C}{\Psi} \right)^{2n} = \text{const} \quad (4.4)$$

Интегрируя это соотношение, найдем

$$\Psi = \left[Z(z) - \text{const} \left(\theta_S - \frac{\Phi}{w} \right) \right]^{-1/2n}, \quad n \neq 0 \quad (4.5)$$

$$\Psi = Z(z) \exp \left[\text{const} \left(1 - \frac{\Phi}{w} \right) \right], \quad n = 0 \quad (4.6)$$

где $Z(z)$ — произвольная функция безразмерного давления z . Отметим, в частности, что рассматривавшийся ранее закон горения (1.1) приводит к функциональной зависимости вида (4.6).

Если решения для возмущений представлены в экспоненциальном виде относительно логарифма времени

$$\delta \vartheta = f^{(1)}(y) e^{\omega \zeta}, \quad \delta \Sigma = \text{const} e^{\omega \zeta} \quad (4.7)$$

то исследуемое на устойчивость решение считается неустойчивым при $\text{Re} \omega > 0$. Если вернуться к исходной переменной — времени τ , то (4.7) соответствует степенному закону

$$\delta \vartheta \sim \tau^\omega, \quad \delta w = w \delta \Sigma = \text{const} \tau^{\omega-1/2} \quad (4.8)$$

а при переходе к возмущению $\delta \theta$

$$\delta \theta(\tau, y) = f^{(2)}(y) \tau^{n+\omega} \quad (4.9)$$

(вид функции $f^{(2)}(y)$ должен быть найден из решения уравнения теплопроводности). Возмущение градиента температуры у поверхности пороха из (4.9) рассчитывается как

$$\delta \varphi = \left(\frac{\partial \delta \theta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \frac{1}{2} \tau^{n-1/2+\omega} \left(\frac{df^{(2)}}{dy} \right)_{y=0} \quad (4.10)$$

Найдем теперь границу устойчивости решений для модели горения пороха с постоянной температурой поверхности ($n = 0$). Используем для этой цели интегральное уравнение (3.1), которое, если выделить возмущения градиента температуры $\delta \varphi$, скорости δw и интеграла δI , может

быть переписано для автомодельного решения в виде

$$\int_0^1 \left\{ \delta\varphi(x\tau) - \delta w(x\tau) + \frac{1}{2(1-x)} \int_x^1 \delta w(\tau s) ds \left[1 + 2C(C-G) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) - 2C^2 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right] \exp - C^2 \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right) \right\} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 0 \quad (4.11)$$

Здесь введена переменная $x = \tau' / \tau$ и использован вид невозмущенного решения (1.5).

Из полученного соотношения видно, что в соответствии с (4.8) и (4.10) интеграл не будет зависеть от времени τ , если возмущения скорости горения и градиента температуры представлены в виде

$$\delta\varphi(\tau) = \delta\varphi_0 \tau^l, \quad \delta w = \delta w_0 \tau^l \quad (4.12)$$

где l — произвольное действительное число; сопоставление с (4.8) дает $l = \omega - 1/2$. Подставляя (4.12) в (4.11), можно получить соотношение между амплитудами $\delta\varphi_0$ и δw_0 . В дальнейшем будем интересоваться только границей устойчивости решений, для которой $\text{Re}\omega = 0$. Предположим также, что на границе и $\text{Im}\omega = 0$ — вычисления показывают, что полученные соотношения могут быть удовлетворены в этом предположении, что и свидетельствует о его правильности. Вычисление интегралов приводит к связи между возмущениями градиента и скорости

$$\frac{\delta\varphi_0}{\delta w_0} \pi e^{-C^2} (1 - \text{erf}^2 C) = \frac{2e^{-C^2} (1 + \text{erf} C)}{\text{erfc} C} - 2\sqrt{\pi} C (1 + \text{erf} C) \quad (4.13)$$

Вторую связь между $\delta\varphi_0$ и δw_0 получим из рассмотрения функции, связывающей скорость горения, давление и градиент температуры. Из закона стационарного горения (1.1) легко найти

$$\frac{\delta\varphi_0}{\delta w_0} = \frac{1}{k} \left(k \frac{G}{C} - 1 \right) \quad (4.14)$$

(при варьировании следует считать $z = \text{const}$).

Из (4.13), (4.14) получаем связь между C и k на границе устойчивости, которая имеет вид, тождественно совпадающий с условием (2.5), определяющим касание кривых при решении автомодельной задачи. Точка касания является критической точкой, отделяющей устойчивые решения задачи от неустойчивых. В этой точке обращаются в нуль как действительная, так и мнимая части характеристической частоты задачи ω .

Принимая во внимание, что верхняя точка пересечения кривых фиг. 1 в пределе при больших C описывает горение со слабой нестационарностью, из соображения непрерывности можно заключить, что она соответствует устойчивому решению, а нижняя — неустойчивому.

Представим полученные результаты на графике скорость горения пороха — градиент температуры у поверхности (фиг. 4). Для конкретности будем считать, что зависимость стационарной скорости горения от давления и начальной температуры дается формулой (1.1), которая при переходе к условиям нестационарного горения дает соотношение

$$w = z^v \exp k \left(1 - \frac{\varphi}{w} \right) \quad (4.15)$$

На фиг. 4 зависимости $w(\varphi)$ (4.15) нанесены для трех значений давления ($z^v = 0.5, 1.0, 2.0$). Кривые имеют бесконечные производные, которые лежат, как легко убедиться, на прямой $w = k\varphi$ (прямая I).

Стационарное горение пороха при разных давлениях и одной начальной температуре (которая выбрана в качестве характеристической) описывается прямой $w = \varphi$ (прямая 2).

При изменении начальной температуры изменяется наклон прямой, соответствующей стационарному горению. В частности, наклон прямой (4.1) соответствует температуре T_0^* , при которой $\beta (T_S - T_0^*) = 1$, т. е. отвечает границе устойчивости стационарных решений. Поэтому нижние, неустойчивые, ветви кривых $w(\varphi)$ на фиг. 4 изображены пунктирными линиями.

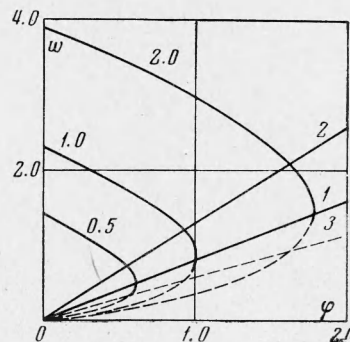
Автомодельные решения на фиг. 4 также представляются прямыми линиями. Действительно, из соотношений п. 2 имеем

$$w = \sqrt{\pi} C e^{C^2 \operatorname{erfc} C \varphi} \quad (4.16)$$

При больших C прямая (4.16) стремится к прямой 2, соответствующей стационарному горению (слабая нестационарность). При $C \rightarrow 0$ (сильная нестационарность) прямая (4.16) приближается к оси абсцисс и попадает в область неустойчивых стационарных решений.

Граница устойчивости автомодельных режимов получается подстановкой в (4.16) критического значения C_* , предлагаемого формулой (2.5). Она нанесена также на фиг. 4 (пунктирная прямая линия). Видно, что область устойчивости автомодельных решений шире, чем область устойчивости стационарных решений; это связано с иным определением неустойчивого возмущения.

Отметим, что в работе [1] условием определения границы устойчивости автомодельных решений являлось условие достижения критического градиента температуры у поверхности пороха. При этом не принималось во внимание, как изменяется возмущение во времени по сравнению с изменением невозмущенной величины.



Фиг. 4

Поступила 13 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Зелдович Я. Б. О скорости горения пороха при переменном давлении. ПМТФ, 1964, № 3.
2. Новожилов Б. В. Уравнение для нестационарной скорости горения пороха. ПМТФ, 1970, № 4.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1953.
4. Новожилов Б. В. Нестационарное горение порохов, имеющих переменную температуру поверхности. ПМТФ, 1967, № 1.
5. Krieger H., T'ien J. S., Sirignano W. A., Sumnerfield M. Nonsteady burning phenomena of solid propellants; theory and experiments. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 2.
6. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. ч. 1, 2. М—Л., Гостехиздат, 1933—1934.
7. Истратов А. Г., Либровиц В. Б. Об устойчивости распространения сферического пламени. ПМТФ, 1966, № 1.