

19. Boyle J.T. The finite bending of curved pipes // Int. J. Solids Structures. — 1981. — V. 17, N 5. — P. 515—529.
20. Reissner E. On the finite pure bending of curved tubes // Int. J. Solids Structures. — 1981. — V. 17, N 9. — P. 839—844.
21. Кузнецов В.В., Левяков С.В. Нелинейная задача Кармана для тороидальных оболочек произвольного поперечного сечения // Изв. РАН. МТТ. — 1992. — № 2. — С. 136—142.
22. Whatham J.F. Analysis of pipe bends with symmetrical noncircular cross sections // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. — 1987. — V. 54, N 3. — P. 604—610.

г. Новосибирск

Поступила 10/III 1994 г.

УДК 539.3

М.А. Задоян, Н.Б. Сафарян

ПЛОСКОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОГО КЛИНА

Рассматривается напряженное состояние на крае контактной линии составного клиновидного тела со степенным законом упрочнения материалов в условиях плоского напряженного состояния. Обстоятельное исследование в этой области для линейно-упругих составных тел приведено в [1]. В [2] изучаются вопросы малонапряженности составных тел со степенным упрочнением материалов в условиях плоской деформации. Аналогичные вопросы на крае контактной поверхности неоднородно составного клина при продольном сдвиге и плоской деформации изучены в [3].

Исследование задачи малонапряженности в случае плоского напряженного состояния, очевидно, сложнее по сравнению с соответствующей задачей плоской деформации.

В настоящей работе для плоского напряженного состояния при помощи местного решения изучается поведение поля напряжений в окрестности края поверхности соединения составного тела, когда поверхности, образующие ребро, считаются свободными от напряжений (рис. 1).

В полярной системе координат угловая точка выбрана за начало системы координат, ось $\theta = 0$ направлена по контактной поверхности, а ось z — перпендикулярно к плоскости тела. В каждой области поперечного сечения имеем уравнения равновесия:

$$(1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0.$$

Закон упрочнения запишем в виде

$$(2) \quad \sigma_0 = k \varepsilon_0^m,$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{r\theta}^2}; \quad \varepsilon_0 = 2\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2 + \gamma_{r\theta}^2}$$

— соответственно интенсивности касательных напряжений и деформации сдвига; m — показатель упрочнения. Принимается, что степени упрочнения m обоих материалов одинаковы, а модули деформации k различны.

Соотношения между компонентами деформаций и перемещений:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

зависимости между компонентами напряжений и деформаций:

$$(3) \quad \begin{aligned} \sigma_r - \sigma_\theta &= 2k\varepsilon_0^{m-1}\varepsilon_r, \quad \sigma_\theta - \sigma_z = 2k\varepsilon_0^{m-1}\varepsilon_\theta, \\ \sigma_z &= 0, \quad \tau_{r\theta} = 2k\varepsilon_0^{m-1}\gamma_{r\theta}. \end{aligned}$$

Здесь $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta)$ — среднее напряжение и, кроме того, принято условие несжимаемости $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0$.

Для каждой из клиновидных областей $-\beta \leq \theta \leq 0$ и $0 \leq \theta \leq \alpha$ поле перемещений ищем в виде

$$(4) \quad u_i(r, \theta) = r^{1-\lambda} f_i(\theta, \lambda), \quad v_i(r, \theta) = r^{1-\lambda} \psi_i(\theta, \lambda),$$

где $f_i(\theta, \lambda)$, $\psi_i(\theta, \lambda)$ — произвольные функции; λ — произвольная постоянная. Величины в этих областях обозначены соответственно индексами $i = 1, 2$.

Используя представления (3), (4), компоненты напряжения через известные функции $f_i(\theta, \lambda)$ и $\psi_i(\theta, \lambda)$ запишем как

$$(5) \quad \begin{aligned} \sigma_{ri} &= 2kr^{-\lambda m}(\psi_i' + (3 - 2\lambda)f_i)\chi_i, \\ \sigma_{\theta i} &= 2kr^{-\lambda m}(2\psi_i' + (3 - \lambda)f_i)\chi_i, \\ \tau_{r\theta i} &= kr^{-\lambda m}(f_i' - \lambda\psi_i)\chi_i, \end{aligned}$$

$$\chi_i = (4(1 - \lambda)^2 f_i^2 + 4(1 - \lambda)f_i(f_i + \psi_i') + 4(f_i + \psi_i')^2 + (f_i' - \lambda\psi_i)^2)^{(m-1)/2}.$$

Функции $f_i(\theta, \lambda)$, $\psi_i(\theta, \lambda)$ в каждой области удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(6) \quad ((f_i' - \lambda\psi_i)\chi_i)' - 2((1 + \lambda m)\psi_i' + \lambda(1 + m(3 - 2\lambda))f_i)\chi_i = 0,$$

$$((2\psi_i' + (3 - \lambda)f_i)\chi_i)' + \left(1 - \frac{1}{2}\lambda m\right)(f_i' - \lambda\psi_i)\chi_i = 0.$$

В отсутствие внешних сил вблизи угловой точки имеем граничные условия

$$(7) \quad 2\psi_1' + (3 - \lambda)f_1 = 0, \quad 2\psi_2' + (3 - \lambda)f_2 = 0,$$

$$f_1' - \lambda\psi_1 = 0 \text{ при } \theta = -\beta, \quad f_2' - \lambda\psi_2 = 0 \text{ при } \theta = \alpha.$$

На контактной поверхности $\theta = 0$ имеем условия равенства напряжений σ_θ и $\tau_{r\theta}$, а также непрерывности перемещений u_i и v_i , т.е. следующие условия:

$$(8) \quad (2\psi_1' + (3 - \lambda)f_1)\chi_1 = \gamma(2\psi_2' + (3 - \lambda)f_2)\chi_2,$$

$$(f_1' - \lambda\psi_1)\chi_1 = \gamma(f_2' - \lambda\psi_2)\chi_2, \quad f_1 = f_2, \quad \psi_1 = \psi_2, \quad \gamma = \frac{k_2}{k_1} \text{ при } \theta = 0.$$

Приведенная система дифференциальных уравнений (6) при краевых условиях (7), (8) в принципе определяет функции $f_i(\theta, \lambda)$, $\psi_i(\theta, \lambda)$ с точностью до постоянного неопределенного множителя соответственно в областях $-\beta \leq \theta \leq 0$ и $0 \leq \theta \leq \alpha$ и значение параметра λ в зависимости от параметров α, β, γ, m .

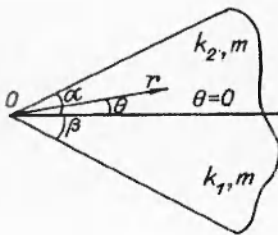


Рис. 1

Придавая различные числовые значения λ , из (6)–(8) численным методом находим соотношения между параметрами α, β, γ, m . Условие $\lambda < 0$ в пространстве этих параметров определяет зону малонапряженности, а при $\lambda > 0$ — зону сильной концентрации напряжений. Полагая $\lambda = \lambda_* > 0$, из (6)–(8) численными методами можно определить семейство кривых одинаковых степеней концентрации напряжений. Эти кривые $\beta = \beta(\alpha, \gamma, m)$ — следы гиперповерхности $\lambda(\alpha, \beta, \gamma, m) = \lambda_*$ на координатной плоскости α, β в зависимости от γ и m .

При конечных напряжениях, т.е. в случае $\lambda = 0$, необходимо провести специальное исследование уравнений (1)–(3). Компоненты перемещений, удовлетворяющие условию несжимаемости материалов, в этом случае ищем в виде

$$(9) \quad u_i(r, \theta) = Crf_i(\theta), \quad v_i(r, \theta) = Cr\psi_i(\theta) + C\ln r.$$

В (9) $f_i(\theta)$ и $\psi_i(\theta)$ — произвольные функции; C — произвольная постоянная.

Исходя из закона степенного упрочнения, компоненты напряжений представим в форме

$$(10) \quad \begin{aligned} \sigma_{\theta i} &= 2k_i B(\psi_i' + 3f_i)\chi_i, \\ \sigma_{\theta i} &= 2k_i B(2\psi_i' + 3f_i)\chi_i, \quad \tau_{\theta i} = k_i B(f_i' + 1)\chi_i, \\ \chi_i &= ((f_i' + 1)^2 + 4(3f_i^2 + 3f_i\psi_i' + \psi_i'^2))^{(m-1)/2}, \quad B = C | C |^{m-1}. \end{aligned}$$

Подставляя выражение напряжения (10) в уравнения равновесия (1), получим систему уравнений для определения неизвестных функций $f_i(\theta)$ и $\psi_i(\theta)$:

$$(11) \quad ((f_i' + 1)\chi_i)' - 2\psi_i'\chi_i = 0, \quad ((2\psi_i' + 3f_i)\chi_i)' + (f_i' + 1)\chi_i = 0.$$

Принимая условие отсутствия нормальных и касательных сил на внешних краях составного клина, имеем граничные условия

$$(12) \quad \begin{aligned} 2\psi_1' + 3f_1 &= 0, \quad 2\psi_2' + 3f_2 = 0, \\ f_1' &= -1 \text{ при } \theta = -\beta, \quad f_2' = -1 \text{ при } \theta = \alpha \end{aligned}$$

и условия на контактной поверхности

$$(13) \quad \begin{aligned} (2\psi_1' + 3f_1)\chi_1 &= \gamma(2\psi_2' + 3f_2)\chi_2, \quad (f_1' + 1)\chi_1 = \gamma(f_2' + 1)\chi_2, \\ f_1 &= f_2, \quad \psi_1 = \psi_2, \quad \gamma = \frac{k_2}{k_1} \text{ при } \theta = 0. \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений (11) с граничными и контактными условиями (12), (13) в принципе определяет гиперповерхность $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, m) = 0$ конечных напряжений, определяющую зону малонапряженности от зоны сильной концентрации.

Для построения этой поверхности систему дифференциальных уравнений (11) удобно свести к системе из восьми дифференциальных уравнений первого порядка, которая более удобна для численного интегрирования:

$$(14) \quad \begin{aligned} \psi_i' &= \frac{1}{2}(F_i - 3f_i), \quad f_i' = \tau_i, \quad F_i' = \Phi_i, \\ \tau_i' &= \frac{I_i(F_i - 3f_i) - (m-1)(\tau_i + 1)(F_i\Phi_i + 3f_i\tau_i)}{I_i + (m-1)(\tau_i + 1)^2}, \quad i = \overline{1, 2}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_i &= (\tau_i + 1)^2 + F_i^2 + 3f_i^2; \\ \Phi_i &= \{(1-m)(\tau_i + 1)F_i[3(m-1)(\tau_i + 1)f_i\tau_i - \tau_i(F_i - 3f_i)] + \\ &+ [I_i(\tau_i + 1) + 3(m-1)f_i\tau_i F_i][I_i + (m-1)(\tau_i + 1)^2]\} / \\ &/ \{(1-m)^2(\tau_i + 1)^2 F_i^2 - [I_i + (m-1)F_i^2][I_i + (m-1)(\tau_i + 1)^2]\}. \end{aligned}$$

Граничные условия для системы (14) следующие:

$$(15) \quad \begin{aligned} F_1(\theta) &= 0, \quad \tau_1(\theta) = -1 \text{ при } \theta = -\beta, \\ F_2(\theta) &= 0, \quad \tau_2(\theta) = -1 \text{ при } \theta = \alpha, \end{aligned}$$

контактные условия (13) принимают вид

$$(16) \quad F_1 \chi_1 = \gamma F_2 \chi_2, (\tau_1 + 1) \gamma_1 = \gamma (\tau_2 + 1) \chi_2,$$

$$f_1 = f_2, \psi_1 = \psi_2, \gamma = \frac{k_2}{k_1} \text{ при } \theta = 0.$$

Компоненты напряжений (10) представим в форме

$$(17) \quad \sigma_{ii} = k_i B (F_i + 3f_i) \chi_i, \sigma_{\alpha i} = 2k_i B F_i \chi_i,$$

$$\tau_{\theta i} = k_i B (\tau_i + 1) \chi_i, \chi_i = [(\tau_i + 1)^2 + 3f_i^2 + F_i^2]^{(m-1)/2}.$$

Когда клин изготовлен из одного нелинейного однородного материала, т.е. при $\gamma = 1$, систему уравнений (14) будем иметь только для области $0 \leq \theta \leq \alpha$, а граничные условия (15) запишем как

$$(18) \quad F(\theta) = 0, F(\theta) = 0,$$

$$\tau(\theta) = -1 \text{ при } \theta = 0, \tau(\theta) = -1 \text{ при } \theta = \alpha.$$

Система уравнений (14) с условиями (18) устанавливает связь между параметрами α и m .

Если составной клин изготовлен из линейно-упругих материалов, то, принимая в уравнениях (12) $m = 1$, будем иметь уравнение $f_i'' + 4f_i' + 1 = 0$, общее решение которого есть

$$(19) \quad f_i(\theta) = C_{1i} + C_{2i} \sin 2\theta + C_{3i} \cos 2\theta - \frac{\theta}{4},$$

где C_{1i} , C_{2i} и C_{3i} — произвольные постоянные. Используя граничные и контактные условия (15), (16) при $m = 1$ и выражение $f_i(\theta)$, согласно (19), получим

$$(20) \quad [3\sin 2\alpha + 3(\gamma - 1)\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + 3\sin 2\beta +$$

$$+ \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta + (2\alpha - 3(\gamma - 1))\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta] \times$$

$$\times [\gamma \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta \cdot (1 + 3\gamma - \cos 2\beta) + 4\gamma \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta -$$

$$- \gamma \sin 2\alpha \cdot \sin^2 2\beta - 3\gamma^2 \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta] -$$

$$- [3(\gamma \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta - \gamma \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta) -$$

$$- \sin 2\beta] [(3\gamma(\gamma - 1) + 2\beta + (\gamma - 1) \sin 2\beta) \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta -$$

$$- (3\gamma + 1)\sin 2\alpha - (3\gamma^2 - 2\gamma - 2 - (\gamma - 1)\cos 2\beta) \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta - 4\gamma \sin 2\beta] = 0.$$

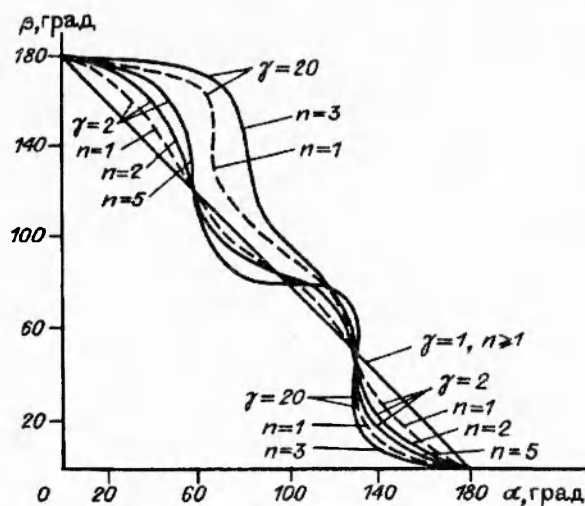
Уравнение (20) на плоскости α, β определяет семейство предельных кривых, отделяющих зону малонапряженности от зоны сильной концентрации напряжений для линейных несжимаемых материалов в случае плоского напряженного состояния.

На рис. 2 представлено семейство предельных кривых $\beta = \beta(\alpha, \gamma, m)$, построенных при помощи численных решений системы уравнений (14) при граничных условиях (15), (16), отделяющих зону малонапряженности (ниже кривых) от зоны сильной концентрации напряжений (выше кривых). Штриховыми линиями указаны подобные кривые для линейно-упругого несжимаемого материала. На графиках приведен параметр $n = 1/m$.

Численное интегрирование системы (14) с условиями (15), (16) осуществляется следующим методом. Так как функции ψ_i не участвуют в остальных уравнениях, то, исключая их, получаем системы дифференциальных уравнений шестого порядка с семью граничными условиями. Из седьмого дополнительного условия определяется зависимость между параметрами α и β .

Для каждого фиксированного α и β система (14) с шестью граничными условиями решается методом пристрелки, суть которого заключается в следующем. Полагая $f_2(\alpha) = p$, систему можно решить при помощи метода

решения задачи Коши (в нашей задаче используется метод Рунге — Кутты четвертого порядка). Система (14) будет решена, если найти значение p , при котором $F_1(-\beta)$ окажется равным нулю ($G(p) = 0$). Получается функциональная зависимость между случайно выбранным p и $F_1(-\beta)$, $G: p \rightarrow F_1(-\beta)$. Функция $G(p)$ в явном виде не известна, однако ее значение можно вычислить для любого p численным интегрированием системы (14). Для каждого α , изменяя β дискретно с постоянным шагом, начиная с $\beta = 0$, находим первое значение β (наименьшее), для которого полученное решение системы удовлетворяет дополнительному седьмому условию $\tau_1(-\beta) = -1$.



Р и с. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987.
2. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. — М.: Наука, 1992.
3. Акопян А.Б., Задоян М.А. Малонапряженность неоднородно-составных клиньев // Изв. РАН. МТТ. — 1992. — № 5.
4. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта. — М.: Мир, 1979.

г. Ереван

Поступила 30/III 1994 г.

УДК 539.374+539.376

Б.В. Горев, И.Д. Клопотов, Т.Э. Захарова

МЕТОДИКА ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ВПЛОТЬ ДО РАЗРУШЕНИЯ В РЕЖИМАХ, БЛИЗКИХ К СВЕРХПЛАСТИЧНОСТИ

Способность металлических материалов деформироваться на сотни и даже тысячи процентов при значительном снижении сопротивления деформированию получила название эффекта сверхпластичности.

В [1—6] для сплавов на основе титана, железа и алюминия экспериментально показано, что деформирование в режимах, близких к сверхпластичности, включая как подобласть режимы сверхпластичности, следует описывать, опираясь на подходы, развитые в теории ползучести с позиций теории течения. Предложены и экспериментально обоснованы определяющие уравнения для описания процесса деформирования при произвольном изменении напряжений и температуры без учета третьей стадии ползучести. Вместе с тем четко выраженная продолжительная стадия установившейся ползучести вплоть до разрушения наблюдается, как правило, только вблизи

© Б.В. Горев, И.Д. Клопотов, Т.Э. Захарова, 1995