

ряжения в волне при разных значениях ее длительности на одинаковых безразмерных расстояниях. Проведенные выше расчеты показывают, что в одной и той же вязкой среде при разных значениях длительности нагрузки, создающей волну, на одинаковых безразмерных расстояниях $h/A_D \theta$ максимальные напряжения отличаются незначительно. Поэтому соблюдение условия подобия по напряжению не является веским аргументом в пользу модели упругопластической среды. Но решение волновых задач при учете вязких и пластических свойств сложно. Поэтому применение более простой модели упругопластической среды, позволяющее получить приближенную картину угасания волн, по-прежнему является целесообразным.

Поступила 8 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляхов Г. М. Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М., «Недра», 1974.
2. Malvern L. The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain — rate effect. — J. Appl. Mech., 1951, vol. 18.
3. Sun C. T. Transient wave propagation in viscoelastic rods. — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, N 4.
4. Achenbach J. D., Reddy D. P. Note on wave propagation in linearly viscoelastic media. — Z. angew. Math. and Phys., 1967, Bd 18.
5. Суликину И., Мальверн Л. Е., Кристеску Н. Замечания по поводу «плато» в динамической теории пластичности. — Сб. перев. Механика, 1973, № 6.
6. Ляхов Г. М., Тропин И. Т. Плоские волны в грунтах и горных породах как вязкоупругих средах. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 3.
7. Ляхов Г. М., Пачепский Я. А. Об учете вязких и пластических свойств при решении волновых задач. — ПМТФ, 1973, № 2.
8. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. — ПММ, т. 24, вып. 6.
9. Родионов В. Н., Адушкин В. В., Костюченко В. Н., Николаевский В. Н., Ромащов А. Н., Цветков В. Н. Механический эффект подземного взрыва. М., «Недра», 1974.

УДК 534.222 &

ПРИБЛИЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ КОНДЕНСИРОВАННЫХ ВЕЩЕСТВ

Г. А. Богачев
(Москва)

Приближенно построены функции, входящие в уравнение состояния твердых тел Ми — Грюнайзена. В работе [1] было предложено приближенное уравнение состояния твердых тел, ударные адиабаты которых подчиняются линейному соотношению между скоростью ударной волны D и массовой скоростью U , причем тангенс наклона ударной адиабаты равнялся 1,5. В данной работе с использованием безразмерных переменных, предложенных в [2], строится аппроксимационное уравнение состояния, свободное от указанного ограничения.

По найденному уравнению состояния выполнены расчеты ударного сжатия пористых металлов, в частности меди при значениях пористости, не отличающихся значительно от единицы.

1. Приближенное уравнение состояния твердых тел. В работе [1] приведено аналитическое выражение обобщенной ударной адиабаты Гюгоньо для материалов с линейной зависимостью между скоростью ударной волны и массовой скоростью вещества вида

$$(1.1) \quad D = a + bU,$$

где a и b — экспериментально измеряемые постоянные величины. Этой линейной связи, как показано в работе [2], соответствуют безразмерные переменные, позволившие записать ударную адиабату в компактном виде

$$(1.2) \quad p_H = x(1-x)^{-2}.$$

Здесь p_H (безразмерное давление на адиабате Гюгонио) и x определяются равенствами

$$p_H = P_H/P_c, \quad P_c = \rho_0 a^2/b, \quad x = z/z_L,$$

где $z = 1 - \rho_0/\rho$ — относительная сжимаемость вещества, а ρ_0 и ρ — начальная и конечная плотности твердого тела; $z_L = 1/b$ — предельное значение относительной сжимаемости [3]. Таким образом, переменная x обозначает относительную долю сжимаемости от максимально возможной. P_c — так называемое характеристическое давление, которое можно интерпретировать как меру сопротивления материала ударному сжатию или как ударную жесткость [2].

Описываемая соотношением (1.2) связь между ударной сжимаемостью материала и давлением для различных материалов изображается одной и той же точкой в (P_H, x) плоскости.

Из уравнения (1.1) и законов сохранения на фронте ударной волны получается выражение для безразмерной удельной внутренней энергии на адиабате Гюгонио в виде

$$(1.3) \quad \epsilon_H = 1/2 x p_H,$$

где введено обозначение $\epsilon_H = E_H/(a^2/b^2)$. В формулах (1.2), (1.3) пренебрегается начальным давлением и начальной внутренней энергией вещества перед ударным фронтом.

Если соотношение (1.1) соблюдается до очень больших давлений, то из (1.2), (1.3) следует, что сжатие вещества стремится, как это и требуется, к предельному значению $x_* = 1$.

В твердых телах удельную внутреннюю энергию и давление обычно разделяют на тепловую часть и холодную (ϵ_x, p_x), связанную с деформацией кристаллической решетки. Связь между тепловым давлением и энергией устанавливается уравнением, известным как уравнение Ми—Грюнайзена [4]

$$(1.4) \quad \frac{p - p_x}{\epsilon - \epsilon_x} = \frac{\gamma}{b - x}.$$

Здесь p_x и ϵ_x представлены в безразмерном виде, как p_H и ϵ_H ; γ — коэффициент Грюнайзена, зависящий только от удельного объема [5]. Из определения переменных z и x следует, что знаменатель в правой части (1.4) не обращается в нуль (за исключением случая предельного сжатия сапфира, у которого $b = 1$; в остальных исследованных твердых телах b строго больше единицы [2]). Так как p_x и ϵ_x берутся на изотерме абсолютного нуля, то между ними существует связь

$$(1.5) \quad d\epsilon_x - p_x dx = 0.$$

Используя уравнение (1.4), которое должно выполняться на адиабате Гюгонио, и соотношение (1.5), получим линейное дифференциальное уравнение

$$(1.6) \quad \frac{d\epsilon_x}{dx} - \frac{\gamma}{b-x} \epsilon_x = p_H - \frac{\gamma}{b-x} \epsilon_H.$$

Решение этого уравнения с начальным условием $\varepsilon_x(0)=0$ имеет вид

$$\varepsilon_x(x) = e^{\int_0^x \frac{\gamma}{b-x} dx} \int_0^x \left(p_H - \frac{\gamma}{b-x} \varepsilon_H \right) e^{-\int_0^x \frac{\gamma}{b-x} dx} dx.$$

Входящие в эту формулу интегралы могут быть вычислены при определенных предположениях о виде функции $\gamma(x)$. Аналитический вид $\varepsilon_x(x)$ при постоянном γ и следующих частных значениях параметров $b=1,5$ и $\gamma=1$ или $\gamma=2$ приведен в [1].

Если соотношения (1.1), (1.4) справедливы до очень больших давлений, то можно найти предельное γ_* . При сжатии вещества сильными ударными волнами, начиная с некоторого давления, тепловые части давления и энергии значительно превосходят p_x и ε_x . Поэтому имеем

$$(1.7) \quad \gamma_* = (b-x) \frac{p_H - p_x}{\varepsilon_H - \varepsilon_x} \approx (b-x_*) \frac{p_H}{\varepsilon_H} = 2(b-x_*)/x_*.$$

Так как ранее было найдено, что $x_*=1$, то из (1.9) получим

$$(1.8) \quad \gamma_* = 2(b-1).$$

Это выражение совпадает с аналогичной формулой из [1]. Заметим, что при сжатии вещества ударными волнами функции p_x и ε_x должны быть известны как можно точно лишь до средних сжатий, так как при больших сжатиях их вклад в уравнение (1.4) пренебрежимо мал.

Уравнение (1.6) можно приближенно решить путем разложения входящих в него функций в ряд по малому параметру x . В результате интегрирования имеем

$$(1.9) \quad \varepsilon_x = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{12} \left(9 - \frac{\gamma_0}{b} \right) x^4 + \dots$$

Отсюда и из (1.5) находим

$$(1.10) \quad p_x = x + 2x^2 + \left(3 - \frac{\gamma_0}{3b} \right) x^3 + \dots$$

Приведем для сравнения разложения ε_H и p_H

$$\varepsilon_H = 1/2(x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots), \quad p_H = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

Коэффициенты в полученных рядах имеют более простой вид, чем в соответствующих формулах работы [1].

Как видно из (1.9), (1.10), постоянная γ_0 (первое слагаемое в разложении γ по x) вошла только в коэффициенты при x^4 и x^3 соответственно в выражениях ε_x и p_x , т. е. γ начинает играть существенную роль при значениях x , достаточно близких к единице. В связи с этим величина γ в выражении упругой энергии (1.9) существенна для средних сжатий, а при больших сжатиях несущественна сама упругая составляющая. Поэтому в разложении (1.9) можно ограничиться первым слагаемым и записать

$$(1.11) \quad \varepsilon_x = 1/2x^2.$$

За основу для приближенных построений уравнения состояния веществ возьмем это выражение и разложение p_x до второго порядка x , т. е.

$$(1.12) \quad p_x = x + 2x^2.$$

В этом приближении для γ из (1.6) получим выражение

$$(1.13) \quad \gamma = 2(b-x)(3-2x)/(2-x),$$

которое при малых и средних сжатиях является почти константой, а при больших давлениях стремится к предельному значению γ_* (1.8). Таким образом, закончено построение всех функций, входящих в уравнение состояния твердых тел Ми—Грюнайзена (1.4).

Выражения для ε_x , p_x и γ из (1.11)—(1.13) отличаются от соответствующих формул работы [1]. Например, в обозначениях [1] выражение (1.11) можно представить в виде $\varepsilon_x = 1/2 b^2 \delta^2 / (1 + \delta)$, в то время как в [1] получено выражение $\varepsilon_x = 1,2 b^2 \delta^2 (\delta = z / (1 - z))$. Сравнение этих соотношений показывает, что при достаточно малом значении δ обе формулы должны дать близкие результаты. При других значениях δ различие может оказаться существенным.

2. Ударная адиабата пористого вещества. Применим полученное приближенное уравнение состояния Ми—Грюнайзена для расчета ударной адиабаты пористого вещества. Аналитическое выражение этой адиабаты приведено в [4] в предположениях, что электронное давление и энергия малы, коэффициент Грюнайзена постоянен и начальной энергией можно пренебречь.

Когда сжатие пористого вещества происходит при достаточно большом давлении (для пористой меди свыше 26 кбар [6]), детали схлопывания пор становятся несущественными для предсказания конечного состояния пористого вещества. Если далее пренебречь вкладом пор в суммарное давление и внутреннюю энергию системы и использовать уравнение состояния Ми—Грюнайзена (1.4), то ударную адиабату пористого вещества можно записать в виде [8]

$$(2.1) \quad p_H = \frac{(h-1)p_x(x) - 2[\varepsilon_x(x) - \varepsilon_T(x_0, T_0)] / (b-x)}{h - \frac{b}{m(b-x)}}$$

где $h = 1 + 2/\gamma(x)$; T — абсолютная температура; $m = V_0/V_{00}$ — начальная пористость вещества; V_0 и V_{00} — начальный удельный объем монолитного

Таблица 1

Вещество	ρ_0 , г/см ³	a , км/с	b	U , км/с	Литература
Cu	8,93	3,94	1,489	$0 < U < 2,5$	[6]

и пористого образцов соответственно. Индекс нуль обозначает начальное состояние. Как известно [4], существует предельный объем $V_{пр} = V_{00}/h$, до которого можно сжать пористое вещество.

Если $V_{пр}$ меньше V_0 , что имеет место при небольшой пористости, когда $V_{00}/V_0 < h$, то ударные адиабаты имеют нормальный ход, причем проходят тем выше, чем больше начальный удельный объем V_{00} . Для меди с пара-

Таблица 2

$m=1$			$m=0,88$			$m=0,82$		
U , км/с	D , км/с	x	U , км/с	D , км/с	x	U , км/с	D , км/с	x
0,213	4,257	0,07	0,321	1,945	0,04	0,441	1,875	0,04
0,463	4,629	0,15	0,513	2,702	0,07	0,701	2,695	0,07
0,761	5,073	0,22	0,708	3,291	0,11	0,967	3,392	0,11
1,122	5,611	0,30	0,917	3,822	0,15	1,263	4,073	0,15
1,569	6,276	0,37	1,150	4,341	0,19	1,608	4,799	0,19
2,136	7,121	0,45	1,415	4,881	0,22	2,027	5,631	0,22
2,880	8,228	0,52	1,723	5,469	0,26	2,563	6,658	0,26
			2,086	6,137	0,30			
			2,529	6,929	0,34			
			3,086	7,912	0,37			

метрами, приведенными в табл. 1, по (1.13) получается оценка $h_{\min} \approx 1,445$. Ниже будут вычислены ударные адиабаты пористых образцов меди с $V_{00}/V_0 < 1,21$, т. е. для которых заведомо выполняется неравенство $V_{00}/V_0 < h$.

Рассмотрим пористые образцы с небольшой начальной пористостью, пренебрегая начальной тепловой энергией ϵ_T в (2.1). Подставив в (2.1) выражения p_x , ϵ_x и γ из (1.12), (1.13), представим p_H как функцию x . С помощью (2.1) найдем, например, ударные адиабаты пористой меди при различных значениях начальной пористости m ^[6]. При вычислении этих адиабат были использованы параметры меди, приведенные в табл. 1.

Результаты вычислений ударных адиабат Гюгоню вместе с соответствующими значениями параметра x представлены в табл. 2 через переменные D и U , переход к которым осуществляется с помощью законов сохранения на фронте ударной волны: $p_H = DU/V_0$, $z = U/D$. На фигуре изображена зависимость D от U при различных значениях начальной пористости. Кривые 1—3 соответствуют значениям $m = 1; 0,88; 0,82$. Для сравнения здесь же представлены экспериментальные данные, взятые из [5]. Как видно из фигуры, согласие между теоретическими и опытными цифрами вполне удовлетворительное.

Вычисления ударных адиабат, выполненные при больших значениях пористости, привели к результатам, отличающимся от экспериментальных. Учет начальной тепловой энергии ϵ_T в формуле (2.1), как показано в [6], устраняет это расхождение.

Автор выражает признательность за сделанные замечания В. Н. Николаевскому, обратившему внимание автора на работу [1].

Поступила 5 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Корявов В. П. Приближенное уравнение состояния твердых тел.— ПМТФ, 1964, № 5.
2. Prieto F. E. A law of corresponding states for materials at shock pressures.— J. Phys. Chem. Solids, 1974, vol. 35, N 2.
3. Prieto F. E., Renero C. Equation for the shock adiabat.— J. Appl. Phys., 1970, vol. 41, N 9.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
5. Высокоскоростные ударные явления. М., «Мир», 1973.
6. O'Keefe D. J. Theoretical determination of the shock states of porous copper.— J. Appl. Phys., 1971, vol. 42, N 2.

