

РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО
ЛИНЕЙНОГО ПИНЧА С ОДНОРОДНОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

А. Ф. Александров, Е. П. Каминская, А. А. Рухадзе

(Москва)

Теоретически исследованы равновесие и устойчивость сильноточного разряда в плотной оптически серой плазме. Плазма считается полностью непрозрачной для длинноволновых квантов и полностью прозрачной для коротковолновых. Значение граничной частоты определено исходя из равенства размера плазменного шнура длине пробега кванта. Решаются уравнения магнитной гидродинамики совместно с уравнением переноса излучения. Показано, что в серой плазме возможно существование равновесного состояния с практически однородным распределением температуры по сечению разряда. Однородность температуры обеспечивается большой лучистой теплопроводностью, связанной с длинноволновым излучением. Лучистая теплопроводность обуславливает также устойчивость разряда по отношению к перегреву. Проанализирован вопрос о возможности использования такого разряда для энергетической накачки ОКГ. Показано, что при разрядных токах порядка 10^6 а к.п.д. серого разряда в три раза превышает к.п.д. непрозрачного разряда.

В работах [1-6] исследовались равновесие и устойчивость сильноточного самосжатого разряда в предельных случаях оптически непрозрачной и полностью прозрачной плазмы. Было показано, что в условиях большой лучистой теплопроводности температура плазмы в разряде является с хорошей степенью точности однородной по сечению разряда, если разрядный ток не превышает некоторого максимального значения J_{\max} . Такая плазма излучает как абсолютно черное тело, т. е. обеспечивает максимальный выход излучения в любом заданном спектральном интервале. При этом, для того чтобы соблюдались условия применимости приближения лучистой теплопроводности, разрядный ток должен быть больше некоторого минимального значения J_{\min} ($J_{\max} / J_{\min} \approx 3$).

Казалось бы, такой разряд является оптимальным с точки зрения использования его как источника излучения для накачки оптических квантовых генераторов, тем более что он устойчивее прозрачного разряда, который подвержен быстроразвивающейся перегривной неустойчивости. Однако очевидно, что оптически непрозрачный разряд обладает малым к.п.д. Действительно, для накачки ОКГ обычно нужно обеспечить максимум излучения в некоторой спектральной области. Нас, в частности, интересует область от 2000 до 3000 Å. Для черного тела излучение в этом интервале при $T = 3 \div 5$ eV составляет $\sim 6\%$ полного излучения. Прозрачный разряд в атмосфере ряда элементов обладает необходимой селективностью излучения, но, как уже говорилось, гораздо менее устойчив. Поэтому оптимальным с точки зрения использования в качестве источника излучения для накачки ОКГ представляется «серый» излучатель, близкий к черному в заданной области длин волн и прозрачный для более коротковолнового излучения. При этом можно ожидать, что длинноволновое излучение обеспечит необходимую для устранения перегривной неустойчивости лучистую теплопроводность.

1. **Постановка задачи и основные уравнения.** Полная система уравнений магнитной гидродинамики с учетом потока энергии излучения для полностью ионизованной плазмы, которую можно считать идеальным газом, записывается в виде [7,8]

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{4\pi}{c} \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \\ -c \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{B} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) &= -\nabla P + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{B^2}{8\pi} \right) &+ \operatorname{div} (\mathbf{q} + \mathbf{S}) = 0 \\ P &= \frac{(1+z) k \rho T}{M} \equiv v_s^2 \rho, \quad \sigma = \frac{\alpha}{z} T^{3/2} \\ \varepsilon &= c_V T = \frac{3}{2} \frac{(1+z) k T}{M} \equiv \frac{3}{2} v_s^2 \\ \mathbf{q} &= \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho} \right) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{q} — поток энергии вещества, \mathbf{S} — поток излучения, который будет определен ниже, M — масса ионов, z — их эффективный заряд, v_s — скорость изотермического звука, σ — проводимость рассматриваемой среды, $\alpha = 4 \cdot 10^7$. При написании системы (1.1), так же как и в работах [1-6], пренебрегалось электронной теплопроводностью по сравнению с лучистым теплообменом, вязкими членами, а также энергией излучения по сравнению с внутренней (тепловой) энергией частиц плазмы.

Для определения величины \mathbf{S} необходимо решать уравнение переноса излучения совместно с системой (1.1). Однако такая задача является математически чрезвычайно сложной. Для случая серого тела в качестве простейшего приближения можно разделить поток излучения на две части: $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, где \mathbf{S}_1 — поток излучения длинноволновых квантов с частотами $\nu < \nu_0$, для которых среда полностью непрозрачна, и \mathbf{S}_2 — поток излучения коротковолновых квантов с частотами $\nu > \nu_0$, для которых среда прозрачна. Здесь ν_0 — некоторая граничная частота, которую естественно определить из уравнения

$$\tau = \kappa_{\nu}'(\nu_0) r_p = 1 \quad (1.2)$$

где τ — оптическая толщина разряда, κ_{ν}' — спектральный коэффициент поглощения с учетом переизлучения (см. [8]), а r_p — равновесный размер (радиус) плазменного цилиндра, который будет определен ниже.

Вычислим потоки \mathbf{S}_1 и \mathbf{S}_2 для случая тормозного излучения, когда [8]

$$\kappa_{\nu}' = \frac{4.1 \cdot 10^{-23} z^3 N^2}{T^{1/2}} \frac{1 - e^{-x}}{x^3} \quad \left(x = \frac{h\nu}{kT} \right) \quad (1.3)$$

Для \mathbf{S}_1 согласно [1] имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \int_0^{\nu_0} d\nu \mathbf{S}_\nu = -\frac{4\pi}{3} \frac{kT}{h} \int_0^{x_0} \frac{\nabla I_{\nu p}}{\kappa_{\nu}'} dx = -\frac{\beta_0 T^{13/2} f(x_0)}{N^2 z^3} \nabla T \\ I_{\nu p} &= \frac{2(kT)^3}{c^2 h^3} \frac{x^3}{e^x - 1}, \quad f(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{e^{2x} x^7}{(e^x - 1)^3} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь I_{vp} — интенсивность излучения абсолютно черного тела, а $\beta_0 = 2.8 \cdot 10^{17}$. Для S_2 получим согласно [2]

$$\operatorname{div} S_2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_2) = \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu \int d\Omega \kappa_{\nu}' I_{\nu p} = \gamma_0 N^2 \sqrt{T} z^3 e^{-x_0}, \quad \gamma_0 = 1,4 \cdot 10^{-27} \quad (1.5)$$

2. Равновесие самосжатого разряда в оптически серой плазме. Рассмотрим стационарное равновесное состояние простого цилиндрического разряда в серой плазме в условиях однородности по сечению температуры. Из системы (1.1) видно, что в равновесии электрическое поле E_0 , создающее ток в плазме, следует считать однородным по сечению. Тогда пространственное распределение давления, плотности и магнитного поля легко определяется из первых трех уравнений системы (1.1) подобно тому, как это сделано в [1]

$$B_0 = \frac{2\pi}{c} j_0 r = \frac{2J}{cr_p^2} r = \sqrt{4\pi P_0(0)} \frac{r}{r_p} \quad (2.1)$$

$$P_0 = P_0(0) \left(1 - \frac{r^2}{r_p^2}\right), \quad \rho_0 = \rho_0(0) \left(1 - \frac{r^2}{r_p^2}\right)$$

$$r_p^2 = \frac{c^2 P_0(0)}{\pi j_0^2} = \frac{J^2}{\pi c^2 P_0(0)}, \quad J = \pi r_p^2 \sigma_0 E_0$$

где $P_0(0)$, $T_0(0)$, $\rho_0(0)$ — значения давления, температуры и плотности на оси разряда, а J — заданный полный ток в разряде. Будем считать также, что задано полное число частиц в разряде на единицу длины N_n . Тогда

$$N_n = \frac{\pi r_p^2}{2} N_0(\hat{0}) = \frac{J^2}{2kc^2(1+z)T_0(0)}, \quad T_0(\hat{0}) = \frac{J^2}{2kc^2(1+z)N_n} \quad (2.2)$$

Подставляя далее выражения (2.1), (1.4) и (1.5) в уравнение теплового баланса системы (1.1), найдем распределение температуры $T_0(r)$ по сечению плазменного цилиндра

$$T_0(r) = T_0(0) \left\{ 1 + \frac{A_0 r^2}{4C_0 T_0(0)} \left(1 - \frac{3r^2}{2r_p^2} + \frac{10r^4}{9r_p^4} - \frac{5r^6}{12r_p^6} + \frac{r^8}{15r_p^8} \right) - \frac{D_0 r^2}{2C_0 T_0(0)} \left(1 - \frac{r^2}{r_p^2} + \frac{r^4}{3r_p^4} \right) \right\} \quad (2.3)$$

$$A_0 = \gamma_0 N_0^2(0) \sqrt{T_0(0)} z^3 e^{-x_0}, \quad C_0 = \frac{\beta_0 T_0^{13/2}}{z^3 N_0^2(0)} f(x_0), \quad D_0 = \frac{P_0(0)c^2}{2\pi\sigma_0 r_p^2}$$

Теперь можно записать условие применимости принятого выше приближения однородности температуры плазмы по сечению разряда

$$A_0 r_p^2, \quad 2D_0 r_p^2 \ll 4C_0 T_0(0) \quad (2.4)$$

Для того чтобы задача стала полностью замкнутой, запишем баланс энергии на поверхности разряда

$$S(r_p) = \frac{r_p}{2} \sigma_0 E_0^2 = \frac{J^2}{2\pi^2 \sigma_0 r_p^3} = \frac{J^2 z}{2\pi^2 \alpha T_0^{3/2} r_p^3} \quad (2.5)$$

Как показано в работе [9], поток излучения с поверхности плазменного цилиндра с однородной температурой дается выражением

$$S = \frac{2\pi (kT_0)^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \int_1^\infty \frac{dy}{y^3 \sqrt{y^2 - 1}} \times \right. \\ \left. \times \int_0^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \exp\left(-\frac{16}{15} y \mu^5 \kappa' r_p\right) \right\} \quad (2.6)$$

Вычисление этого интеграла возможно только приближенное, поэтому разобьем его на два, считая, что в длинноволновой области от 0 до x_0 разряд излучает как черное тело, т. е. $\tau = \kappa' r_p \gg 1$, а при $x > x_0$ разряд прозрачен, т. е. $\tau \ll 1$. В результате (2.6) запишется в виде

$$S \approx \frac{2\pi (kT_0)^4}{c^2 h^3} \left\{ \int_0^{x_0} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} + \int_{x_0}^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \left[1 - \frac{4}{\pi} \int_1^\infty \frac{dy}{y^3 \sqrt{y^2 - 1}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \left(1 - \frac{16}{15} y \mu^5 \kappa' r_p \right) \right] \right\} \quad (2.7)$$

Здесь первый член в фигурных скобках описывает излучение длинноволновых квантов и в пределе $x_0 \rightarrow \infty$ дает известное выражение σT^4 , где σ — постоянная Стефана — Больцмана. Второй член описывает излучение коротковолновых квантов, причем при его получении экспонента разложена в ряд, что возможно, так как в этой области $\kappa' r_p \ll 1$, $\mu \leq 1$ и вклад в интеграл по dy дает область значений y , близких к единице. Интегрируя (2.7), получаем после несложных преобразований

$$S = \frac{2\pi (kT_0)^4}{c^2 h^3} \left(\Phi(x_0) + \frac{2}{3} \Psi(x_0) \right) \equiv \frac{2\pi (kT_0)^4}{c^2 h^3} \xi(x_0) \\ \Phi(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}, \quad \Psi(x_0) = \frac{x_0^3}{e^{x_0} - 1} \quad (2.8)$$

Теперь можно вычислить равновесный радиус разряда r_p , подставляя выражение (2.2) для T_0 и полученное выражение для S в равенство (2.5)

$$r_p^3 = \frac{6.7 \cdot 10^{25}}{\xi(x_0)} z (1 + z)^{1/2} \frac{N_n^{1/2}}{J^3} \quad (2.9)$$

С учетом этого выражения, а также формул (2.2) и (1.3) уравнение (1.2) для определения x_0 запишется в виде

$$1.8 \cdot 10^{-30} \left(\frac{z}{1 + z} \right)^2 \xi(x_0) \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0^3} J = 1 \quad (2.10)$$

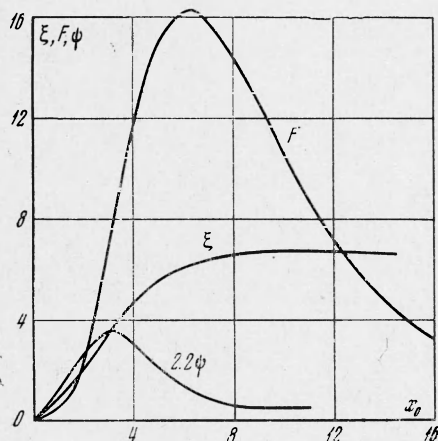
Из этого уравнения можно определить величину граничного кванта x_0 при заданном разрядном токе и, следовательно, точные распределения всех величин в разряде. Что же касается температуры в разряде, то необходимо исследовать условия (2.4), при которых ее можно считать однородной по радиусу. При $A_0 < 2D_0$ температура спадает от оси, а при выполнении обратного неравенства — нарастает к краям. Рассмотрим сначала первое из неравенств (2.4). Оно легко приводится к виду

$$7 \cdot 10^{-31} \left(\frac{z}{1 + z} \right)^2 \frac{\xi^2(x_0)}{f(x_0)} J^2 \ll 1 \quad (2.11)$$

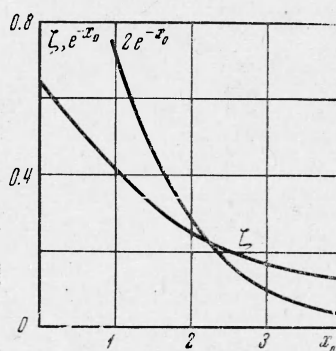
Исключив отсюда разрядный ток J при помощи (2.10), найдем, что величина x_0 при условии однородности температуры должна удовлетворять неравенству

$$\xi(x_0) \ll 2.6 \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0^3} f(x_0) = F(x_0) \quad (2.12)$$

Проанализируем это неравенство. На фиг. 1 приведены графики функций, стоящих в правой и левой частях этого неравенства. Видно, что область возможных значений x_0 , которые удовлетворяют неравенству (2.12), заключена в не-



Фиг. 1



Фиг. 2

которых пределах $2 \approx x_{0\min} < x_0 < x_{0\max} \approx 12$. Второе из неравенств (2.4) записывается в виде

$$2.2\psi(x_0) \ll F(x_0) \quad (2.13)$$

Из фиг. 1 видно, что это неравенство не накладывает новых ограничений на x_0 , так как $x_{0\min}$ по-прежнему ≈ 2 , $x_{0\max} \rightarrow \infty$. Таким образом, температуру в плазме можно считать однородной по сечению при выполнении неравенств

$$2 \approx x_{0\min} < x_0 < x_{0\max} \approx 12 \quad (2.14)$$

Если теперь подставить предельные значения x_0 в уравнение (2.10), то окажется, что разрядный ток может меняться в пределах (в амперах)

$$5.3 \cdot 10^5 \left(\frac{1+z}{z} \right) < J < 4.2 \cdot 10^6 \left(\frac{1+z}{z} \right) \quad (2.15)$$

В полностью непрозрачной плазме [6] величина разрядного тока ограничивалась неравенствами

$$1.4 \cdot 10^6 \left(\frac{1+z}{z} \right) < J < 4.3 \cdot 10^6 \left(\frac{1+z}{z} \right) \quad (2.16)$$

Отсюда видно, что верхняя граница в пределах точности расчета не изменилась. Это и естественно, поскольку верхняя граница тока соответствует $x_{0\max} \approx 12$, т. е. вблизи верхней границы плазма является непрозрачной практически во всем спектральном диапазоне. В то же время нижняя граница разрядного тока сильно сдвинулась в сторону меньших значений. Это является следствием того, что однородность температуры в разряде, т. е. необходимую величину лучистой теплопроводности, способны обеспечить длинноволновые кванты в диапазоне от 0 до x_0 .

Рассмотрим теперь условие $A_0 < 2D_0$, соответствующее спаданию температуры от оси разряда к периферии. Легко показать, что оно сводится к виду

$$\zeta(x_0) = \xi(x_0) \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0^3} > 2e^{-x_0} \quad (2.17)$$

Как следует из фиг. 2, оно может нарушаться только при $x_0 \leq 2$, т. е. вне области рассмотрения.

В заключение следует сделать замечание относительно общего выхода излучения серого разряда. Отношение полного потока излучения непрозрачного разряда S^* к потоку излучения серого разряда S дается следующим выражением:

$$\eta = \frac{1}{\xi(x_0)} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \approx \frac{6.5}{\xi(x_0)} \quad (2.18)$$

Отсюда видно, что это отношение зависит от x_0 , т. е. от силы разрядного тока. При больших x_0 , т. е. при значениях тока, близких к J_{\max} , $\eta \rightarrow 1$ и серый разряд ведет себя как абсолютно черный. При малых разрядных токах, близких к J_{\min} , величина η уже отлична от единицы и ее максимальное значение равно

$$\eta_{\max} = \frac{6.5}{\xi(x_{0 \min})} \approx 3 \quad (2.19)$$

Это означает, что при разрядном токе, близком к J_{\min} , к.п.д. серого разряда больше, чем к.п.д. непрозрачного, примерно в три раза. Полагая $z = 1$, найдем $J_{\min} = 1.1 \cdot 10^6$ а; в непрозрачном же разряде при $z = 1$ имеем $J_{\min} = 2.8 \cdot 10^6$ а.

3. Устойчивость малых возмущений в серой плазме. В рассматриваемом случае серого разряда с однородной температурой силовые неустойчивости (перетяжки и изгибы) должны развиваться совершенно так же, как и в случае разряда в оптически непрозрачной плазме. Дело в том, что при исследовании силовых неустойчивостей уравнение баланса тепла, в котором содержится вся специфика «серости» плазмы, можно вообще не принимать во внимание, поэтому весь анализ, проведенный в работах [1, 4, 5], сохраняет силу и в рассматриваемом случае; максимальное значение инкремента нарастания силовых неустойчивостей при этом

$$\gamma_{\max} \leq v_s / r_p \quad (3.1)$$

Перегревная неустойчивость в оптически непрозрачной плазме вообще не развивается. Покажем, что в сером разряде перегревная неустойчивость, обусловленная омическим нагревом плазмы, также стабилизирована лучшей теплопроводностью, связанной с длинноволновым излучением.

Для исследования перегревной неустойчивости, как известно [2, 3], достаточно рассмотреть лишь коротковолновые радиальные возмущения, описываемые в рамках нулевого приближения геометрической оптики [10]. Поэтому возмущенные величины представим в виде $e^{-i\omega t + ikr}$, где $kr_p \gg 1$. Рассмотрим область высоких частот $\omega \gg kv_s$, так как перегревная неустойчивость, если она вообще существует, в силу (3.1) может проявиться только в этой области. Уравнение переноса тепла в разряде можно записать в виде [7]

$$\rho T \frac{1+z}{M} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (v \nabla) \right] \ln \frac{T^{3/2}}{\rho} = \sigma E^2 - \gamma_0 N^2 \sqrt{T} z^3 e^{-x_0} + \operatorname{div} \frac{\beta_0 f(x_0) T^{3/2}}{z^3 N^2} \nabla T \quad (3.2)$$

В условиях, когда

$$\frac{c^2 k^2}{4\pi\sigma_0} \gg \omega \gg kv_s \quad (3.3)$$

электрическое поле в процессе колебаний температуры успевает выравниваться по сечению разряда, а плотность, напротив, не успевает измениться. Кроме того, можно пренебречь вторым членом в левой части уравнения (3.2). Переходя к малым возмущениям равновесной температуры $T \rightarrow T_0 + T_1$ и линеаризуя уравнение (3.2), получаем

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{2}{3P_0} \left(\frac{j_0^2}{\sigma_0} - k^2 C_0 T_0 \right) T_1 \quad (3.4)$$

Отсюда найдем

$$\omega = i \frac{2}{3P_0} \left(\frac{j_0^2}{\sigma_0} - k^2 C_0 T_0 \right) \quad (3.5)$$

Это выражение можно получить также из более строгого рассмотрения, т. е. из уравнения эйконала, к которому сводится линеаризованная система уравнений движения (1.1) в пределе коротких длин волн колебаний (по радиусу), описываемых в рамках нулевого приближения геометрической оптики. Заметим, что первый член в (3.5) — не что иное, как инкремент нарастания высокочастотной перегревной неустойчивости в прозрачной плазме [2, 3]. Легко показать, что в серой плазме эта неустойчивость стабилизируется длинноволновым излучением, описываемым вторым слагаемым в (3.5), и практически не может развиваться, так как оба члена в (3.5) одного порядка и условие $\omega \gg kv_s$ не выполняется.

Поступила 24 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Рухадзе А. А., Триггер С. А. О равновесии и устойчивости сильноточного разряда в плотной плазме в условиях лучистой теплопроводности. ПМТФ, 1968, № 3, стр. 11.
2. Розанов В. Б., Рухадзе А. А., Триггер С. А. Теория равновесия и устойчивости сильноточного разряда в плотной оптически прозрачной плазме. ПМТФ, 1968, № 5, стр. 18.
3. Рухадзе А. А., Триггер С. А. Теория равновесия и устойчивости сильноточного самосжато разряда в плотной оптически прозрачной плазме конечной проводимости. Препринт Физ. ин-та им. П. Н. Лебедева, 1969, № 26.
4. Рухадзе А. А., Триггер С. А. Перетяжки в плазме конечной проводимости. ЖЭТФ, 1969, т. 56, вып. 3, стр. 1029.
5. Рухадзе А. А., Триггер С. А. Теория равновесия и устойчивости сильноточного разряда в плазме низкой проводимости. ПМТФ, 1969, № 4, стр. 14.
6. Alexandrov A. F., Rukhadse A. A., Trigger S. A. The theory of equilibrium and stability of powerful discharge in a dense plasma. 9-th Internat. Con. Phenomena Ioniz. Gases. Bucharest, 1969; Bucharest, s. a., p. 379.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
8. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
9. Пустовалов В. В., Розанов В. Б. Тормозное излучение стационарного коаксиального плазменного слоя с однородной температурой. Препринт Физ. ин-та им. П. Н. Лебедева, 1969, № 52.
10. Рухадзе А. А., Силин В. П. Метод геометрической оптики в электродинамике неоднородной плазмы. Усп. физ. н., 1964, т. 82, вып. 3.