

**ПРИСОЕДИНЕННАЯ МАССА ЖИДКОСТИ ДЛЯ СУДНА,
СОВЕРШАЮЩЕГО КОЛЕБАНИЯ В КАМЕРЕ СУДОХОДНОГО
СООРУЖЕНИЯ**

О. Ф. Васильев

(Новосибирск)

Поставленная задача представляет интерес для анализа колебаний судов в камерах судоподъемников и шлюзов. В подобных задачах существенное практическое значение имеет учет присоединенных масс воды при вертикальных и продольных колебаниях судна. Рассмотрим эту задачу в приближенной постановке.

1. Постановка задачи. Будем считать, что поперечные сечения судна и камеры близки к прямоугольным (фиг. 1) и не меняются по длине¹, а продольная ось судна параллельна оси камеры. При определении присоединенных масс воды воспользуемся гипотезой плоского обтекания, т. е. предположим, что каждый шпангоут судна обтекается плоским потоком, у которого отсутствуют составляющие, направленные вдоль судна.

Задача об учете гидродинамических инерционных сил может быть сведена к определению присоединенной массы воды m , приходящейся на единицу длины судна [1].

Пусть некоторое сечение (шпангоут) судна совершает малые вертикальные гармонические колебания

$$\eta = \varepsilon \sin \mu t \quad (1.1)$$

Поперечные колебания судна в судоводных сооружениях обычно незначительны, поэтому ими пренебрегаем.

Координатную систему yz , неподвижно связанную с камерой, расположим, как показано на фиг. 1. Найдем возмущенное движение жидкости в поперечном сечении камеры, происходящее вследствие колебаний судна.

Это движение жидкости, в соответствии с гипотезой плоского обтекания, можно считать плоско-параллельным. Так как массовые силы имеют потенциал, движение жидкости, пренебрегая вязкостью, можно считать также и потенциальным, подчиняющимся уравнению Лапласа

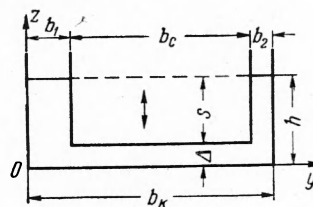
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $\varphi = \varphi(y, z, t)$ — потенциал скорости.

Распределение давления p при этом определяется интегралом Лагранжа — Коши

$$U + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(t)$$

¹ Такое допущение в отношении речных судов очень близко к действительности. Крупные и средние речные суда строятся плоскодонными с поперечным сечением погруженной части почти прямоугольным, радиус закругления скулы весьма мал. Принятые прямоугольной формы камеры практически полностью соответствуют действительности.



Фиг. 1

Член $F(t)$ не играет роли при определении скоростей и результирующей давлений. Удобно положить его равным p_0/ρ , где p_0 — постоянное давление на свободной поверхности. Тогда

$$p = p_0 - \rho \left(U + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (1.3)$$

Для простоты можно считать $p_0 = 0$ (это означает, что p — избыточное давление).

Судно совершает малые колебания, поэтому перемещения и скорости частиц жидкости можно считать малыми, и в гидродинамических зависимостях можно пренебрегать членами второго порядка по сравнению с линейными. Из выражения (1.3) следует

$$p = -\rho \left(U + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (1.4)$$

Потенциал массовых сил U характеризует здесь ту часть давления («гидростатическую часть»), которая определяет выталкивающую силу, действующую на корпус судна. Нас же интересуют гидродинамические инерционные силы, которые характеризуются вторым слагаемым $\partial \varphi / \partial t$. Поэтому, определяя присоединенную массу жидкости, будем принимать во внимание лишь «динамическую часть» давления

$$p_u = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.5)$$

Вертикальную составляющую силы гидродинамического воздействия на рассматриваемый шпангоут судна (т. е. гидродинамическую силу, приходящуюся на единицу длины судна) с учетом малости колебаний представим в виде

$$f_u = \int_{b_1}^{b_1+b_c} p_u(y, \Delta, t) dy = -\rho \int_{b_1}^{b_1+b_c} \frac{\partial \varphi(y, \Delta, t)}{\partial t} dy = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{b_1}^{b_1+b_c} \varphi(y, \Delta, t) dy \quad (1.6)$$

Выразим форму свободной поверхности уравнением $\zeta = \zeta(y, t)$, где ξ — отклонение свободной поверхности от нормального положения. Для свободной поверхности из (1.4) получим

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \right]_{z=h+\zeta} = 0$$

или с учетом малости колебаний¹ и после подстановки U

$$\frac{\partial \varphi(y, h, t)}{\partial t} + g(h + \zeta) = 0 \quad (1.7)$$

Продифференцируем уравнение (1.7) по t

$$\frac{\partial^2 \varphi(y, h, t)}{\partial t^2} + g \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$$

Приняв, как обычно [2], при малых колебаниях

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_z(y, h, t) = \frac{\partial \varphi(y, h, t)}{\partial z}$$

получим граничное условие на свободной поверхности

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h \quad (1.8)$$

¹ Если рассматривается ускоренное движение судовозной камеры, то к g нужно прибавить еще и вертикальную составляющую ускорения камеры.

На всех вертикальных участках контура сечения жидкой массы, а также на днище камеры имеем соответственно

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (1.9)$$

Граничное условие на днище судна напишем так:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=\Delta} = \frac{d\eta}{dt} = \varepsilon \mu \cos \mu t \quad (1.10)$$

Решение задачи можно упростить, приняв во внимание малую частоту вертикальных и продольных вынужденных колебаний судна в камерах судоходных сооружений, а также малость отношения b/s в наиболее важных расчетных случаях¹. При этом можно считать, что свободная поверхность совершает колебания, оставаясь практически горизонтальной по ширине, или, иначе, все ее точки по ширине имеют практически одинаковую скорость. Тогда, исходя из условия неразрывности потока на свободной поверхности, положим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=h} = u_z = \frac{dz}{dt} = -\frac{b_c}{b} \frac{d\eta}{dt} = -\frac{b_c}{b} \varepsilon \mu \cos \mu t \quad (1.11)$$

Учитывая периодичность колебаний жидкости, при сделанных допущениях потенциал скорости будем искать в виде

$$\Phi(y, z, t) = \varepsilon \mu \cos \mu t \Phi(y, z) \quad (1.12)$$

При этом функция $\Phi(y, z)$ также должна удовлетворять уравнению Лапласа (1.2) и граничным условиям (1.9). Из (1.10) и (1.11) граничные условия на днище судна и свободной поверхности получим в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=\Delta} = 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=h} = -\frac{b_c}{b} \quad (1.13)$$

Заметим здесь, что условие на свободной поверхности при малой частоте колебаний судна в рассматриваемой задаче отличается от условия для безграничного объема жидкости ($\partial \Phi / \partial z|_{z=h} = \partial \Phi / \partial z = 0$) (см., например, работы [3, 4]). Это отличие объясняется ограниченностью объема жидкости в данном случае; при $b \rightarrow \infty$ из (1.11), (1.13) следует обычное граничное условие.

Присоединенная масса жидкости в исследуемом случае определяется исключительно распределением давлений по днищу судна. Понятно, что при ширине судна b_c , близкой к ширине камеры b_k , и малом отношении Δ/h , что имеет место в наиболее важных расчетных случаях, влияние формы свободной поверхности на распределение давлений по днищу судна, а стало быть, и на присоединенную массу будет весьма мало.

Итак, рассматриваемая задача приведена к задаче Неймана для области, имеющей полигональную форму.

Принятие на свободной поверхности жидкости приближенного граничного условия (1.11) вместо более точного (1.8) означает некоторое нарушение условия постоянства деления на свободной поверхности, из которого получено (1.8). При решении задачи Неймана, потенциал определяется с точностью до постоянной интегрирования. Чтобы определить эту постоянную, нужно написать дополнительное условие на свободной поверхности, вытекающее из того, что в среднем на этой поверхности избыточное давление должно быть равно нулю. Тогда из (1.5) и (1.12)

$$\int_b \frac{\partial \Phi(y, h, t)}{\partial t} dy = 0, \quad \int_b \Phi(y, h) dy = 0 \quad (1.14)$$

¹ Имеется в виду случай, когда в камере находится наибольшее расчетное судно с наибольшей осадкой.

причем интегрирование ведется по свободной поверхности с общей шириной $b = b_1 + b_2$. Такое условие физически равносильно тому, что свободная поверхность накрыта невесомым поршнем, совершающим колебания вместе с поверхностью жидкости и передающим интегрально внешнее атмосферное давление.

Подставив (1.12) в (1.6), получим

$$f_u = \rho \mu^2 \sin \mu t \int_{b_1}^{b_1+b_2} \Phi(y, \Delta) dy \quad (1.15)$$

Присоединенную массу воды, приходящуюся на единицу длины судна, получим как отношение даламберовой силы к ускорению

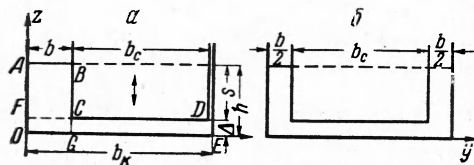
$$m = -\frac{f_u}{\eta''(t)} = \rho w, \quad \left(w = \int_{b_1}^{b_1+b_2} \Phi(y, \Delta) dy \right) \quad (1.16)$$

Здесь w — присоединенный объем, приходящийся на единицу длины.

Коэффициент присоединенной массы

$$\kappa = \frac{m}{\rho \omega_c} = \frac{w}{\omega_c} \quad (1.17)$$

причем ω_c — площадь поперечного сечения погруженной части судна.



Фиг. 2

Из приведенных выражений видно, что w , m и κ при сделанных выше предположениях оказываются постоянными по длине судна и не зависят от частоты колебаний. Опираясь на это обстоятельство, а также на дополнительное допущение о равномерном распределении массы судна по его приведенной длине [5], получаем следующие выражения для присоединенной массы воды при вертикальных колебаниях судна и присоединенного момента инерции массы воды относительно центральной поперечной оси судна

$$\Delta M = \kappa M, \quad \Delta I = \kappa I \quad (1.18)$$

К этим же соотношениям можно прийти, если считать, что присоединенная масса воды распределяется по длине судна пропорционально распределению его массы. Это равносильно допущению о постоянстве по длине коэффициента присоединенной массы при произвольном распределении масс по длине.

2. Решение методом Шварца. Для выявления значимости присоединенной массы целесообразно рассмотреть два положения судна по ширине камеры: а) когда оно прислонено к борту камеры (фиг. 2, а), б) когда оно располагается по оси камеры (фиг. 2, б). Очевидно, что при прочих равных условиях в первом случае будем иметь наибольшее значение присоединенной массы, во втором — наименьшее.

Рассмотрим сначала первое положение судна. Ко второму перейти нетрудно, если воспользоваться свойствами симметрии.

Для решения такой задачи¹ используем алгоритм Шварца [6].

Пусть в области $OABG$ функция $\Phi(y, z)$ принимает значение $V(y, z)$, а в области $OFDE$ — значение $W(y, z)$. В первом приближении на участке

¹ Для решения рассматриваемой задачи можно воспользоваться также методом, аналогичным предложенному Н. Х. Арутюняном [7] для решения некоторых задач о кручении призматических стержней с полигональным поперечным сечением. Однако метод Шварца представляется более простым и вместе с тем достаточно быстро приводящим к вполне приемлемому по точности ответу.

CG, исходя из принципа неразрывности, примем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{b_c}{\Delta} \quad (2.1)$$

Построим последовательности функций $V^{(1)}(y, z)$, $V^{(2)}(y, z)$, ... и $W^{(1)}(y, z)$, $W^{(2)}(y, z)$, ..., решая задачу Неймана при граничных условиях

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial n} = \begin{cases} 0 & \text{на } AOG \text{ и } BC \\ -\frac{b_c}{b} & \text{на } AB \\ \frac{b_c}{\Delta} & \text{на } CG \end{cases} \quad \frac{\partial W^{(1)}}{\partial n} = \begin{cases} 0 & \text{на } DEF \\ 1 & \text{на } CD \\ \frac{\partial V^{(1)}(y, \Delta)}{\partial z} & \text{на } FC \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial V^{(m)}}{\partial n} = \begin{cases} 0 & \text{на } AOG \text{ и } BC \\ -\frac{b_c}{b} & \text{на } AB \\ \frac{\partial W^{(m-1)}(b, z)}{\partial y} & \text{на } CG \end{cases} \quad \frac{\partial W^{(m)}}{\partial n} = \begin{cases} 0 & \text{на } DEOF \\ 1 & \text{на } CD \\ \frac{\partial V^{(m)}(y, \Delta)}{\partial z} & \text{на } FC \end{cases} \quad (2.3)$$

Ввиду того, что граничные условия являются неоднородными, для отыскания $V^{(m)}$ и $W^{(m)}$ применим метод Г. А. Гринберга [8]. Представим

$$V^{(m)} = \frac{1}{2} Z_0^{(m)}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k^{(m)}(z) \cos \frac{k\pi}{b} y$$

$$\left(Z_k^{(m)}(z) = \frac{2}{b} \int_0^b V^{(m)} \cos \frac{k\pi}{b} y dy \right) \quad (2.4)$$

$$W^{(m)} = \frac{1}{2} Y_0^{(m)}(y) + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{(m)}(y) \cos \frac{k\pi}{\Delta} z$$

$$\left(Y_k^{(m)}(y) = \frac{2}{\Delta} \int_0^{\Delta} W^{(m)} \cos \frac{k\pi}{\Delta} z dz \right) \quad (2.5)$$

Функция V подчиняется уравнению Лапласа (1.2), поэтому

$$\frac{2}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 V^{(m)}}{\partial y^2} \cos \frac{k\pi}{b} y dy + \frac{2}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 V^{(m)}}{\partial z^2} \cos \frac{k\pi}{b} y dy = 0$$

Интегрируя первое слагаемое дважды по частям и используя (2.4), находим

$$\frac{d^2 Z_k^{(m)}}{dz^2} - \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 Z_k^{(m)} = \frac{2}{b} (-1)^{k+1} \frac{\partial V^{(m)}(b, z)}{\partial y} \quad (2.6)$$

При этом граничные условия для отыскания Z_k из (2.2) и (2.4) получим такие

$$\frac{dZ_k(0)}{dz} = 0;$$

$$\frac{dZ_k(h)}{dz} = \frac{2}{b} \int_0^b \left(-\frac{b_c}{b} \right) \cos \frac{k\pi}{b} y dy = \begin{cases} -2 \frac{b_c}{b} & \text{(при } k=0) \\ 0 & \text{(при } k=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.7)$$

Таким же образом находим для W

$$\frac{d^2 Y_k^{(m)}}{dy^2} - \left(\frac{k\pi}{\Delta} \right)^2 Y_k^{(m)} = \frac{2}{\Delta} (-1)^{k+1} \frac{\partial W^{(m)}(y, \Delta)}{\partial z} \quad (2.8)$$

при граничных условиях

$$\frac{dY_k(0)}{dy} - \frac{dY_k(b_k)}{dy} = 0 \quad (2.9)$$

Решение уравнения (2.6) при (2.7)

$$Z_0^{(m)}(z) = A^{(m)} - \frac{2}{b} \int_0^z \frac{\partial V^{(m)}(b, \xi)}{\partial y} (z - \xi) d\xi \quad (2.10)$$

при $k \neq 0$

$$Z_k^{(m)}(z) = \frac{2(-1)^k}{k\pi} \left\{ \operatorname{ch} \frac{k\pi z}{b} \operatorname{csh} \frac{k\pi h}{b} \int_0^\Delta \frac{\partial V^{(m)}(b, \xi)}{\partial y} \operatorname{ch} \frac{k\pi(h-\xi)}{b} d\xi - \right. \\ \left. - \int_0^z \frac{\partial V^{(m)}(b, \xi)}{\partial y} \operatorname{sh} \frac{k\pi(z-\xi)}{b} d\xi \right\} \quad (2.11)$$

Решение уравнения (2.8) при (2.9)

$$Y_0^{(m)} = B^{(m)} - \frac{2}{\Delta} \int_0^y \frac{\partial W^{(m)}(\xi, \Delta)}{\partial z} (y - \xi) d\xi \quad (2.12)$$

при $k \neq 0$

$$Y_k^{(m)} = \frac{2(-1)^k}{k\pi} \left\{ \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{\Delta} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_k}{\Delta} \int_0^{b_k} \frac{\partial W^{(m)}(\xi, \Delta)}{\partial z} \operatorname{ch} \frac{k\pi(b_k-\xi)}{\Delta} d\xi - \right. \\ \left. - \int_0^y \frac{\partial W^{(m)}(\xi, \Delta)}{\partial z} \operatorname{sh} \frac{k\pi(y-\xi)}{\Delta} d\xi \right\} \quad (2.13)$$

В первом приближении, опираясь на (2.1), (2.2), получим из (2.10), (2.11) для $z \leq \Delta$

$$Z_0^{(1)}(z) = A^{(1)} - \frac{2}{b} \int_0^z \frac{b_c}{\Delta} (z - \xi) d\xi = A^{(1)} - \frac{b_c}{b\Delta} z^2 \quad (2.14)$$

$$Z_k^{(1)}(z) = \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2} \frac{bb_c}{\Delta} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{sh} \tau s}{\operatorname{sh} \tau h} \operatorname{ch} \tau z \right\} \quad \left(\tau = \frac{k\pi}{b} \right) \quad (2.15)$$

для $z \geq \Delta$ достаточно найти

$$Z_0^{(1)}(z) = A^{(1)} - 2 \frac{b_c}{b} \left(z - \frac{\Delta}{2} \right) \quad (2.16)$$

При этом производная

$$Z_0^{(1)'}(\Delta) = -2 \frac{b_c}{b} \quad (2.17)$$

Установим теперь рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов $Z_k^{(m)}(z)$ и $Y_k^{(m)}(y)$.

Из (2.10) и (2.11) при помощи (2.3) и (2.5) получаем для $z \leq \Delta$

$$Z_0^{(m)}(z) = A^{(m)} - \frac{2}{b} \int_0^z \frac{\partial W^{m-1}(b, \xi)}{\partial y} (z - \xi) d\xi = \\ = A^{(m)} - \frac{2}{b} \left\{ Y_0^{(m-1)'}(b) \frac{z^2}{4} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{i}{\sigma^2} Y_p^{(m-1)'}(b) (1 - \cos \sigma z) \right\} \quad (2.18)$$

$$Z_k^{(m)}(z) = \frac{2(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2} b \left\{ \frac{1}{2} Y_0^{(m-1)'}(b) \left[\frac{\text{sh } \tau z}{\text{sh } \tau h} \text{ch } \tau z - 1 \right] + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\tau^2}{\tau^2 + \sigma^2} Y_p^{(m-1)'}(b) \left[(-1)^p \frac{\text{sh } \tau z}{\text{sh } \tau h} \text{ch } \tau z - \cos \sigma z \right] \right\} \quad (2.19) \\ \left(\tau = \frac{k\pi}{b}, \sigma = \frac{p\pi}{\Delta} \right)$$

Для $z \geq \Delta$ достаточно найти (2.20)

$$Z_0^{(m)}(z) = A_0^{(m)} - \frac{2}{b} \left\{ \frac{1}{2} Y_0^{(m-1)'}(b) \Delta \left(z - \frac{\Delta}{2} \right) + 2 \sum_{p=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2} Y_p^{(m-1)'}(b) \right\}$$

Из (2.12), (2.13) при помощи (2.3) и (2.4) получаем для $y \leq b$

$$Y_0^{(m)}(y) = B^{(m)} - \frac{2}{\Delta} \left\{ Z_0^{(m)'}(\Delta) \frac{y^2}{4} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2} Z_p^{(m)'}(\Delta) (1 - \cos \sigma' y) \right\} \quad (2.21)$$

для $y \geq b$

$$Y_0^{(m)}(y) = B^{(m)} - \frac{2}{\Delta} \left\{ \frac{1}{2} Z_0^{(m)'}(\Delta) b \left(y - \frac{b}{2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{p=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2} Z_p^{(m)'}(\Delta) + \frac{(y-b)^2}{2} \right\} \quad (2.22)$$

$$Y_k^{(m)}(y) = \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2} \Delta \left\{ 1 - \left[\left(\frac{1}{2} Z_0^{(m)'}(\Delta) - 1 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \tau'^2}{\tau'^2 + \sigma'^2} Z_p^{(m)'}(\Delta) \right] \left[\frac{\text{sh } \tau' b_c}{\text{sh } \tau' b_k} \text{ch } \tau' y - \text{ch } \tau' (y - b) \right] \right\} \quad (2.23) \\ \left(\tau' = \frac{k\pi}{\Delta}, \sigma' = \frac{p\pi}{b} \right)$$

Продифференцировав выражения (2.20) и (2.22), получим

$$Z_0^{(m)'}(\Delta) = -\frac{\Delta^m}{b} Y_0^{(m-1)'}(b), \quad Y_0^{(m-1)'}(b) = -\frac{b}{\Delta} Z_0^{(m)'}(\Delta) \quad (2.24)$$

Начав с выражения (2.17) и последовательно применяя рекуррентные формулы (2.24), установим следующее:

$$Z_0^{(m)'}(\Delta) = Z_0^{(m-1)'}(\Delta) = Z_0'(\Delta) = -2 \frac{b_c}{b} \\ Y_0^{(m)'}(b) = Y_0^{(m-1)'}(b) = Y_0'(b) = 2 \frac{b_c}{\Delta} \quad (2.25)$$

Из сравнения выражений (2.14) — (2.16) с (2.18) — (2.20) можно заключить, что

$$Y_k^{(0)'}(b) = 0 \quad (k \neq 0) \quad (2.26)$$

Это обстоятельство следует учитывать, применяя рекуррентные формулы для $m = 1$.

Продифференцировав выражения (2.15), (2.19), (2.22) и учтя (2.25), получим для $k \neq 0$

$$Z_k^{(m)'}(\Delta) = \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} Q_k^{(m-1)} \omega_k, \quad Y_k^{(m)'}(b) = \frac{2(-1)^k}{k\pi} P_k^{(m)} \Psi_k \quad (2.27)$$

Здесь

$$P_k^{(m)} = \frac{b_k}{b} + P_{k1}^{(m)}, \quad Q_k^{(m)} = \frac{b_c}{\Delta} + Q_{k1}^{(m)} \quad (2.28)$$

$$P_{k1}^{(m)} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{1 + \left(\frac{\Delta}{b}\right)^2 \frac{p^2}{k^2}} Z_p^{(m)'}(\Delta), \quad Q_{k1}^{(m)} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{1 + \left(\frac{b}{\Delta}\right)^2 \frac{p^2}{k^2}} Y_p^{(m)'}(b) \quad (2.29)$$

$$\psi_k = \frac{\text{sh } \frac{k\pi b_c}{\Delta}}{\text{sh } \frac{k\pi b_k}{\Delta}} \text{sh } \frac{k\pi}{\Delta} b, \quad \omega_k = \frac{\text{sh } \frac{k\pi s}{b}}{\text{sh } \frac{k\pi h}{b}} \text{sh } \frac{k\pi}{b} \Delta$$

Отсюда при помощи (2.26) находим, что

$$P_k^{(0)} = 0, \quad Q_{k1}^{(0)} = 0, \quad Q_k^{(0)} = \frac{b_c}{\Delta} \quad (k \neq 0) \quad (2.30)$$

Найдем теперь постоянные интегрирования $A^{(m)}$ и $B^{(m)}$. Первые из них получим, опираясь на условие (1.14)

$$\int_0^b V(y, h) dy = 0 \quad (2.31)$$

Подставив сюда выражение (2.4) и выполнив интегрирование, найдем

$$Z_0^{(m)}(h) = 0 \quad (2.32)$$

Отсюда при помощи (2.16), (2.20) находим $A^{(1)}$ и $A^{(m)}$.

Постоянные $B^{(m)}$ найдем из условия

$$\int_0^b \int_0^{\Delta} W^{(m)}(y, z) dy dz = \int_0^b \int_0^{\Delta} V^{(m)}(y, z) dy dz \quad (2.33)$$

которое дает после подстановки в него выражений (2.4) и (2.5)

$$\Delta \int_0^b Y_0^{(m)}(y) dy = b \int_0^{\Delta} Z_0^{(m)}(z) dz \quad (2.34)$$

Опустив несложные, но довольно длинные выкладки, укажем здесь необходимые для дальнейшего результаты. При $y \geq b$

$$Y_0^{(m)}(y) = -\frac{(y-b)^2}{\Delta} + 2b_c \left[\frac{\Delta}{b} \left(\frac{h}{\Delta} - \frac{2}{3} \right) + \frac{b}{\Delta} \left(\frac{y}{b} - \frac{2}{3} \right) \right] + \\ + \frac{2}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^2} \left[\frac{b^2}{\Delta} Z_p^{(m-1)'}(\Delta) - \frac{\Delta^2}{b} Y_p^{(m-1)'}(b) \right] \quad (2.35)$$

$$Y_k^{(m)}(y) = \frac{2(-1)^k}{k^2 \pi^2} \Delta \left\{ 1 + P_k^{(m)} \left[\frac{\text{sh } \frac{k\pi}{\Delta} b_c}{\text{sh } \frac{k\pi}{\Delta} b_k} \text{ch } \frac{k\pi}{\Delta} y - \text{ch } \frac{k\pi}{\Delta} (y-b) \right] \right\} \quad (2.36)$$

Присоединенный объем w по (1.16) равен

$$w = \int_b^{b_k} W(y, \Delta) dy \quad (2.37)$$

Подставив сюда (2.5), после преобразований получим в соответствии с (1.17) коэффициент присоединенной массы в m -ом приближении

$$\kappa^{(m)} = \frac{w^{(m)}}{b_c s} - \frac{b_c}{b} + \frac{1}{3} \frac{b_k}{s} \left(\frac{b_c}{\Delta} + \frac{\Delta}{b} \right) - \\ - \frac{2}{\pi^3} \frac{\Delta^2}{b_c s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[\frac{b_c}{b} P_k^{(m-1)} + P_k^{(m)} \right] \psi_k - \frac{2}{s \Delta} \frac{b^2}{s \Delta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} Q_k^{(m-1)} \omega_k \quad (2.38)$$

При выводе этого выражения для суммирования одного из рядов использовано равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Из (2.38), а также (2.30) вытекает в первом приближении

$$\begin{aligned} \kappa^{(1)} = & \frac{b_c}{b} + \frac{1}{3} \frac{b_k}{s} \left(\frac{b_k}{\Delta} + \frac{\Delta}{b} \right) - \frac{2}{\pi^3} \frac{\Delta^2}{b_c s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} P_k^{(1)} \Psi_k - \\ & - \frac{2}{\pi^3} \frac{b_c}{s} \left(\frac{b}{\Delta} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \omega_k \end{aligned} \quad (2.39)$$

Величина ω_k с ростом k быстро стремится к $1/2$. Поэтому сходимость последнего ряда может быть усилена, если привести его к виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \omega_k = \frac{1}{2} \zeta(3) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(\frac{1}{2} - \omega_k \right), \quad \zeta(3) = 1.20206 \quad (2.40)$$

Здесь $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана ([9], стр. 24, 444).

Для упрощения вычислений целесообразно также улучшить сходимость весьма медленно сходящихся рядов, входящих в $P_k^{(1)}$. Это выражение можно представить в виде

$$P_k^{(1)} = \frac{b_k}{b} + \frac{1}{\pi} \frac{b_c}{\Delta} \left[\left(\frac{b}{\Delta} \right)^2 k^2 S_k - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left[1 + \left(\frac{\Delta}{b} \right)^2 \frac{p^2}{k^2} \right]^{-1} \left(\frac{1}{2} - \omega_p \right) \right] \quad (2.41)$$

Здесь

$$S_k = \frac{5}{12} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(p-1)!}{(p+3)!} \left\{ \left[1 - \frac{11}{k^2} \left(\frac{\Delta}{b} \right)^2 \right] p + 6 \left[1 - \frac{1}{k^2} \left(\frac{\Delta}{b} \right)^2 \right] \right\} \left[1 + \left(\frac{\Delta}{b} \right)^2 \frac{p^2}{k^2} \right]^{-1}$$

В данном случае учитывалось, что $\omega_p \rightarrow 1/2$ при $p \rightarrow \infty$, а кроме того, последовательно выделялись из ряда с членами

$$1 : p [(b/\Delta)^2 k^2 + p^2]$$

ряды с известными суммами ([6], стр. 92)

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{1}{4}, \quad 3 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{3}{18}$$

При вычислении коэффициента присоединенной массы по (2.38) во втором приближении ($m = 2$) следует иметь в виду, что при имеющих место в практике поперечных размерах камер судоводных сооружений и расчетных судов $Q_k^{(1)} \approx Q_k^{(0)} = b_c/\Delta$, а поэтому $P_k^{(2)} \approx P_k^{(1)}$ и в результате

$$\frac{b_c}{b} P_k^{(1)} + P_k^{(2)} \approx \frac{b_k}{b} P_k^{(1)}$$

т. е. вычисление первого ряда в (2.38) сводится просто к умножению на b_k/b соответствующего ряда в (2.39). Заметим попутно, что из-за малости отношения $\Delta^2/b_c s$ роль слагаемого с этим множителем в формулах (2.38), (2.39) практически незначительна.

Более существенную роль играют последние слагаемые в рассматриваемых формулах. При вычислении такого слагаемого в формуле (2.38) при $m = 2$ подстановкой (2.28)

$$Q_k^{(1)} = \frac{b_c}{\Delta} + Q_{k1}^{(1)}$$

входящий сюда ряд разделим на два, первый из которых (наиболее существенный) уже сосчитан в формуле (2.39) при помощи (2.40).

Надо сказать, что главную роль в формулах (2.38), (2.39) играют первые два члена, что существенно облегчает расчет. При применении метода Шварца к рассматриваемой задаче обычно уже второе приближение мало отличается от первого.

Если судно расположено посередине камеры (фиг. 2, б), то во всех предыдущих выражениях надо заменить b_k , b_c и b соответственно на $1/2 b_k$, $1/2 b_c$ и $1/2 b$.

3. Применение метода сеток. При расчете случаев, когда $b_2 \neq 0$ и $b_1 \neq b_2$ (фиг. 1), а также более общих случаев, когда поперечное сечение судна или камеры не является прямоугольным, можно обратиться к методу сеток.

В качестве начальной системы для метода итераций целесообразно брать значения функции потенциала скорости, найденные приближенно при помощи графического метода или, лучше, метода электроанalogии. Практически наиболее существенное значение имеет такое определение потенциала скорости около угловых точек сечения судна. Поэтому применение метода электроанalogий можно производить по отдельности к левой и правой частям области, подлежащей расчету (исключая почти полностью зону под днищем судна). Условия (1.13) при этом можно в первом приближении заменить более простыми, сведя задачу к задаче Дирихле.

Так как обычно отношение Δ / b_c мало, движение жидкости под днищем судна в первом приближении можно считать одномерным. Тогда для левой части этой зоны потенциал можно определять из условия

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=h} \frac{b_1}{\Delta} \left(1 - \frac{y-b_1}{b_1'} \right), \quad b_1' = b_c \frac{b_1}{b}$$

Здесь $\partial \Phi / \partial z$ при $z = h$ берется по (1.13), b_1' — расстояние под днищем судна от левого угла до точки нулевой скорости. Такое же условие можно написать для правой части подднищевой зоны.

Затем методом итерации производится уточнение потенциала с учетом истинных граничных условий (1.13). Определение постоянной интегрирования выполняется после завершения итераций из условия (1.14).

В заключение отметим, что если значения потенциала скорости сразу будут найдены методом электроанalogий достаточно точно, с соблюдением всех граничных условий, то для практических целей вполне можно пользоваться этими данными для отыскания присоединенной массы (без уточнения методом сеток). Заметим также, что применение метода сеток дает возможность выполнять решение задачи с соблюдением точного условия на свободной поверхности (1.8).

4. Результаты численных расчетов. При помощи рассмотренных методов были произведены вычисления, характеризующие величину присоединенной массы жидкости для баржи, занимающей различные положения в камере прямоугольного сечения с $b_k^1 = 18$ м, $h = 3,65$ м. Баржа шириной $b_c = 14$ м имеет почти прямоугольное поперечное сечение (радиус закругления скулы 0,3 м) и осадку с грузом $s = 3,2$ м, а в порожнем состоянии примерно $s = 0,4$ м¹.

Основные результаты расчетов по методу Шварца приведены в таблице (где δ — относительное отличие $\kappa^{(2)}$ от $\kappa^{(1)}$).

Таблица

s, м	Δ , м	b_1 , м	b_2 , м	$\kappa^{(1)}$	κ^2	$w^{(2)}$, м ²	δ , %
3,2	0,45	4,0	0	54,79	54,69	2 450	0,16
3,2	0,45	2,0	2,0	16,96	16,90	757	0,35
0,4	3,25	4,0	0	78,85	77,22	432	2,10

¹ Размеры реальные; взяты для сухогрузной металлической баржи водоизмещением 3 330 т.

Из таблицы видно, что второе приближение практически совпадает с первым. Уже первое приближение дает достаточно точный результат.

При $s = 3.2$ м для двух промежуточных по ширине положений судна В. М. Лаврентьевой был произведен расчет по методу сеток. Результаты его таковы: при $b_1 = 3.775$ м, $b_2 = 0.225$ м имеем $w = 2\,153$ м², $\kappa = 48.07$; при $b_1 = 3.2$ м, $b_2 = 0.8$ м имеем $w = 1\,233$ м², $\kappa = 27.51$.

В первом из этих случаев предварительно производилось электро моделирование левого и правого фрагментов всей области. Шаг сетки был выбран различный для разных частей области. В верхней части левого прямоугольника (фиг. 1) принят шаг, равный 0.225 м. В нижней его части, под днищем судна и в правом прямоугольнике, шаг сетки равен 0.1125 м.

Во втором случае шаг сетки также принимался переменным — сначала равным 0.225 м, а затем около углов судна сетка измельчалась до 0.05625 м.

Обращает на себя внимание весьма большая величина коэффициента присоединенной массы во всех приведенных случаях. Значение инерции самого судна оказывается незначительным в сравнении с инерцией жидкости, вовлекаемой в колебания. Объясняется это тем, что колебания судна происходят в ограниченном объеме жидкости вблизи стенок — горизонтальной и вертикальных. Ускорения, сообщаемые частицам воды, особенно в узком пространстве под днищем, значительно превосходят ускорения самого судна. Отсюда и парадоксальные значения присоединенного объема w , превосходящего во много раз истинный объем жидкости в камере. Эту величину правильнее называть в данном случае фиктивным присоединенным объемом.

По результатам проведенных расчетов построен график (фиг. 3), характеризующий изменение присоединенной массы в зависимости от положения судна с грузом по ширине камеры. Выполненные расчеты показывают, что присоединенная масса меняется при этом более, чем в три раза. Однако, как выяснилось при расчетах связанных колебаний воды и судна на основе уравнений, полученных в работе [1], большого влияния на главные колебания судна и воды в камере это обстоятельство не имеет.

Практически судно в камере судоподъемника или шлюза в процессе перевозки или заполнения (опорожнения) камеры находится вблизи одной из стенок, будучи зачлененным к этой стенке тросами. Между корпусом судна и стенкой камеры остается при этом небольшое расстояние порядка 0.2 м. Присоединенная масса при таком положении судна немного меньше, чем в случае $b_2 = 0$, но для практических расчетов колебаний в камерах судоводных сооружений этой разницей можно пренебрегать и применять для расчета метод Шварца, полагая $b_2 = 0$.

В заключение выражаю признательность В. М. Лаврентьевой и Е. М. Романову, выполнившим численные расчеты, содержащиеся в статье.

Институт гидродинамики Сибирского
отделения АН СССР

Поступила 13 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев О. Ф. Приближенные уравнения связанных колебаний воды и судна в камере транспортного судоподъемника. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I, Гостехиздат, 1955.
3. Хаскинд М. Д. Приближенные методы определения гидродинамических характеристик качки. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 11.
4. Шебалов А. Н. К вопросу об определении коэффициентов присоединенных масс. Тр. Ленингр. кораблестроительного ин-та, 1954, вып. XII.
5. Васильев О. Ф. Задачи гидродинамического расчета наклонных судоподъемников. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1959, № 2.
6. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1952.
7. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ, 1949, т. XIII, вып. 1.
8. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, 1948.
9. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1951.