

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ПУАССОНА В СЖИМАЕМЫХ ВЯЗКО-УПРУГИХ СРЕДАХ

В. А. Жалнин (Воронеж)

Поведение коэффициента Пуассона в вязко-упругой упруго-сжимаемой среде рассматривалось в работах [1,2]. Ниже исследуется поведение коэффициента Пуассона в телах с вязко-упругой сжимаемостью.

Рассмотрим сплошную, обладающую свойствами линейной вязко-упругости среду, для которой процессы сдвигового и объемного деформирования описываются различными моделями. В качестве таких моделей возьмем тело Кельвина, тело Максвелла и некоторые комбинации этих двух элементов. В подобном случае поведение среды описывается линейными операторными уравнениями:

для компонент сдвигового напряженного состояния

$$P_1 s_{ij} = 2G P_2 e_{ij} \quad (1)$$

для компонент объемного деформированного состояния

$$P_1' \sigma = 3K P_2' \epsilon \quad (2)$$

Здесь P_i — линейные дифференциальные операторы вида

$$P_i = a_{0i} + \alpha_{1i} \frac{d}{dt} + \dots + a_{ni} \frac{d^n}{dt^n}$$

Через σ_{ij} и ϵ_{ij} обозначены компоненты тензора напряжений и деформаций, соответственно, а через s_{ij} и e_{ij} — их девиаторные части, определяемые выражениями

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma, \quad e_{ij} = \epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon \quad (3)$$

где σ — среднее напряжение, ϵ — среднее относительное удлинение, δ_{ij} — символ Кронекера. Из соотношений (1) — (3), преобразованных по Лапласу, получим

$$\epsilon_{ij}^* = \frac{P_{12}^*}{2G} s_{ij} + \left(\frac{P_{12}^*}{3K} - \frac{P_{12}^*}{2G} \right) \delta_{ij} \sigma^*, \quad P_{12} = \frac{P_1}{P_2}, \quad P_{12}' = \frac{P_1'}{P_2'} \quad (4)$$

В случае одноосного растяжения

$$\sigma_{11} \neq 0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \quad (5)$$

и коэффициент Пуассона определяется как отношение

$$\nu(t) = -\epsilon_{22}/\epsilon_{11}$$

Учитывая (5), из соотношения (4) можно получить для коэффициента Пуассона

$$\nu(t) = \frac{3L^{-1}(P_{12}^* \sigma_{11}^*) - 2L^{-1}(P_{12}'^* \sigma_{11}^*) G/K}{6L^{-1}(P_{12}^* \sigma_{11}^*) + 2L^{-1}(P_{12}'^* \sigma_{11}^*) G/K} \quad (6)$$

Здесь L^{-1} — символ обратного преобразования Лапласа.

Напряжение σ_{11} , входящее в это соотношение, характеризует эксперимент на одноосное растяжение и задается обычно двумя способами: либо нагрузка прикладывается к стержню мгновенно, оставаясь в дальнейшем постоянной, т. е. начиная с момента времени $t = 0$, напряжение $\sigma_{11} = c$; либо нагрузка растет во времени линейно, т. е. начиная с момента $t = 0$, напряжение в образце изменяется по линейному закону $\sigma_{11} = ct$.

В первом случае следует считать, что $\sigma_{11} = cH(t)$, где $H(t)$ — единичная функция Хэвисайда [3], и тогда после выполнения преобразования Лапласа будем иметь $\sigma_{11}^* = c/p$; во втором случае $\sigma_{11} = ctH(t)$ и $\sigma_{11}^* = c/p^2$.

Для любой модели линейной вязко-упругой среды можно заранее выполнить обратное преобразование Лапласа от выражения $L^{-1}(P_{12}^* \sigma_{11}^*)$, входящего в соотношение (6). Если модель для сдвиговых компонент и модель для компонент объемной деформации выбраны, то тогда соответствующие выражения $L^{-1}(P_{12}^* \sigma_{11}^*)$ для этих моделей следует подставить в соотношение (6), получив таким путем искомую зависимость коэффициента Пуассона от времени.

Подчеркнем, что характерной особенностью этой зависимости является ее величина при $t = 0$ и $t \rightarrow \infty$. Поэтому целесообразно вычислить заранее значение $L^{-1}(P_{12}^* \sigma_{11}^*)$ при $t = 0$ и $t \rightarrow \infty$ для рассматриваемого класса моделей. При этом выражения $L^{-1}(P_{12}'^* \sigma_{11}^*)$ и $L^{-1}(P_{12}^* \sigma_{11}^*)$ часто оказываются равными нулю или одно из них стремится к бесконечности, когда $t = 0$ или $t \rightarrow \infty$, и зависимость (6) становится неопределенностью. Тогда следует для удобства дальнейших вычислений определить значения этих выражений после раскрытия неопределенности.

Приводим результаты рассмотрений для пяти моделей.

1. Тело Кельвина (фиг. 1а) подчиняется операторному уравнению

$$s_{ij} = 2G \left(e_{ij} + \tau_k \frac{de_{ij}}{dt} \right), \quad \tau_k = \frac{\eta_k}{G}$$

Преобразованные по Лапласу операторы P_1 и P_2 имеют для тела Кельвина вид

$$P_1^* = 1, \quad P_2^* = 1 + \tau_k p$$

Вводя обозначения

$$L^{-1}(P_{12}^* \sigma_{11}^*) = L_1 \quad \text{при } \sigma_{11} = cH(t), \quad L^{-1}(P_{12}^* \sigma_{11}^*) = L_2 \quad \text{при } \sigma_{11} = ctH(t)$$

определим, что для этой модели

$$L_1 = 1 - \exp(-t/\tau_k), \quad L_2 = t - \tau_k + \tau_k \exp(-t/\tau_k)$$

Заметим, что значения L_1 и L_2 при $t = 0$ или $t \rightarrow \infty$ для вязко-упругих моделей рассматриваемых здесь, совпадают. Обозначая далее значения L_1 и L_2 при $t = 0$ через $L(0)$, а при $t \rightarrow \infty$ через $L(\infty)$, получим

$$L(0) = 0, \quad L(\infty) = 1 \quad (L(\infty) = 0)$$

2. Тело Максвелла (фиг. 1б), как известно, описывается следующим уравнением

$$\frac{s_{ij}}{\tau_m} + \frac{ds_{ij}}{dt} = 2G \frac{de_{ij}}{dt}, \quad \tau_m = \frac{\eta_m}{G}$$

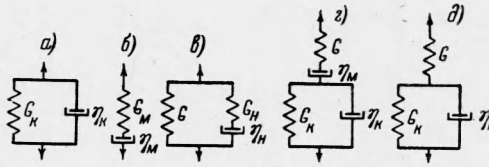
Для тела Максвелла

$$P_1^* = \frac{1}{\tau_m} + p, \quad P_2^* = p$$

$$L_1 = 1 + \frac{t}{\tau_m}, \quad L_2 = \frac{t^2}{2\tau_m} + t$$

$$L(0) = 1, \quad L(\infty) \rightarrow \infty$$

$$\left(L(\infty) = \frac{1}{\tau_m} \right)$$



Фиг. 1

3. Тело Пойнтинга — Томсона, или нормальное твердое тело (фиг. 1в), подчиняется соотношению

$$s_{ij} + \tau_n \frac{ds_{ij}}{dt} = 2G \left(e_{ij} + \tau_n (1 + k) \frac{de_{ij}}{dt} \right), \quad \tau_n = \frac{\eta_n}{G}, \quad k = \frac{G_n}{G}$$

Для этого тела

$$P_1^* = 1 + \tau_n p, \quad P_2^* = 1 + \tau_n (1 + k) p$$

$$L_1 = 1 - \frac{k}{1+k} \exp \frac{-t}{\tau_n (1+k)}, \quad L_2 = t - \tau_n k + \tau_n k \exp \frac{-t}{\tau_n (1+k)}$$

$$L(0) = \frac{1}{1+k}, \quad L(\infty) = 1 \quad (L(\infty) = 0)$$

4. Тело Бюргерса (фиг. 1з) удовлетворяет зависимости

$$a_0 + a_1 \frac{ds_{ij}}{dt} + a_2 \frac{d^2 s_{ij}}{dt^2} = 2G \left(b_1 \frac{de_{ij}}{dt} + b_2 \frac{d^2 e_{ij}}{dt^2} \right)$$

Здесь

$$a_0 = \frac{G}{\eta_m} = \frac{1}{\tau_m}, \quad a_1 = 1 + \frac{G}{G_k} + \frac{G\eta_k}{G_k\eta_m} = 1 + m + \frac{\tau_k}{\tau_m}, \quad a_2 = b_2 = \tau_k, \quad b_1 = 1$$

Для тела Бюргерса операторы P_1^* и P_2^* имеют вид

$$P_1^* = a_0 + a_1 p + a_2 p^2, \quad P_2^* = b_1 p + b_2 p^2$$

Значения L_1 и L_2 таковы

$$L_1 = 1 + m + \frac{t}{\tau_m} - m \exp \frac{-t}{\tau_k}, \quad L_2 = \frac{t^2}{2\tau_m} + (1 + m) t - \tau_k m + \tau_k m \exp \frac{-t}{\tau_k}$$

Определяя $L(0)$ и $L(\infty)$, получим

$$L(0) = 1, \quad L(\infty) \rightarrow \infty \quad \left(L(\infty) = \frac{1}{\tau_m} \right)$$

5. Модель упруго-вязкого тела (фиг. 1б), для которой примем символическое обозначение EVe в соответствии с работой [4]. Тело EVe представляет собой частный случай ($\eta_m \rightarrow \infty$) модели Бюргерса.

Операторная зависимость для этого тела такова

$$(1 + z) s_{ij} + \tau_k \frac{ds_{ij}}{dt} = 2G \left(e_{ij} + \tau_k \frac{de_{ij}}{dt} \right), \quad z = \frac{G}{G_k}, \quad \tau_k = \frac{\eta_k}{G_k}$$

В этом случае имеем

$$P_1^* = 1 + z + \tau_k p, \quad P_2^* = 1 + \tau_k p$$

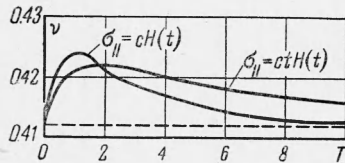
$$L_1 = 1 + z - z \exp \frac{-t}{\tau_k}, \quad L_2 = (1 + z) t - z \tau_k + z \tau_k \exp \frac{-t}{\tau_k}$$

$$L(0) = 1, \quad L(\infty) = 1 + z \quad (L(\infty) = 0)$$

Поясним, что значениями $L(\infty)$, стоящими в скобках, следует пользоваться в том случае, когда в выбранную комбинацию моделей входит тело Максвелла, либо тело Бюргерса.

Построение зависимости коэффициента Пуассона от времени продемонстрируем на конкретном примере.

В качестве модели, описывающей сдвиг, возьмем тело EVe , а моделью для объемных процессов пусть служит тело Пойнтинга — Томсона. Предположим, что $z = k = 1$, $G/K = 3/8$ и $\tau_n = \tau_k = \tau$. Считая далее, что $\sigma_{11} = cH(t)$, и подставляя соответствующие значения L_1 в формулу (6), получим



Фиг. 2

$$\nu(t) = \frac{4(2 - e^{-T}) - (1 - 1/2 e^{-1/2 T})}{8(2 - e^{-T}) + (1 - 1/2 e^{-1/2 T})} \quad \left(T = \frac{t}{\tau} \right)$$

При $\sigma_{11} = ctH(t)$ зависимость $\nu(t)$ такова

$$\nu(t) = \frac{7T - 4(1 - e^{-T}) + (1 - e^{-1/2 T})}{17T - 8(1 - e^{-T}) - (1 - e^{-1/2 T})}$$

Соответствующие кривые изображены на фиг. 2.

При расчетах конструкций, выполненных из сжимаемых вязко-упругих материалов, нередко возникают две проблемы.

1. Из некоторых соображений выбраны модели, описывающие сдвиговые и объемные свойства тела. Требуется определить зависимость коэффициента Пуассона от времени и уточнить параметры взятых моделей таким образом, чтобы полученная зависимость по возможности ближе подходила к экспериментальному поведению коэффициента Пуассона.

2. Исходя из экспериментальной зависимости $\nu(t)$ выбрать модель сжимаемого вязко-упругого тела, коэффициент Пуассона которой изменялся бы во времени аналогичным образом.

Решение первой задачи при использовании описанного выше метода осуществляется без труда.

Начинать решение второй задачи следует с рассмотрения поведения тела при $t = 0$ и $t \rightarrow \infty$.

Удовлетворить опытному значению ν при $t = 0$ можно хотя бы путем выбора отношения G/K , характеризующего упругие свойства взятых моделей для сдвигового и объемного процессов. Выбирая соответствующую величину другого параметра, можно удовлетворить поведению экспериментальной кривой при $t \rightarrow \infty$. Наконец, варьирование оставшихся параметров позволит приблизить теоретическую зависимость $\nu(t)$ к экспериментальной при $0 < t < \infty$.

Из предыдущего рассмотрения ясно, что, исходя из одного опыта, выясняющего поведение коэффициента Пуассона во времени, не всегда можно выбрать единственным образом две модели, описывающие сдвиговой процесс и объемную сжимаемость среды. Следует провести еще, по крайней мере, один эксперимент, например на определение зависимости модуля Юнга от времени, после чего можно уточнить комбинацию выбранных моделей и их параметры.

Можно исходить из эксперимента, определяющего модуль Юнга.

При этом модель также не определяется единственным образом, и выбор ее следует уточнить на основании результатов другого эксперимента.

Проиллюстрируем неединственность выбора модели.

Пусть в несжимаемом теле зависимость между напряжением σ_{11} и деформацией ϵ_{11} задана в случае одноосного напряженного состояния моделью, представленной на фиг. 3а. Для такой модели трансформированный по Лапласу модуль Юнга имеет вид

$$E^*(t) = \frac{\sigma_{11}^*}{\epsilon_{11}^*} = \frac{\tau_1 \tau_2 (E_1 + E_2 + E_3) p^2 + [\tau_1 (E_1 + E_3) + \tau_2 (E_2 + E_3)] p + E_3}{\tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2) p + 1} \quad (7)$$

Здесь

$$\tau_1 = \frac{\eta_1}{E_1}, \quad \tau_2 = \frac{\eta_2}{E_2}$$

Определяя модуль E^* для тела, представленного на фиг. 3б, получим

$$E^*(t) = E' \frac{\tau_k \tau_m n p^2 + (\tau_k + n \tau_m) p + 1}{\tau_k \tau_m p^2 + (\tau_k + \tau_m + mn \tau_m) p + m + 1}$$

Здесь

$$n = 1 + E_m/E', \quad m = E_k/E', \quad \tau_k = \eta_k/E_k, \quad \tau_m = \eta_m/E_m$$

Сравнивая оба выражения, замечаем, что можно подобрать такие E' , m , n , τ_k и τ_m , чтобы модули E^* для обеих сред вели себя аналогичным образом с течением времени.

Если связь сдвиговых компонент в теле подчиняется модели Максвелла (фиг. 1б), то имеет место зависимость

$$\frac{s_{ij}}{\eta_m} + \frac{1}{G_m} \frac{ds_{ij}}{dt} = 2 \frac{de_{ij}}{dt} \quad \text{или} \quad P s_{ij} = 2 Q e_{ij}$$

Отсюда

$$P^* = \frac{1}{\eta_m} + \frac{p}{G_m}, \quad Q^* = p$$

Фиг. 3

Считая, что связь первых инвариантов σ и ϵ тензора напряжений и деформаций, соответственно, задана моделью Кельвина (фиг. 1а), будем иметь

$$\sigma = 3 \left(G_k \epsilon + \eta_k \frac{d\epsilon}{dt} \right) \quad \text{или} \quad P' \sigma = 3 Q' \epsilon$$

В данном случае $P'^* = 1$, $Q'^* = G_k + \eta_k p$, поэтому, согласно [5], для выбранных моделей получим отсюда

$$E^*(t) = \frac{9 Q^* Q'^*}{3 Q'^* P'^* + Q^* P'^*} = \frac{3 G_m \tau_m (\tau_k p^2 + p)}{\tau_k \tau_m p^2 + [\tau_k + \tau_m + \eta_m / (3 G_k)] p + 1} \quad (8)$$

Если в модели, представленной на фиг. 3а, считать упругий элемент $E_3 = 0$, то модули Юнга в обоих случаях ведут себя одинаково при соответствующем выборе значений η_m , G_m , η_k и G_k , что следует из соотношений (7) и (8).

Поступила 8 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Freudenthal A. M., Henry L. A. On «Poisson's ratio» in linear visco-elastic propellants. Progr. Astr. and Rocketry, New-York — London, Acad. Press, 1960, vol. 1, pp. 33—66.
2. Bieniek M. P., Henry L. A., Freudenthal A. M. One-dimensional Responce of linear visco-elastic media. Int. J. Mech. Sci., Pergamon Press Ltd 1962, vol. 4, pp. 211—231.
3. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Физматгиз, 1960.
4. И в л е в Д. Д. К теории сложных сред. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 1.
5. Реология (Теория и Приложения). Сб. пер., ИЛ 1962.