ПМТФ, № 1, 1962

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНОК В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Л. М. Куршин

(*Новосибирск*)

Постановка задач устойчивости при ползучести, предложенная в статье [1] для стержней, распространяется и на пластинки. Дано решение некоторых задач устойчивости.

§ 1. Пусть уравнение состояния при ползучести имеет вид

$$\dot{p}_i = g(p_i, \sigma_i)\,\sigma_i \tag{1.1}$$

и пусть между составляющими тензора скоростей деформаций ползучести $\dot{p}_{ij}$ и составляющими девиатора напряжений σ_{ij}^* имеют место соотношения теории течения типа Прандтля — Рейса

$$\dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} g(p_i, \sigma_i)\,\sigma_{ij}^*, \qquad p_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2G}\sigma_{ij}^* \tag{1.2}$$

Для интенсивностей напряжений и скоростей деформации ползучести имеем

$$\sigma_i^2 = \frac{3}{2}\sigma_{ij}^*\sigma_{ij}^*, \qquad \dot{p}_i^2 = \frac{2}{3}\dot{p}_{ij}\dot{p}_{ij}, \qquad p_i = \int_0^t \dot{p}_i\,dt \tag{1.3}$$

Полагая, что при малых прогибах напряжения и деформации мало меняются по высоте пластинки, линеаризуем уравнения (1.1) и (1.2)

$$\delta\dot{p}_i = a\delta p_i + g(b+1)\,\delta\sigma_i$$

$$\delta\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{2G}\delta\dot{\sigma}_{ij}^* = \frac{3}{2}g\delta\sigma_{ij}^* + \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ij}^*}{\sigma_i}(a\delta p_i + gb\delta\sigma_i) \tag{1.4}$$

$$a = a(\sigma_i, p_i) = \sigma_i\frac{\partial g}{\partial p_i}, \qquad b = b(\sigma_i, p_i) = \frac{\sigma_i}{g}\frac{\partial g}{\partial \sigma_i}$$

В уравнениях в вариациях (1.4) величины p_i, σ_i относятся к срединной поверхности пластинки, а δp_i, $\delta\sigma_i$ означают малые приращения соответствующих величин по толщине пластинки.

Рассмотрим пластинку, нагруженную равномерно распределенными по ее толщине напряжениями, не меняющимися во времени. Для решения вопроса об устойчивости пластинки в условиях ползучести будем исследовать возмущенные движения, которые будут иметь место при воздействии на пластинку в разные моменты времени возмущений в виде начального прогиба. Пусть возмущение w° подействовало на пластинку в момент времени t^*, при котором $p_i = p_i^*$. Переходя с помощью соотношения (1.1) от переменной t к переменной p_i и интегрируя уравнения (1.4) при начальном условии

$$\delta p_{ij} = \delta\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2G}\delta\sigma_{ij}^* = 0 \qquad \text{при } p_i = p_i^*$$

найдем

$$\delta p = \frac{g}{\sigma_i} \int\limits_{p^*}^{p} \frac{1+b}{g} \delta\sigma_i dp$$

$$\delta\sigma_{ij}{}^* = \frac{2}{3} E e^{\xi^*-\xi} \delta\varepsilon_{ij}{}^* + \frac{2}{3} E e^{-\xi} \int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial p} dp - \tag{1.5}$$

$$- \alpha_{ij}{}^* E e^{-\xi} \int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi} \left[\frac{a}{\sigma_i} \int\limits_{p^*}^{p} \frac{1+b}{g} \delta\sigma_i dp + b\delta\sigma_i \right] \frac{dp}{\sigma_i}$$

$$\xi = \frac{E p_i}{\sigma_i}, \quad \xi^* = \frac{E p_i{}^*}{\sigma_i}, \quad \alpha_{ij}{}^* = \frac{\sigma_{ij}{}^*}{\sigma_i}, \quad \alpha_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i}, \quad p = p_i, \; p^* = p_i{}^*;$$

$$\delta\varepsilon_{ij}{}^* = \delta\varepsilon_{ij} \text{ при } p_i = p_i{}^*, \qquad w^* = w \text{ при } p_i = p_i{}^*$$

Выражения для деформаций с учетом начального прогиба w° имеют вид

$$\delta\varepsilon_{11} = -z\,(w_{xx} - w_{xx}{}^\circ), \quad \delta\varepsilon_{22} = \ldots, \quad \varepsilon\delta_{12} = \ldots \tag{1.6}$$

Вводя в выражения для моментов

$$G_1 = \int\limits_{-h}^{h} (2\delta\sigma_{11}{}^* + \delta\sigma_{22}{}^*)\, z dz, \qquad G_2 = \ldots, \qquad H = \ldots$$

напряжения (1.5) и деформации (1.6), найдем

$$G_1 = -\frac{1}{2} D e^{\xi^*-\xi} [2\,(w_{xx}{}^* - w_{xx}{}^\circ) + (w_{yy}{}^* - w_{yy}{}^\circ)] -$$

$$- e^{-\xi} \int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi} \left[\frac{1}{2} D \frac{\partial}{\partial p} (2w_{xx} + w_{yy}) + \alpha_{11} E R\,(M_i) \right] dp \qquad \left(D = \frac{8}{9} E h^3\right) \tag{1.7}$$

Здесь

$$R\,(M_i) = \frac{a}{\sigma_i{}^2} \int\limits_{p^*}^{p} \frac{1+b}{g} M_i dp + \frac{b}{\sigma_i} M_i \tag{1.8}$$

$$M_i = \int\limits_{-h}^{h} \delta\sigma_i z dz = \left(\alpha_{11} - \frac{1}{2}\alpha_{22}\right) G_1 + \left(\alpha_{22} - \frac{1}{2}\alpha_{11}\right) G_1 + 3\alpha_{12} H. \tag{1.9}$$

Введем операторы

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \Lambda = \alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} + \alpha_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Уравнение движения пластинки без учета инерционных членов имеет вид

$$G_{1xx} + G_{2yy} + 2H_{xy} + 2h\sigma_i \Lambda w = 0 \tag{1.10}$$

Вводя в (1.10) выражения моментов (1.7), получим

$$- D e^{\xi^*-\xi} \triangle\triangle\,(w^* - w^\circ) + 2h\sigma_i \Lambda w - e^{-\xi} \int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi} \left[D \triangle\triangle \frac{\partial w}{\partial p} + E R\,(\Lambda M_i) \right] dp = 0 \tag{1.11}$$

Уравнение (1.11) содержит функции w и M_i. Для вывода второго уравнения умножим G_1, G_2 и H (1.7) соответственно на $\alpha_{11} - \alpha^{22}/2$, $\alpha_{22} - \alpha_{11}/2$, $3\alpha_{12}$ и сложим. С учетом (1.9) получим

$$M_i + \frac{3}{4} D e^{\xi^*-\xi} \Lambda\,(w^* - w^\circ) + e^{-\xi} \int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi} \left[\frac{3}{4} D \Lambda \frac{\partial w}{\partial p} + E R\,(M_i) \right] dp = 0 \tag{1.12}$$

Применяя к уравнению (1.12) оператор Λ и складывая с (1.11), найдем

$$\Lambda M_i = De^{\xi^*-\xi}\left(\triangle\triangle - \frac{3}{4}\Lambda\Lambda\right)(w^* - w^\circ) -$$

$$- 2h\sigma_i \Lambda w + e^{-\xi}\int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi} D\left(\triangle\triangle - \frac{3}{4}\Lambda\Lambda\right)\frac{\partial w}{\partial p}\,dp \qquad (1.13)$$

Исключая из уравнения (1.11) при помощи (1.13) функцию M_i, получим

$$- e^{\xi^*-\xi}\triangle\triangle(w^* - w^\circ) + \frac{2h\sigma_i}{D}\Lambda w -$$

$$- e^{-\xi}\int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi}\left[\triangle\triangle\frac{\partial w}{\partial p} + \frac{bE}{\sigma_i}T + \frac{Ea}{\sigma_i^2}\int\limits_{p^*}^{p}\frac{1+b}{g}T\,dp\right]dp = 0 \qquad (1.14)$$

Здесь

$$T = T(p) = e^{\xi^*-\xi}\left(\triangle\triangle - \frac{3}{4}\Lambda\Lambda\right)(w^* - w^\circ) -$$

$$- \frac{2h\sigma_i}{D}\Lambda w + e^{-\xi}\int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi}\left[\triangle\triangle - \frac{3}{4}\Lambda\Lambda\right]\frac{\partial w}{\partial p}\,dp$$

При воздействии на невозмущенную пластинку в момент времени, соответствующий $p = p^*$, некоторого возмущения в виде малого начального прогиба w° прогиб w возмущенного движения будет удовлетворять уравнению (1.14).

В уравнении возмущенных движений (1.14) путем повышения порядка можно освободиться от интегралов. В итоге получим однородное уравнение третьего порядка относительно производных по времени

$$\left(g + \frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\psi}{a}\right) - \frac{\psi}{c} + \frac{gb}{ac}E(\psi - \varphi)\right] + \psi - \varphi = 0 \qquad (1.15)$$

$$\psi = \triangle\triangle\dot{w} - \frac{2h\sigma_i}{D}\left(Eg + \frac{\partial}{\partial t}\right)\Lambda w, \qquad \varphi = \frac{3}{4}\Lambda\Lambda\dot{w}, \qquad c = g + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{gb}{a}\right) - \frac{Eg^2b}{a}$$

Уравнение (1.15), не содержащее возмущений, можно получить, следуя методике использовавшейся в работе [2] при получении уравнения пластинки по теории течения, если при выводе учитывать переменность p.

Исследование устойчивости тривиального решения $w = 0$ на основе уравнения (1.15), рассматриваемого как уравнение возмущенного движения с постоянными коэффициентами, не является правомерным, поскольку изменение деформации ползучести δp по сечению, происходящее во времени и связанное с прогибами, имеет тот же порядок, что и изменение деформации ползучести в срединной поверхности p за то же время.

Если рассматривать уравнение (1.15) как уравнение с переменными коэффициентами, то очевидно, что решение уравнения (1.14) оно содержит. Для выделения этих решений к уравнению следует присоединить начальные условия, которые получаются из (1.14) и его производных по времени при $p = p^*$. Поскольку разыскание интегралов уравнения (1.15) представляет значительные трудности, а для исследования устойчивости в постановке, предложенной в [1], достаточно исследовать возмущенные движения в начальный момент времени, то при решении задач целесообразно исходить из уравнения в интегральной форме (1.14).

§ 2. Для исследования устойчивости пластинки рассмотрим возмущенные движения, удовлетворяющие уравнению (1.14), имеющие место при воздействии на пластинку при $p = p^*$ возмущений в виде начального прогиба w°. Предположим, что в уравнении (1.14) переменные разделяются, т. е. вынужденные движения имеют вид

$$w(p, x, y) = \tau(p)\,w(x, y) \qquad (2.1)$$

Будем считать невозмущенное состояние при $p = p^*$ устойчивым, если скорость возмущенного движения, начинающегося при $p = p^*$, в начальный момент убывает, т. е.

$$\ddot{\tau} / \dot{\tau} < 0 \qquad \text{при } p = p^*$$

и неустойчивым, если скорость возрастает.

Граница устойчивости определится из условия

$$\ddot{\tau} = 0 \qquad \text{при } p = p^* \tag{2.2}$$

Для иллюстрации метода определения границы устойчивости рассмотрим частный вид уравнения состояния

$$\dot{p}_i = A\sigma_i^n p_i^{-\alpha}, \qquad g = A\sigma_i^{n-1} p_i^{-\alpha}$$

Переходя в (1.14) к переменной

$$\xi = Ep_i / \sigma_i = Ep / \sigma_i \tag{2.3}$$

и полагая $\xi^* = Ep^* / \sigma_i$, запишем уравнение (1.14) в виде

$$-e^{\xi^*-\xi} \triangle \triangle (w^* - w^\circ) + \frac{2h\sigma_i}{D} \Lambda w +$$

$$+ e^{-\xi} \int_{\xi^*}^{\xi} e^{\xi} \left[- \triangle \triangle \frac{\partial w}{\partial \xi} + \alpha n \xi^{-\alpha-1} \int_{\xi^*}^{\xi} \xi^{\alpha} T \, d\xi - (n-1) T \right] d\xi = 0 \tag{2.4}$$

Здесь

$$T = e^{\xi^*-\xi} \left(\triangle \triangle - \frac{3}{4} \Lambda \Lambda \right) (w^* - w^\circ) -$$

$$- \frac{2h\sigma_i}{D} \Lambda w + e^{-\xi} \int_{\xi^*}^{\xi} e^{\xi} \left(\triangle \triangle - \frac{3}{4} \Lambda \Lambda \right) \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi.$$

Рассмотрим некоторые примеры.

а. *Цилиндрическая потеря устойчивости шарнирно опертой бесконечно широкой пластинки при равномерном сжатии.* В этом случае

$$\sigma_{11} = 2\sigma_{22} = -\sigma, \qquad \sigma_{12} = 0, \ \sigma_i = \sigma \sqrt{3} / 2, \qquad \alpha_{11} = 2\alpha_{22} = -2 / \sqrt{3}, \qquad \alpha_{12} = 0$$

Введем обозначение

$$\sigma^\circ = \frac{\sigma_i}{\sigma_e} \qquad \left(\sigma_e = \frac{2\pi^2 E h^2}{3\sqrt{3}\, l^2} \right)$$

где σ_e — интенсивность напряжений при упругой потере устойчивости, l — размер пластинки в направлении сжатия.

Полагая

$$w = \tau \sin \frac{\pi x}{l}, \qquad w^\circ = \tau^\circ \sin \frac{\pi x}{l}, \qquad w^* = \tau^* \sin \frac{\pi x}{l}$$

из (2.4) получим уравнение (2.5)

$$-e^{\xi^*-\xi} (\tau^* - \tau^\circ) + \sigma^\circ \tau + e^{-\xi} \int_{\xi^*}^{\xi} e^{\xi} \left[- \frac{d\tau}{d\xi} - \alpha n \xi^{-\alpha-1} \int_{\xi^*}^{\xi} \sigma^\circ \xi^{\alpha} \tau \, d\xi + (n-1) \sigma^\circ \tau \right] d\xi = 0$$

Обозначим:

$$\tau_1^* = d\tau / d\xi, \qquad \tau_2^* = d^2\tau / d\xi^2 \qquad \text{при } \xi = \xi^*$$

Полагая $\xi = \xi^*$ в уравнении (2.5) и двух его производных по ξ, получим три уравнения относительно τ°, τ^*, τ_1^*, τ_2^*. Присоединяя к этим уравнениям условие для границы устойчивости (2.2), которое с учетом (2.3) и (1.1) запишется в виде

$$\tau_2^* - \tau_1^* \alpha / \xi^* = 0 \tag{2.6}$$

будем иметь систему четырех однородных уравнений, равенство нулю определителя которой дает уравнение для границы устойчивости

$$\frac{En\sigma^\circ p_i^*}{(1-\sigma^\circ)\,\sigma_i}=2\alpha$$

совпадающее с уравнением, полученным в [1] для стержней

b. *Квадратная шарнирно опертая пластинка при равномерном сжатии в двух направлениях.* В этом случае

$$\sigma_{11}=\sigma_{22}=-\sigma$$

$$\sigma_{12}=0,\qquad \sigma_i=\sigma$$

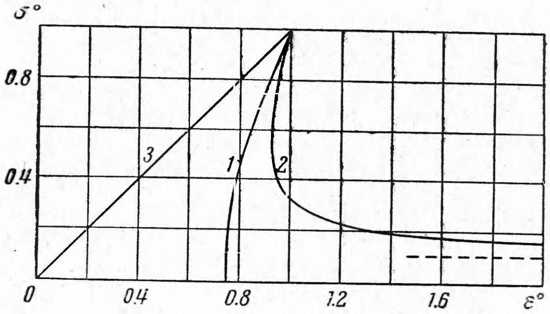
$$\alpha_{11}=\alpha_{22}=-1,\qquad \alpha_{12}=0$$

Введем обозначение

$$\sigma^\circ=\frac{\sigma_i}{\sigma_e}\qquad\left(\sigma_e=\frac{8\pi^2Eh^2}{9l^2}\right)$$

Полагая

$$w=\tau\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}$$



Фиг. 1

и вводя аналогичные выражения для w^* и w°, запишем уравнение возмущенных движений (2.4) в виде

$$-e^{\xi^*-\xi}(\tau^*-\tau^\circ)+\sigma^\circ\tau+e^{-\xi}\int_{\xi^*}^{\xi}e^{\xi}\left[-\frac{d\tau}{d\xi}+\alpha n\xi^{-\alpha-1}\int_{\xi^*}^{\xi}\xi^{\alpha}T\,d\xi-(n-1)\,T\right]d\xi=0 \qquad (2.7)$$

Здесь

$$T=\frac{1}{4}e^{\xi^*-\xi}(\tau^*-\tau^\circ)-\sigma^\circ\tau+\frac{1}{4}e^{-\xi}\int_{\xi^*}^{\xi}e^{\xi}\frac{d\tau}{d\xi}\,d\xi$$

Полагая в уравнении (2.7) и двух его производных $\xi=\xi^*$ и присоединяя условие (2.6), получим систему четырех однородных уравнений

$$\tau^\circ-(1-\sigma^\circ)\,\tau^*=0$$

$$(5-n)(\tau^*-\tau^\circ)+4(n-1)\,\sigma^\circ\tau^*-4(1-\sigma^\circ)\,\tau_1^*=0$$

$$[2(n-3)+n\alpha/\xi^*](\tau^*-\tau^\circ)-4(n-1+n\alpha/\xi^*)\,\sigma^\circ\tau^*+$$
$$+[5-n+4(n-1)\,\sigma^\circ]\,\tau_1^*-4(1-\sigma^\circ)\,\tau_2^*=0$$

$$\tau_2^*-\tau_1^*\alpha/\xi^*=0$$

из которой для границы устойчивости найдем

$$\sigma^\circ=1-\frac{(1+3n)^2}{4\,[1+3n^2+(1+6n)\,\alpha/\xi^*]} \qquad (2.8)$$

Обозначим:

$$p^\circ=\frac{Ep^*}{\sigma_e},\qquad \varepsilon^\circ=\frac{\sigma_i+Ep^*}{\sigma_e}=\sigma^\circ+p^\circ \qquad (2.9)$$

Тогда

$$\xi^*=\frac{p^\circ}{\sigma^\circ}=\frac{\varepsilon^\circ}{\sigma^\circ}-1$$

На фиг. 1 (кривая *2*) представлена зависимость между безразмерным напряжением σ° и безразмерной критической деформацией ε° для случая $\alpha=1$, $n=3$. Отметим, что кривая проходит через точку $\sigma^\circ=1$, $\varepsilon^\circ=1$, соответствующую упругой потере устойчивости. Заметим также, что согласно (2.8) при

$$\sigma^\circ\leqslant\frac{3(n-1)^2}{4(1+3n^2)}$$

устойчивость не теряется.

c. *Длинная шарнирно опертая пластинка, равномерно сжатая в продольном направлении.* В этом случае

$$\sigma_{11}=-\sigma,\qquad \sigma_{22}=\sigma_{12}=0,\qquad \sigma_i=\sigma,\ \ \alpha_{11}=-1,\qquad \alpha_{12}=\alpha_{22}=0$$

Введем обозначение

$$\sigma^\circ = \frac{\sigma_i}{\sigma_e} \qquad \left(\sigma_e = \frac{16\pi^2 E h^2}{9b^2}\right)$$

Здесь b — ширина пластинки. Полагая

$$w = \tau \sin\frac{\pi x}{\gamma b} \sin\frac{\pi y}{b}$$

и вводя аналогичные выражения для w^* и w°, запишем уравнение возмущенных движений (2.4) в виде

$$-e^{\xi^*-\xi}(1+\gamma^2)^2(\tau^*-\tau^\circ) + 4\sigma^\circ\gamma^2\tau +$$

$$+ e^{-\xi}\int\limits_{\xi^*}^{\xi} e^{\xi}\left[-\left(1+\gamma^2\right)^2\frac{d\tau}{d\xi} + \alpha n \xi^{-\alpha-1}\int\limits_{\xi^*}^{\xi}\xi^\alpha T\, d\xi - (n-1)\,T\right]d\xi = 0 \qquad (2.10)$$

Здесь

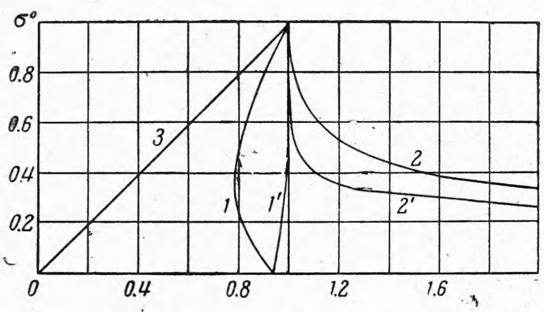
$$T = e^{\xi^*-\xi}(\tau^* - \tau^\circ)(1+\gamma^2)^2 - \frac{3}{4}e^{\xi^*-\xi}(\tau^*-\tau^\circ) -$$

$$-4\sigma^\circ\gamma^2\tau + e^{-\xi}\int\limits_{\xi^*}^{\xi} e^{\xi}\left[(1+\gamma^2)^2\frac{d\tau}{d\xi} - \frac{3}{4}\frac{d\tau}{d\xi}\right]d\xi$$

Полагая в уравнении (2.10) и двух его производных $\xi = \xi^*$ и присоединяя условие (2.6), получим систему четырех однородных уравнений, из которой для границы устойчивости найдем

$$\sigma^\circ = \frac{(1+\gamma^2)^2}{4\gamma^2} - \frac{[4(1+\gamma^2)^2 + 3(n-1)]^2}{16\gamma^2\{4(1+\gamma^2)^2(1+\alpha/\xi^*) + 3[(2n-1)\alpha/\xi^* + n^2 - 1]\}} \qquad (2.11)$$

С учетом (2.9) уравнением (2.11) определяется критическая безразмерная деформация ползучести p°, соответствующая заданному σ°. Значение γ при этом разыскивается из условия минимума p°. На фиг. 2 по горизонтальной оси отложены значения ε° и γ; кривая *2* представляет зависимость σ° от ε° согласно (2.11) в случае $\alpha = 1$, $n = 3$; кривая *2'* представляет собой зависимость между δ° и γ; отметим, что $\sigma^\circ \to 0$ при ε°, $\gamma \to \infty$.



Фиг. 2

В общем случае переменные в уравнении вынужденных движений (1.14) не разделяются.

Тогда решение уравнения в окрестности начала движения $p = p^*$ всегда можно разыскивать в виде

$$w(p, x, y) = \tau^* w_1(x, y) + (p - p^*)\, w_2(x, y) + \tfrac{1}{2}(p-p^*)^2 w_3(x, y)$$

Граничные условия для w_1, w_2, w_3 одинаковы. Полагая в уравнении (1.14) и двух его производных $p = p^*$, получим три уравнения

$$-\triangle\triangle(w^* - w^\circ) + \frac{2h\sigma_i}{D}\Lambda w^* = 0$$

$$\frac{E}{\sigma_i}\triangle\triangle(w^* - w^\circ) + \frac{3Eb}{4\sigma_i}\Lambda\Lambda(w^* - w^\circ) + \left(\frac{2h\sigma_i}{D}\Lambda - \triangle\triangle\right)w_2 = 0$$

$$\frac{E^2}{\sigma_i^2}\left[(b-1)\triangle\triangle - \frac{3}{4}\left(2b - \frac{\sigma_i}{Eg}\frac{\partial a}{\partial\sigma_i}\right)\Lambda\Lambda\right](w^* - w^\circ) + \qquad (2.13)$$

$$+\frac{E}{\sigma_i}\left[(1-b)\triangle\triangle + b\left(\frac{2h\sigma_i}{D}\Lambda + \frac{3}{4}\Lambda\Lambda\right)\right]w_2 + \left(\frac{2h\sigma_i}{D}\Lambda - \triangle\triangle\right)w_3 = 0$$

Полагая для начального прогиба

$$w^\circ = \tau^\circ w_1(x, y) \tag{2.14}$$

из первого уравнения (2.13) имеем

$$D(\tau^* - \tau^\circ) \triangle\triangle w_1 - 2h\sigma_i\tau^*\Lambda w_1 = 0 \tag{2.15}$$

Сравнивая (2.15) с уравнением упругой устойчивости при тех же краевых условиях

$$D \triangle\triangle w_e - 2h\sigma_e\Lambda w_e = 0 \tag{2.16}$$

где σ_e — критическая интенсивность напряжений, соответствующая собственной функции w_e, можно заключить, что

$$w_1(x, y) = w_e(x, y), \qquad \tau^* - \tau^\circ = \sigma^\circ\tau^* \qquad \left(\sigma^\circ = \frac{\sigma_i}{\sigma_e}\right) \tag{2.17}$$

Вводя (2.14), (2.17) в два последних уравнения (2.13), получим

$$\triangle\triangle w_2 - \frac{2h\sigma_i}{D}\Lambda w_2 = \sigma^\circ\tau^*\frac{E}{\sigma_i}\left[\triangle\triangle + \frac{3}{4}b\Lambda\Lambda\right]w_e$$

$$\triangle\triangle w_3 - \frac{2h\sigma_i}{D}\Lambda w_3 = \sigma^\circ\tau^*\frac{E^2}{\sigma_i^2}\left[(b-1)\triangle\triangle + \frac{3}{4}\left(-2b + \frac{\sigma_i}{Eg}\frac{\partial a}{\partial\sigma_i}\right)\Lambda\Lambda\right]w_e +$$

$$+ \frac{E}{\sigma_i}\left[(1-b)\triangle\triangle + b\left(\frac{2h\sigma_i}{D}\Lambda + \frac{3}{4}\Lambda\Lambda\right)\right]w_2 \tag{2.18}$$

После разыскания функций w_2 и w_3 из уравнений (2.18) при заданных краевых условиях соотношением

$$\ddot{w} = aw_2 + g\sigma_i w_3 = 0 \tag{2.19}$$

определится граница устойчивости.

Таким образом для разных точек пластинки получится, вообще говоря, своя граница устойчивости. В качестве границы устойчивости для пластинки в целом можно выбрать нижний предел границ устойчивости всех ее точек.

§ 3. Рассмотрим ту же постановку задач устойчивости пластинок при ползучести, полагая, что между составляющими тензора деформаций и девиатора напряжений имеют место соотношения теории деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\sigma_{ij}^*, \qquad \varepsilon_i^2 = \frac{2}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{3.1}$$

Пусть уравнение состояния имеет вид

$$\Phi(\sigma_i, p_i, \dot{p}_i) = 0, \qquad p_i = \varepsilon_i - \frac{\sigma_i}{E} \tag{3.2}$$

Линеаризуя (3.2) по сечению, получим

$$(E\lambda - \mu)\,\delta\sigma_i - \nu\delta\dot{\sigma}_i + E(\mu\delta\varepsilon_i + \nu\delta\dot{\varepsilon}_i) = 0 \tag{3.3}$$

или

$$\delta\sigma_i = A\delta\varepsilon_i \qquad (A\text{ — оператор}) \tag{3.4}$$

Здесь

$$\lambda = \Phi_{\sigma_i}, \quad \mu = \Phi_{p_i}, \quad \nu = \Phi_{\dot{p}_i}$$

— частные производные, не зависящие от x и y.

При выводе уравнения возмущенных движений почти полностью повторяются выкладки работы [2] с той разницей, что при этом учитывается переменность p_i и вводится начальный возмущающий прогиб w°.

Линеаризуя (3.1) и учитывая (3.4), получим

$$\delta\sigma_{ij}^{*} = \alpha_{ij}^{*}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\delta\varepsilon_i + \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\delta\varepsilon_{ij} \tag{3.5}$$

Согласно (3.1) и (1.6) для $\delta\varepsilon_i$ найдем

$$\delta\varepsilon_i = -z\Lambda(w - w^{\circ}) \tag{3.6}$$

Вводя в выражении для моментов G_1, G_2 и H значения $\delta\sigma_{ij}$ согласно (3.5), с учетом формул для деформаций (1.6), (3.6) и выполнив интегрирование но z, будем иметь

$$G_1 = -\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\sigma_i}{3\varepsilon_i}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \alpha_{11}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\Lambda\right](w - w^{\circ}) \tag{3.7}$$

Вводя (3.7) в уравнение пластинки (1.10), найдем

$$\left[\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\triangle\triangle + \frac{3}{4}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\Lambda\Lambda\right](w - w^{\circ}) - \frac{9\sigma_i}{4h^2}\Lambda w = 0$$

Учитывая смысл оператора A согласно (3.3), (3.4), получим из этого уравнения уравнение возмущенных движений в виде

$$\left(E\lambda - \mu - \nu\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\triangle\triangle - \frac{3}{4}\Lambda\Lambda\right)(w - w^{\circ}) - \frac{9\sigma_i}{4h^2}\Lambda w\right] -$$
$$-\frac{3}{4}E\left(\mu + \nu\frac{\partial}{\partial t}\right)\Lambda\Lambda(w - w^{\circ}) = 0 \tag{3.8}$$

где t^* — момент времени, в который приложено возмущение.

К уравнению (3.8) должно быть присоединено начальное условие

$$D\triangle\triangle(w^* - w^{\circ}) - 2h\sigma_i\Lambda w^* = 0 \qquad (w^* = w \text{ при } t = t^*) \tag{3.9}$$

Для исследования границы устойчивости здесь может быть использован метод, применявшийся в предыдущем параграфе. Три уравнения, определяющие прогиб w^*, скорость $\dot{w}^*$ и ускорение $\ddot{w}^*$ возмущенного движения в начальный момент времени $t = t^*$, получаются из (3.9), (3.8) и его производной.

Для определения границы устойчивости к этим уравнениям необходимо присоединить условие, которому удовлетворяет возмущенное движение, начинающееся в критический момент времени

$$\ddot{w}^* = 0 \tag{3.10}$$

Пусть уравнение состояния имеет вид

$$\dot{p}_i = A\sigma_i^{\,n}p_i^{-\alpha}$$

Уравнение (3.8) примет вид

$$-\left(\frac{\alpha}{\xi} + n + \frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left[\frac{1}{1+\xi}\left(\Delta\Delta - \frac{3}{4}\Lambda\Lambda\right)(w - w^{\circ}) - \frac{2h\sigma_i}{D}\Lambda w\right] -$$
$$-\frac{3}{4}\left[\frac{\alpha}{\xi}\Lambda\Lambda(w - w^{\circ}) + \Lambda\Lambda\frac{\partial w}{\partial\xi}\right] = 0 \qquad \left(\xi = \frac{Ep_i}{\sigma_i}\right) \tag{3.11}$$

Рассмотрим некоторые примеры.

а) *Квадратная шарнирно опертая пластинка при равномерном сжатии в двух направлениях.* С учетом выражения для w и обозначений, введенных в § 2, уравнение (3.11) запишем в виде

$$\left[\sigma^{\circ} - \frac{1}{4(1+\xi)} - \frac{3}{4}\right]\frac{d\tau}{d\xi} - \left[\left(\frac{\alpha + n\xi}{\xi}\right)\left(\frac{1}{4(1+\xi)} - \sigma^{\circ}\right) - \frac{1}{4(1+\xi)^2} + \frac{3\alpha}{4\xi}\right]\tau +$$
$$+\left[\frac{\alpha + n\xi}{4\xi(1+\xi)} - \frac{1}{4(1+\xi)^2} + \frac{3\alpha}{4\xi}\right]\tau^{\circ} = 0 \tag{3.12}$$

Начальное условие (3.9) примет вид

$$\tau_*^{\bullet} = (1 - \sigma^{\circ})\tau^* \tag{3.13}$$

Дифференцируя (3.12) по ξ, получим

$$\left[\sigma^\circ - \frac{1}{4(1+\xi)} - \frac{3}{4}\right]\frac{d^2\tau}{d\xi^2} - \left\{\frac{\alpha + n\xi}{\xi}\left[\frac{1}{4(1+\xi)} - \sigma^\circ\right] - \frac{1}{2(1+\xi)^2} + \frac{3\alpha}{4\xi}\right\}\frac{d\tau}{d\xi} -$$
$$- \tau \frac{d}{d\xi}\left\{\frac{\alpha + n\xi}{\xi}\left[\frac{1}{4(1+\xi)} - \sigma^\circ\right] - \frac{1}{4(1+\xi)^2} + \frac{3\alpha}{4\xi}\right\} -$$
$$- \tau^\circ \frac{d}{d\xi}\left[-\frac{\alpha + n\xi}{4\xi(1+\xi)} + \frac{1}{4(1+\xi)^2} - \frac{3\alpha}{4\xi}\right] = 0 \qquad (3.14)$$

Полагая в (3.12) и (3.14) $\xi = \xi^*$ и присоединяя к уравнениям (3.12) — (3.14) условие для границы устойчивости (2.6), получим четыре однородных уравнения относительно τ°, τ^* и производных $\tau_1{}^*$, $\tau_2{}^*$.

Равенство нулю определителя дает уравнение границы устойчивости

$$\sigma^\circ = 1 - \frac{\xi^*}{4\vartheta}\left[(1+\xi^*)\,\beta\,(\alpha + \beta) + 2 + 4\alpha + 9n + \alpha\xi^* + 11n\xi^*\right. \qquad (3.15)$$
$$\vartheta = (2\alpha + n\xi^*)\,\beta\,(1+\xi^*)^2 + \alpha\,(2+\xi^*)(1+\xi^*) + 2\xi^*, \quad \beta = \alpha + 3n + 4n\xi^*$$

С учетом обозначений (2.9) уравнение (3.15) определяет зависимость между безразмерным напряжением σ° и безразмерной критической деформацией ε°. На фиг. 1 (кривая *1*) представлена эта зависимость для случая $\alpha = 1$, $n = 3$.

При $\sigma^\circ = 0$ из (3.15) следует $\varepsilon^\circ = (n + 6\alpha)/4n$

b) *Длинная шарнирно опертая пластинка, равномерно сжатая в продольном направлении.* С учетом выражения для w и обозначений § 2 уравнение (3.11) запишется в виде

$$-\left(\frac{\alpha}{\xi} + n + \frac{d}{d\xi}\right)\left\{\frac{\tau - \tau^\circ}{1+\xi}\left[(1+\gamma^2)^2 - \frac{3}{4}\right] - 4\sigma^\circ\gamma^2\tau\right\} - \frac{3}{4}\left[\frac{\alpha}{\xi}(\tau - \tau^\circ) + \frac{d\tau}{d\xi}\right] = 0$$

Начальное условие (3.9) примет вид

$$(1+\gamma^2)^2(\tau^* - \tau^\circ) - 4\sigma^\circ\gamma^2\tau^* = 0$$

Действуя далее точно так же, как и при решении предыдущей задачи, найдем уравнение границы устойчивости

$$\sigma^\circ = \frac{(1+\gamma^2)^2}{4\gamma^2(1+\xi^*)} + \frac{\xi^*}{16\gamma^2}\,\frac{16(1+\gamma^2)^4 A_1 + 12(1+\gamma^2)^2 A_2 + 9A_3}{4(1+\gamma^2)^2 B_1 + 3B_2}. \qquad (3.16)$$

где

$$A_1 = -2(\alpha + n\xi^*) - 2/(1+\xi^*)$$
$$A_2 = 2(1 + 3\alpha + \alpha^2) - n(3+\alpha) + \xi^*(2\alpha^2 + \alpha + n - n^2 + \alpha n) +$$
$$+ \xi^* n(2\alpha - n) + 2/(1+\xi^*)$$
$$A_3 = (1+\xi^*)(-n^2 + 3\alpha n - 2\alpha^2) + 3n - 4\alpha - 2 - \alpha\xi^* + n\xi^*$$
$$B_1 = (\alpha + n\xi^*)(2\alpha + n\xi^*)(1+\xi^*)^2 + \alpha(2+\xi^*)(1+\xi^*) + 2\xi^*$$
$$B_2 = (2\alpha + n\xi^*)(1+\xi^*)[(n-\alpha)(1+\xi^*) - 1] + \xi^*(n-\alpha)(1+\xi^*) - 2\xi^*$$

С учетом обозначений (2.9) уравнением (3.16) определяется зависимость между σ° и ε° (или p°). При этом значение γ, характеризующее форму при выпучивании, разыскивается из условия минимума ε°.

В крайних случаях из уравнения (3.16) найдем

$$\varepsilon^\circ = 1, \qquad \gamma = 1 \qquad \text{при } \sigma^\circ = 1$$

$$\varepsilon^\circ = \frac{(1+\gamma^2)^2}{4\gamma^2} + \frac{3}{16\gamma^2}\left(2\frac{\alpha}{n} - 1\right), \qquad \gamma^4 = 1 + \frac{3}{4}\left(\frac{2\alpha}{n} - 1\right) \qquad \text{при } \sigma^\circ = 0$$

На фиг. 2 (кривая *1*) представлена зависимость $\sigma^\circ(\varepsilon^\circ)$ согласно (3.16) для случая $\alpha = 1$, $n = 3$. Здесь же построена зависимость δ от γ, соответствующая минимуму ε° (кривая *1*).

Поступила VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Куршин Л. М. Устойчивость стержней в условиях ползучести. ПМТФ, 1961, № 6.

2. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.