УДК 539.375

О РОСТЕ ТРЕЩИН ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ

В. И. Астафьев

(*Куйбышев*)

Процесс разрушения металлов при ползучести в зависимости от температуры и напряжения происходит двояко. Большие напряжения и невысокая температура приводят к внутризеренному растрескиванию со значительными необратимыми деформациями (вязкое разрушение). При малых напряжениях и высокой температуре в основном происходит нарушение межзеренных связей с малой величиной необратимой деформации (хрупкое разрушение). На диаграмме длительной прочности в координатах $\lg \sigma_0 - \lg t_R$ они изображаются двумя прямыми с различными углами наклона.

Хрупкое разрушение происходит путем зарождения пор по границе зерен, ортогональных направлению максимального растягивающего напряжения, которые в процессе ползучести растут, сливаются и образуют макротрещину, приводящую к разрушению тела [1].

В работе [2] при описании хрупкого разрушения был введен параметр ω — поврежденность материала, подчиняющегося уравнению

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = A\left(\frac{\sigma_{\max}}{1-\omega}\right)^m \tag{0.1}$$

(A, m — константы мат риала). Для гладких образцов, когда процесс зарождения и слияния пор равномерно распределен по всему объему тела, ω зависит только лишь от времени. Уравнение (0.1) в этом случае легко интегрируется и дает связь между растягивающим напряжением σ_0 и временем до разрушения t_R:

$$t_R = \left[A(m+1)\sigma_0^m\right]^{-1}. \tag{0.2}$$

Наличие в теле концентраторов напряжений приводит к неоднородности поля напряжений и локализации очага разрушения. В последнее время подобные задачи привлекают все большее внимание [3—5]. Проводится большое число экспериментов по исследованию распространения трещин от острых надрезов в тонких пластинках и выявлению параметров, управляющих процессом развития трещин (см. обзор [6]).

Данная работа посвящена теоретическому решению задачи о распространении трещины в тонкой пластинке в условиях хрупкого разрушения при ползучести.

1. Рассмотрим тонкую пластинку с начальной прямолинейной трещиной длины $2l_0$, которая растягивается напряжением σ_0, приложенным на бесконечности ортогонально направлению трещины. Считаем, что пластинка находится в состоянии ползучести, а приложенное напряжение σ_0 меньше критического напряжения $\sigma_* = K_c/\sqrt{\pi l_0}$ в аналогичной упругой задаче Гриффитса. К вершине трещины примыкает узкая пластическая зона, наибольший размер которой d, а максимальное растягивающее напряжение равно пределу текучести на растяжение σ_s. Обозначим через $l(t)$ положение вершины трещины, $\sigma_y(t, x_0)$ и $\omega(t, x_0)$ — максимальное растягивающее напряжение и поврежденность в точке x_0 оси x в момент времени $t > 0$ (ось x направлена вдоль трещины, ось y — ортогонально к ней). Интегрируя уравнение (0.1), получим соотношение, связывающее поврежденность и напряжение в точке x_0:

$$1-(1-\omega(t, x_0))^{m+1} = A(m+1)\int_0^t \sigma_y^m(\tau, x_0)\,d\tau. \tag{1.1}$$

Критерием разрушения служит условие $\omega(t, l(t) + d) = 1$, т. е. поврежденность в конце пластической зоны трещины, которая в момент t имела длину $2l(t)$, равна единице. Введем безразмерные величины $\tau = t/t_R$, $\lambda = l/l_0$, $\rho = d/l_0$, $\sigma = \sigma_y/\sigma_0$, $\sigma_1 = \sigma_s/\sigma_0$. С учетом критерия разрушения и соотношения (0.2) из (1.1) следует интегральное уравнение для зависимости длины трещины λ от времени τ

$$1 = \int_0^\tau \sigma^m(\tau_1, \lambda(\tau) + \rho)\, d\tau_1. \tag{1.2}$$

Из уравнения (1.2) сразу же определяется время страгивания трещины $\tau_* = \sigma_1^{-m}$. Это время, в течение которого в конце пластической зоны начальной неподвижной трещины накопится поврежденность, равная единице, и трещина начнет распространяться. Перепишем (1.2) в виде

$$1 - \int_0^{\tau_*} \sigma^m(\tau_1, \lambda(\tau) + \rho)\, d\tau_1 = \int_{\tau_*}^{\tau} \sigma^m(\tau_1, \lambda(\tau) + \rho)\, d\tau_1. \tag{1.3}$$

При $0 \leqslant \tau < \tau_*$ трещина неподвижна и напряжения меняются с течением времени только лишь из-за процесса ползучести. При $\tau > \tau_*$ трещина начинает распространяться и зависимость напряжений от времени определяется уже не только ползучестью, но и нестационарностью задачи. Точное решение уравнения (1.3) сложно и невозможно без применения численных методов (похожая задача при ином критерии разрушения решалась в [7] с помощью метода конечных элементов). Однако можно выделить предельные состояния и найти приближенное решение уравнения (1.3). Поскольку процесс накопления поврежденности из-за сильной концентрации напряжений локализован вблизи вершины трещины, то в выражении для напряжений уравнения (1.3) можно оставить лишь сингулярный член. Выделим два класса материалов: «хрупкие» или «жесткие», которые характеризуются высоким пределом текучести и небольшим показателем ползучести в степенном законе ползучести, и «вязкие» или «мягкие», у которых предел текучести невелик, а показатель ползучести достаточно большой. Для первого класса материалов τ_* мало, поэтому можно пренебречь перераспределением напряжений из-за ползучести при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_*$ и считать, что в этом интервале времени напряжения совпадают с начальными упругими напряжениями. Предположим также, что и при $\tau > \tau_*$ напряжения изменяются по упругому закону (это верно, по крайней мере, в начальные моменты распространения трещины). Следовательно, для этого класса $\sigma_y = K/\sqrt{2\pi r}$, где $r = x - l$ — расстояние от вершины трещины; $K = \sigma_0\sqrt{\pi l}$ — коэффициент интенсивности напряжений. Для второго класса материалов перераспределением напряжений при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_*$ пренебрегать уже нельзя. Пусть за это время в пластинке произошло полное перераспределение напряжений от начального упругого состояния до состояния установившейся ползучести. В случае степенного закона ползучести $\dot{\varepsilon}_{ij} = (3/2)B\bar{\sigma}^{n-1} s_{ij}$, где B, n — константы материала; $\bar{\sigma} = (3/2 s_{ij} s_{ij})^{1/2}$ — интенсивность напряжений; s_{ij}, $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты девиатора тензора напряжений и скоростей деформаций, для растягивающего напряжения σ_y можно записать $\sigma_y = k_n \sigma_0 (l/r)^{1/(n+1)}$ [8], где k_n — известная функция от показателя ползучести n ($k_1 = 1/\sqrt{2}$). Примем, что при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_*$ напряжения определяются по состоянию установившейся ползучести.

Тогда как для того, так и для другого класса материалов можно записать

$$\sigma_y = k_n\sigma_0(l/r)^{1/(n+1)}, \tag{1.4}$$

где $n = 1$ для «жестких» материалов, а $n > 1$ — для «мягких».

2. Уравнение (1.3) с учетом выражения (1.4) перепишем в виде

$$1 - \tau_* k_n^m\,(1/(\lambda(\tau) + \rho - 1))^{m/(n+1)} = k_n^m \int_{\tau_*}^{\tau} (\lambda(\tau_1)/(\lambda(\tau) + \rho - \lambda(\tau_1)))^{m/(n+1)}\, d\tau_1. \tag{2.1}$$

Сделаем замену переменных $\lambda(\tau) = z$, $\lambda(\tau_1) = \xi$, $\tau_1 = \varphi(\xi)$, $d\tau_1 = \varphi'(\xi)d\xi$ и обозначим $m/(n + 1) = \alpha$. В новых переменных уравнение (2.1) будет

$$1 - \tau_* k_n^m (z + \rho - 1)^{-\alpha} = k_n^m \int_1^z (\xi/(z + \rho - \xi))^\alpha \varphi'(\xi)\, d\xi. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) является уравнением Вольтерра первого рода с разностным ядром относительно функции $\xi^\alpha\varphi'(\xi)$. Решение этого уравнения можно найти с помощью преобразования Лапласа $\bar f(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}dt$ (приведя при этом уравнение (2.2) к стандартному виду с нижним пределом, равным нулю). Для преобразованных величин уравнение (2.2) запишется в виде

$$\frac{1}{q} - q^{\alpha-1}e^q\Gamma(1 - \alpha, q) = k_n^m\rho^{-\alpha}\bar\Phi(p)\, q^{\alpha-1}e^q\Gamma(1 - \alpha, q), \tag{2.3}$$

где $\Gamma(1 - \alpha, q) = \int_q^\infty e^{-t}t^{-\alpha}dt$ — неполная гамма-функция; $\bar\Phi(p)$ — преобразование Лапласа от функции $\xi^\alpha\varphi'(\xi)$; $q = \rho p$, а также учтено, что $\tau_* = k_n^{-m}\rho^\alpha$ (что следует из уравнения (2.2) при $z = 1$). Из уравнения (2.3) находим

$$\bar\Phi(p) = k_n^{-m}\rho^\alpha(q^{-\alpha}e^{-q}/\Gamma(1 - \alpha, q) - 1). \tag{2.4}$$

Так как построенное решение справедливо лишь при τ, близких к τ_* (т. е. $z \to 1$, а следовательно, $q \to \infty$), то выражение (2.4) можно заменить асимптотическим выражением, заменив $\Gamma(1 - \alpha, q)$ его асимптотическим разложением при больших q [9]

$$\Gamma(1 - \alpha, q) = q^{-\alpha}e^{-q}(1 - \alpha/q + \alpha(\alpha + 1)/q^2 - \ldots).$$

Окончательное решение в изображениях примет вид

$$\bar\Phi(p) = k_n^{-m}\rho^\alpha((1 - \alpha/q + \alpha(\alpha + 1)/q^2 - \ldots)^{-1} - 1) \approx k_n^{-m}\rho^{\alpha-1}\alpha/p.$$

Оригинал этого изображения будет $z^\alpha\varphi'(z) = k_n^{-m}\rho^{\alpha-1}\alpha$. Вернувшись к старым переменным $\lambda = z$ и $\tau = \varphi(z)$, получим для скорости распространения трещины $d\lambda/d\tau$ следующую зависимость:

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = k_n^m\frac{\rho}{\alpha}\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^\alpha,$$

или в размерных величинах (учитывая (2.2))

$$\frac{dl}{dt} = k_n^m\frac{A(m + 1)}{\alpha}d^{1-\alpha}\sigma_0^m l^\alpha. \tag{2.5}$$

Для «жестких» материалов $n = 1$, $k_1 = 1/\sqrt{2}$, следовательно, (2.5) перепишется в виде

$$\frac{dl}{dt} = \frac{A(m+1)}{\pi m}(2\pi d)^{1-m/2}K^m.$$

Степенная зависимость скорости распространения трещины dl/dt от коэффициента интенсивности напряжений K наблюдалась в ряде экспериментов [10, 11] (см. также обзор [6]) на Cr-Mo-V стали.

В работе [12] для описания процесса распространения трещины при ползучести применялся модифицированный J-интеграл Райса — Черепанова $C^* = \oint\left[W dy - T_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x} ds\right]$, $W = \int\limits_0^{\dot{\varepsilon}_{ij}} \sigma_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij}$, перенесенный на случай установившейся ползучести. Для степенного закона ползучести, согласно [8], выражение компонент тензора напряжений σ_{ij} через C^* имеет вид

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{C^*}{BI_n r}\right)^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta), \tag{2.6}$$

где B, n — константы материала в степенном законе; $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$ — ограниченные функции полярного угла θ; I_n — константа, зависящая от показателя ползучести n. Учитывая (2.6) в (1.4), соотношение (2.5) для «мягких» материалов запишем в виде

$$\frac{dl}{dt} = A(m+1)\frac{n+1}{m} d^{1-\frac{m}{n+1}} (BI_n)^{-\frac{m}{n+1}} C^{*\frac{m}{n+1}}.$$

Следовательно, для «мягких» материалов получается степенная зависимость dl/dt от C^*, что экспериментально наблюдалось в [12] на никелевых сплавах. Таким образом, можно сделать следующие выводы: кинетическое уравнение для параметра поврежденности ω можно применять и для описания процесса хрупкого разрушения при ползучести образцов с надрезами, при этом скорость распространения трещин для «жестких» материалов определяется коэффициентом интенсивности напряжений, а для «мягких» — величиной модифицированного J-интеграла.

Поступила 20 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Грант Н.** Разрушение в условиях высокотемпературной ползучести.— В кн.: Разрушение. Т. 3. М., Мир, 1976.
2. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М., Наука, 1966.
3. **Leckie F. A., Hayhurst D. R.** Creep rupture of structures.— Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1974, vol. 340, N 1622.
4. **Hayhurst D. R., Morrison C. J., Leckie F. A.** The effect of stress concentrations on the creep rupture of tension panels. — Trans. ASME, Ser. E, 1975, vol. 42, N 3.
5. **Hayhurst D. R., Dimmer P. R., Chernuka M. W.** Estimates of the creep rupture lifetime of structures using finite element method.— J. Mech. and Phys. Solids, 1975, vol. 23, p. 335—355.
6. **Leeuwen H. P. van.** The application of fracture mechanics to creep crack growth.— Eng Fract. Mech., 1977, vol. 9, N 4.
7. **Ohtani R., Nakamura S.** Crack propagation in creep (finite element analysis).— J. Soc. Mater. Sci., Jap., 1976, vol. 25, N 275.
8. **Hutchinson J. W.** Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardering material.— J. Mech. and Phys. Solids, 1968, vol. 16, N 1.
9. **Олвер Ф.** Введение в асимптотические методы и специальные функции. М., Наука, 1978.
10. **Siverns M. J., Price A. T.** Crack propagation under creep conditions in a quenched $2\frac{1}{4}$ cromium 1 molibdenum steel.— Int, J. Fract., 1973, vol. 9, N 2.

11. **Harrison C. B., Sandor G. N.** High-temperature crack growth in low-cycle fatigue.— Eng. Fract. Mech., 1971, vol. 3, N 4.
12. **Landes J. D., Begbey J. A.** A fracture mechanics approach to creep crack growth.— Mechanics of crack growth. Amer. Soc. Test. Mater., Spec. Techn. Publ., 1976, vol. 590, p. 128—148.

УДК 539.374

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ И ЛИНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Е. И. Роменский

(*Новосибирск*)

Изучаются поверхности, описывающие распространение волн малых возмущений в пластической среде, описываемой уравнениями, предложенными в [1]. Обзор работ, в которых эти процессы исследуются на основе других моделей, содержится в [2]. Частный случай рассматриваемых здесь уравнений был предложен в [3].

Поверхности распространения волн описываются с помощью акустической матрицы, которая определяет три волны: квазипродольную и две квазипоперечных. Акустическая матрица является симметричной и положительно определенной — эти свойства определяются требованием корректности (гиперболичности) рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Описанию класса гиперболических систем, подобных рассматриваемым здесь, посвящена работа [4].

Оказывается, что акустическая матрица, отвечающая системе дифференциальных уравнений рассматриваемой здесь упругопластической среды, на некоторых поверхностях может вырождаться. Такое вырождение соответствует обращению в нуль скорости одной квазипоперечной волны. Эти поверхности вырождения в плоском случае линеаризованной некоторым образом системы уравнений совпадают с поверхностями скольжения классической теории пластичности.

Динамические уравнения изотропной упругопластической среды в прямоугольной декартовой системе координат x_i, предложенные в [1], имеют вид

$$\rho du_i/dt - \partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0,\ dh_{ij}/dt - U_{i\alpha}q_{\alpha\beta}U_{j\beta} = 0,$$
$$\rho E_s dS/dt - L\sigma_{ij}\partial u_i/\partial x_j + (l_\alpha\sigma_\alpha)\partial u_\beta/\partial x_\beta = 0, \quad (1)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + u_\alpha\partial/\partial x_\alpha$; u_i — вектор скорости; σ_{ij} — тензор напряжений; h_{ij} — тензор эффективных упругих деформаций Генки; S — энтропия; ρ — плотность. Тензор U_{ij} образует ортогональную матрицу U, приводящую σ_{ij} и h_{ij} к главным осям:

$$\|\sigma_{ij}\| = U\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{pmatrix}U^*,\ \|h_{ij}\| = U\begin{pmatrix}h_1 & 0 & 0\\ 0 & h_2 & 0\\ 0 & 0 & h_3\end{pmatrix}U^*,\quad UU^* = I.$$

Напряжения σ_{ij} связаны с эффективными упругими деформациями h_{ij} формулами

$$\sigma_{ij} = \rho\partial E/\partial h_{ij},\ \rho = \rho_0 \exp(-h_{11}-h_{22}-h_{33}),$$

или в главных осях

$$\sigma_i = \rho\partial E/\partial h_i,\ \rho = \rho_0 \exp(-h_1-h_2-h_3),$$