DOI: 10.15372/PHE20200311
УДК 373.3/.5+372.016:51

ТРЕБОВАНИЯ ГОССТАНДАРТОВ И КОМПЕТЕНТНОСТНОГО ПОДХОДА К МАТЕМАТИКЕ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

А. Ж. Жафяров, Е. А. Яровая (Новосибирск, Россия)

Введение. Будущее России связано с подготовкой креативно компетентных специалистов, способных работать на передовых производствах, создавать и использовать прорывные технологические решения. Поскольку все кадры первый этап подготовки проходят в школах, то школьная система образования – важнейший фактор и движущая сила для прогрессивного развития страны. Выпускник школы должен иметь современные фундаментальные знания, уметь их применять; быть ответственным, самостоятельным и готовым принимать обоснованные решения, особенно в критических ситуациях; иметь нацеленность на инновационную, творческую и исследовательскую деятельность и др. Существующие госстандарты и разрабатываемые проекты новых стандартов школьного образования не решают этой проблемы.

Методология и методика исследования. Методология решения этой проблемы основана на компетентностном методе реализации эффективного взаимодействия в системе «обучающийся – учитель – школа – общество». Цель – разработать концепцию изучения школьного курса математики на основе компетентностного подхода, внедрение которой будет способствовать повышению качества математического образования обучающихся основной школы. Сказанное продемонстрировано на примере конкретной темы математики за 5-й класс.

Результаты исследования. Разработана концепция, согласно которой изучение тем школьного курса математики происходит не изолированно, а в допустимой совокупности, включая изучение отдельных тем как решение конкретных задач, связанных с этой темой. Реализация представленной концепции отвечает двум ключевым положениям авторской технологии компетентностного подхода: Шаг 1 – «учим мыслям» и Шаг 2 – «учим мыслить».

Жафяров Акрям Жафярович – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАО, профессор кафедры геометрии и методики обучения математике, Новосибирский государственный педагогический университет.

E-mail: akram39@yandex.ru

ORCID: 0000-0002-1339-1472

Яровая Евгения Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент, зав. кафедрой геометрии и методики обучения математике, Новосибирский государственный педагогический университет.

E-mail: jnar1@ yandex.ru

ORCID: 0000-0002-8178-2117

Akryam Z. Zhafyarov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Education, Professor of the Chair of Geometry and Methods of Teaching Mathematics, Novosibirsk State Pedagogical University.

Evgeniya A. Yarovaya – Candidate of Pedagogical Sciences, Docent, Head of the Chair of Geometry and Methods of Teaching Mathematics, Novosibirsk State Pedagogical University.

Заключение. Качество образования прямо пропорционально уровню требований к результатам обучения. Проект школьных госстандартов предъявляет самый низкий уровень требований, в частности, при обучении математике. Анализ трех систем образования: ЗУН, компетентностного подхода и современной школьной технологии – показал действенность и перспективность обучения математике в школе на основе компетентностного подхода. Внедрение предлагаемой модели в образовательный процесс будет способствовать повышению качества школьного математического образования.

Ключевые слова: компетенция, компетентность, технология компетентностного подхода, требования к результатам обучения, качество математического образования, обучение математике, натуральные числа.

Для цитирования: **Жафяров А. Ж., Яровая Е. А.** Требования госстандартов и компетентностного подхода к математике основной школы // Философия образования. – 2020. – Т. 20, № 3. – С. 185–202.

REQUIREMENTS OF STATE STANDARDS AND COMPETENCE APPROACH TO PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS

A. Z. Zhafyarov, E. A. Yarovaya (Novosibirsk, Russia)

Introduction. The future of Russia is connected with the training of creatively competent specialists who are able to work in advanced production facilities, create and use breakthrough technological solutions. Since all cadres undergo the first stage of training in schools, the school secondary education system is the most important factor and driving force for the progressive development of the country. A school graduate should have modern fundamental knowledge, be able to apply it; be responsible, independent and ready to make reasoned decisions, especially in critical situations; have a focus on innovation, creative and research activities, and much more; i.e., be competent. The existing state standards and new school education standards that are being developed do not solve this problem.

Methodology and methods of the research. The methodology for solving this problem is based on the competence based method of implementing effective interaction in the system «student – teacher – school – society». The goal is to develop a concept of studying a school mathematics course based on a competency-based approach, the implementation of which will contribute to primary schools. This is demonstrated by the example of a specific topic of mathematics in grade 5.

The results of the research. The concept was developed according to which the study of the topics of the school mathematics course is not isolated, but in an acceptable complex, including the study of individual educational elements as a solution to specific problems related to this topic. Implementation of the presented concept meets two key requirements of the author's technology of competence approach: Step 1 – «teach thoughts» and Step 2 – «teach to think».

Conclusion. The quality of education is directly proportional to the level of requirements for learning outcomes. The project of school state standards sets the lowest level of requirements, in particular, when teaching mathematics. The analysis of three educational systems: ZUN, competence approach and modern school technology has shown the effectiveness and prospects of teaching math at school based on a competency-based approach. The implementation of the proposed model in the educational process will contribute to improving the quality of school mathematics education.

Keywords: competency, competence, technology of competence approach, requirements for training results, educational process, teaching of mathematics, natural number.

For citation: Zhafyarov A. Z., Yarovaya E. A. Requirements of state standards and competence approach to primary school mathematics. *Philosophy of Education*, 2020, vol. 20, no. 3, pp. 185–202.

Введение. В нашей стране ключевой идеей является модернизация системы образования на основе компетентностного подхода. Это правильно, так как стандарты компетентностного подхода требуют: а) иметь фундаментальные знания; б) уметь применять знания для решения задач; в) владеть знаниями и умениями на таком уровне, который позволяет решать стандартные и нестандартные задачи, ставить новые проблемы и решать их; г) приобретать навыки инновационной, творческой и исследовательской деятельности; д) продолжать образование, самообразование и личностное развитие. Специалистов такой формации называют креативно компетентными. Именно такие кадры могут выполнить поручение Президента В. В. Путина, изложенное в послании Федеральному Собранию Российской Федерации 2019 г.: «... нам необходимы специалисты, способные работать на передовых производствах, создавать и использовать прорывные технологические решения»[1].

Послание указывает на первостепенное значение технологического прорыва и создания большого числа высокотехнологичных рабочих мест и тем самым обеспечение условий для достижения достоинства, благополучия и здоровья населения нашей страны. Для реализации сказанного, то есть концепции прогрессивного развития (КПР), необходимы компетентные кадры, причем не просто компетентные, а креативно компетентные. Авторская модель формирования креативно компетентных и интеллектуально развитых кадров представлена в работе [1]. Поскольку все кадры первый этап подготовки проходят в школах и вузах, то послание Президента указывает, что система образования – важнейший фактор и движущая сила для прогрессивного развития страны. Это соответствующим образом должно быть отражено в Проекте стандартов об уровне освоения программ предметов основной школы.

В действительности предлагаемый Проект противоречит и посланию Президента, и концепции прогрессивного развития, так как требования к уровню освоения существенно слабее требований бывшей и критикуемой зуновской системы образования, тем более системы образования,

[1] Послание Президента Федеральному Собранию 20 февраля 2019 года [Электронный ресурс]. – URL: http://kremlin.ru/events/president/news/59863 (дата обращения: 05.04.2020).

построенной на основе компетентностного подхода. Доказательство истинности сказанного обнаруживается в следующих фактах. В Проекте проверяется только *сформированность умения оперировать понятиями*, только умение, а в системе ЗУН – знания, умения, навыки. Таким образом, предлагаемая система хуже старой зуновской системы, тем более системы образования, построенной на основе компетентностного подхода, так как в ней требуются иметь современные фундаментальные знания, решать стандартные и нестандартные задачи, ставить новые проблемы и решать их. Это продолжается с 2003 г., с момента подписания Болонского соглашения о внедрении компетентностного подхода в образование по следующей причине: те, кто занимается системой образования, не понимали и не понимают, что такое компетентностный подход, и это в тот период, когда развитые страны давно занимаются его внедрением.

Основная причина описанной ситуации – неправильное толкование ключевых понятий компетентностного подхода: компетенции и компетентности. В первую очередь отметим, что понятия «компетенция» и «компетентность» относятся к разным категориям: первое отражает необходимость (долженствование), второе – возможность (способность) конкретного субъекта осуществлять деятельность, предусмотренную соответствующей компетенцией. Непротиворечивая теория и технология компетентностного подхода А. Ж. Жафярова подробно изложена в работах [2–5]. В указанных работах и исследованиях других авторов [6–18] получены значимые результаты в теории компетентностного подхода, в частности, итоги его внедрения в образовательный процесс.

Новые стандарты – это шаг назад, осталось выяснить соответствующим органам следующее: он сделан по некомпетентности или умышленно.

Методология и методика исследования *построена на изучении математики основной школы на основе компетентностного подхода*. Объектом исследования является повышение качества математического образования обучающихся основной школы. Предмет исследования – изучение курса математики основной школы на основе компетентностного подхода.

Предложенный подход является совершенно новым в практике российского образования, однако в развитых странах компетентностный подход внедряется давно, поэтому пора начинать, тем более что авторами статьи уже сделаны значительные шаги в этом направлении применительно к школьному обучению (некоторые примеры можно посмотреть в работах[2] [5; 19]).

Важность внедрения компетентностного подхода в учебный процесс в современное образование не вызывает сомнения. С. Л. Троянская

[2] *Жафяров А. Ж., Иглина Н. Г., Яровая Е. А.* Методология и технология формирования базисных компетенций и компетентностей учащихся 5–6-х классов по биологии (естествознанию): учеб. пособие. – Новосибирск: НГПУ, 2014. – 285 с.

в учебном пособии выделяет целую главу с соответствующим названием «Компетентностный подход как методологическая основа современного образования»[3]. Вопросы моделирования педагогических процессов в аспекте положений компетентностного подхода изложены в статье А. Н. Дахина и др. [20]. Очевидно, что внедрение компетентностного подхода в практику обучения влечет за собой изменения в нынешней как вузовской, так и школьной системах образования. Исследователи проблемы указывают на различные векторы изменения современного образования. Так, А. П. Касаткин [16] отмечает, что современное образование будет меняться по двум основным векторам: с точки зрения формы и с точки зрения содержания.

Говоря о современных подходах к обучению математике в школе, отметим публикации В. А. Тестова [17; 18], в которых он предлагает подходы, основанные на принципе природосообразности, способствующие лучшему пониманию учащимися основных понятий и методов математики.

Нет ничего практичнее хорошо разработанной теории, поэтому начнем с теории, или концептуальных идей, изучения математики и конкретных формулировок требований к результатам изучения в аспекте компетентностного подхода.

Предлагаем изучать математику основной школы на основе компетентностного подхода. Продемонстрируем это на примере изучения понятия «натуральное число» (в привычной, традиционной терминологии – темы «Натуральные числа»). На самом деле нам не подходит эта терминология. Будем изучать интегрированный курс «Натуральное число, элементы комбинаторики, теории множеств и теории вероятностей». Главной темой (стволовой клеткой) будет натуральное число, а элементы других тем включим по мере возможности, причем максимально обеспечивая наглядность и доступность за счет геометрии. Заметим еще, что названные темы мы не будем изучать как самостоятельные, а включим их в процесс изучения натуральных чисел как решение конкретных задач. Поясним сказанное на примере двух натуральных чисел: 12 и 18. Найдем делители этих чисел: A = {2, 2, 3}, B = {2, 3, 3}. Поставим вопросы:

а) есть ли у них общие делители? Совместными усилиями находим общие делители и строим частичные и полные пересечения множеств A и B, в том числе и различными геометрическими фигурами;

б) каков наибольший общий делитель (НОД) чисел 12 и 18? Приходим к выводу: НОД – это элементы полного пересечения множеств A и B;

в) элементы множества A известны; случайным образом вынимают из закрытого мешочка, куда поместили эти делители, по одному числу. Какова вероятность того, что первым вынутым числом будет 3?

---

[3] *Троянская С. Л.* Основы компетентностного подхода в высшем образовании: учеб. пособие. – Ижевск: Удмуртский ун-т, 2016. – 176 с.

Некоторые могут сказать, что тема «Дроби» еще не изучена. Но это обстоятельство мы будем использовать для мотивации изучения темы «Дроби».

С *комбинаторикой* также познакомимся на примерах решения задач по теме «Натуральные числа». Пусть даны две цифры: 2 и 5. Сколько можно построить, используя только эти цифры натуральных чисел: а) двузначных; б) трехзначных?

Изучение темы «Натуральное число, элементы комбинаторики, теории множеств и теории вероятностей» построим на технологии, разработанной А. Ж. Жафяровым, и начнем с выявления структуры этой темы, она несложная, поэтому разбивать ее на подтемы не следует, элементы структуры будут служить микрокомпетенциями. Наша задача состоит в том, чтобы учащиеся были компетентны по этим микрокомпетенциям, то есть владели видами деятельности, указанными в структуре этой темы. А это будет достигнуто тогда и только тогда, когда владение микрокомпетенциями удовлетворит требования а–д компетентностного подхода. Нетрудно догадаться, что это чисто кибернетический подход, он целесообразен тем, что по микрокомпетенции (микродеятельности) легче добиться компетентности обучающегося, чем по всей теме. Если ученик овладеет всеми микрокомпетенциями, то он компетентен по этой теме.

Структура обозначенной темы: ряд натуральных чисел, расположение натуральных чисел на числовой прямой, позиционная запись натурального числа, элементы комбинаторики, запись натурального числа в виде суммы разрядных слагаемых, сравнение натуральных чисел, округление натуральных чисел, сложение и вычитание натуральных чисел, свойства; произведение натуральных чисел, свойства; распределительный закон, сложение и вычитание чисел столбиком, умножение чисел столбиком, степень с натуральным показателем, деление нацело, элементы теории множеств, НОД и полное пересечение множеств простых делителей двух натуральных чисел, НОК и объединение множеств простых делителей двух натуральных чисел, элементы теория вероятностей.

Теперь сформулируем то, что должны уметь делать пятиклассники после изучения первой темы (в терминологии компетентностного подхода это означает: формировать БК1 – первую базисную компетенцию).

Чтобы быть *компетентным по БК1* (то есть владеть тем, что предусмотрено программой изучения первой темы), обучающий должен:

а) *знать* определения и свойства всех понятий, предусмотренных структурой темы (БК1);

б) *уметь* применять знания для решения учебно-познавательных и практико-ориентированных задач;

в) *владеть* знаниями и умениями на таком уровне, который позволяет решать стандартные и нестандартные задачи, ставить проблемы и решать их;

г) *приобретать* навыки инновационной, творческой и исследовательской деятельности, активно участвовать в олимпиадах и конкурсах;

д) *продолжать образование, самообразование и личностное развитие*, активно участвовать в организации и проведении олимпиад и конкурсов.

Итак, мы перечислили то, что должны уметь делать пятиклассники после изучения первой темы. В Проекте стандартов разработчикам следовало бы сделать аналогичное по каждой теме. В советское время программы по математике для школ и вузов были расписаны именно таким образом, поэтому эта система образования входила в первую пятерку лучших образовательных систем мира.

В технологии внедрения компетентностного подхода в учебный процесс заложен принцип: спрашивать то, чему научили, поэтому сначала мы должны реализовать Шаг 1 – «учим мыслям», то есть коротко изложить теорию и дать решение типовых задач (в статье это можно осуществить лишь схематично). Аналогично обстоит дело с реализацией Шага 2 – «учим мыслить»:

а) формирование ответственности, самостоятельности и готовности к инновационной деятельности;

б) формирование готовности к творческой и исследовательской деятельности.

Пункт 2а достигается за счет самостоятельного решения специально подобранных задач, представляющих собой усиленные и обобщенные типовые задачи, рассмотренные в Шаге 1.

Пункт 2б реализуется за счет выполнения творческих заданий, представляющих собой усиленные и обобщенные (более высокого порядка) задачи, предложенные для самостоятельного решения.

I. *Краткая теория и поясняющие примеры по теме «Натуральное число, элементы комбинаторики, теории множеств и теории вероятностей»*.

Натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ..., записанные в порядке возрастания и без пропусков, называют *рядом натуральных чисел*.

Символы 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 называют *цифрами*. Заметим: 0 не является натуральным числом; десятичная система нумерации зародилась примерно 1 500 лет тому назад в Индии. Трудность внедрения этой системы обусловлена отсутствием символа 0, показывающего отсутствие единиц соответствующего разряда. Эта цифра 0 была изобретена в Индии в VII в. и изображалась точкой или кружочком. В Средние века десятичная нумерация пришла в арабские страны, оттуда – в Западную Европу. Среднеазиатский математик Аль Хорезми (787–850 гг.) описал десятичную нумерацию на арабском языке, потому десятичную систему называют арабской.

Натуральные числа изображают на прямой (называют ее числовой или координатной прямой). Начертим горизонтальную прямую, отметим на ней точку О, а справа от нее точку Е. Будем считать, что точка О изображает число 0, а точка Е – число 1. Отрезок ОЕ назовем единичным отрезком. Отложив вправо от точки Е отрезок, равный единичному, получим точку, изображающую число 2 и т. д. В итоге получили координатную прямую, а сами числа называют координатами отмеченных точек.

В настоящее время принята десятичная система записи чисел, причем одна и та же цифра имеет различное значение в зависимости от места (позиции), где она расположена в записи числа. Например, в записи 444 первая слева цифра 4 означает четыре сотни $4 \cdot 100$, средняя цифра 4 – четыре десятка $4 \cdot 10$, первая справа цифра – четыре единицы. Поэтому десятичную систему записи чисел называют *позиционной*. Важную роль играет число 10: десять единиц называют десятком, десять десятков – сотней, десять сотней – тысячей и т. д. Натуральные числа, записанные одной цифрой, называют *однозначными*, несколькими цифрами – *многозначными*. Например, число 4673 – четырехзначное число: четыре тысячи, шесть сотен, семь десятков и три единицы, $4673 = 4 \cdot 1000+6 \cdot 100+7 \cdot 10+3$, тем самым представили число в виде суммы разрядных слагаемых. Так можно представить любое натуральное число.

Решим задачи, связанные с комбинаторикой (нам предстоит комбинировать или сочетать, или соединять что-то).

Задача 1. Даны две цифр 2 и 5. Сколько можно, используя только эти цифры, составить натуральных чисел: а) двузначных; б) трехзначных; в) четырехзначных?

Рассмотрим решение задачи б), предстоит комбинировать (сочетать, соединять) с данными цифрами 2 и 5. Выберем стратегию (план) решения: сначала найдем все трехзначные числа, у которых на первом месте записана цифра 2, их будет три: 222, 225 и 252. Аналогично рассуждая, получим еще три трехзначных числа 555, 552 и 525, у которых на первом месте записана цифра 5. Ответ для б) 6.

Остальные задачи обучающиеся решают самостоятельно.

Задача 2. На числовой (координатной) прямой отмечены различные точки. Любые две отмеченные точки являются концами некоторого отрезка, причем пары АБ и БА определяют один и тот же отрезок. Сколько отрезков определяют точки, если даны: а) три точки; в) четыре точки? Решить самостоятельно.

Сравнить два натуральных числа a и b можно тремя способами: по их расположению в ряду натуральных чисел или на координатной прямой и десятичной записи. Считают b большим a ($b > a$), если b правее a в ряду натуральных чисел или на координатной прямой. Третий способ посложней: из двух натуральных чисел больше то, у которого: а) разрядов больше; б) при одинаковых разрядах больше то число, у которого больше первая (слева направо) из неодинаковых цифр.

Следствие 1. Если для натуральных чисел a, b, c имеют место неравенства $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Следствие 2. 0 (нуль) меньше любого натурального числа.

Округление натуральных чисел проводится по следующему правилу:

а) к цифре разряда, до которого округляют число, следует добавить 1, если справа от нее стоит 5 или большая цифра. В противном случае цифру этого разряда не меняем;

б) все цифры, расположенные правее рассматриваемого разряда, заменяем нулями.

Пример. Округлите число 546379 до: а) тысяч; б) десяти тысяч.

Решение: а) 6 – округляемая цифра, 3 – цифра, стоящая справа. Она меньше 5, поэтому цифру 6 не меняем; все цифры, стоящие после цифры 6, заменяем нулями. Ответ 546000.

Задачу б) решить самостоятельно.

Сложение и вычитание натуральных чисел будем проводить, пользуясь рядом натуральных чисел и координатной прямой. Пусть надо сложить натуральные числа 6 и 4. В ряду натуральных чисел или на координатной прямой отметим число 6. Требуется к 6 прибавить 4, то есть увеличить на 4 единицы. Числа ряда натуральных чисел и координатной прямой, расположенные правее 6, будут больше этой 6. Среди этих чисел выберем то, которое больше на 4 единицы, то есть число 10. Итак, 6 + 4=10. Проделаем то же самое в обратном порядке: 4 + 6 =10. На этом частном примере мы убедились в справедливости переместительного закона сложения натуральных чисел: $a + b = b + a$. Далее на частных примерах убеждаемся в справедливости сочетательного закона сложения натуральных чисел: $(a + b) + c = a +(b + c)$.

Разностью натуральных чисел a и b (его обозначение $a - b$) называется такое число, которое при сложении с числом b дает число a. В ряду натуральных чисел или на координатной прямой отмечаем число a. Число $a - b$ меньше числа a на b единиц, поэтому, откладывая от a влево b единиц, получаем $a - b$.

Законы арифметических действий объясняют правило сложения и вычитания натуральных чисел «столбиком».

Пример. Найти сумму чисел 242 и 576.

Решение. Разложим каждое слагаемое по разрядам:

$$242 = 200 + 40 + 2; 536 = 500 + 30 + 6.$$

Применив сочетательный и переместительный законы сложения, получим:

$$242 + 536 = (200 + 40 + 2)+(500 + 30 + 6) =$$
$$= (200 + 500)+(40 + 30)+(2 + 6) = 700 + 70 + 8 = 778, \text{ или}$$

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 242 \\ \underline{536} \\ 778 \end{array} \end{array}.$$

Пример. Найдем разность чисел 867 и 341.

Решение.

$$867 - 341 = (800 + 60 + 7)-(300 + 40 + 1) =$$
$$= (800 - 300)+(60 - 40)+(7 - 1) = 500 + 20 + 6 = 526, \text{ или}$$

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 867 \\ \underline{341} \\ 526 \end{array} \end{array}.$$

Сложение и вычитание «столбиком» особенно удобно для многозначных чисел:

$$102564 + 534512 = 637076; \qquad 953421 - 87043 = 866378.$$

$$+\begin{array}{r} 102564 \\ \underline{534512} \\ 637076 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 953421 \\ \underline{\ \ 87043} \\ 866378 \end{array}$$

Сумму нескольких одинаковых слагаемых записывают короче:

$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 8 \cdot 6.$$

Запись $8 \cdot 6$ называют *произведением*, а действие – *умножением*. Умножить число a на число b – значит найти сумму b слагаемых, каждое из которых равно a.

Так как $8 \cdot 6 = 48$ и $6 \cdot 8 = 48$, то можно утверждать, что от перестановки множителей произведение не меняется. Это *переместительный закон умножения*: $a \cdot b = b \cdot a$.

На частных примерах можно удостовериться, что выполняются и другие законы.

1. *Сочетательный закон*: чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего чисел:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Используя переместительный и сочетательный законы, при умножении нескольких чисел можно группировать множители в любом порядке.

Пример. $9 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = (5 \cdot 2)\cdot(9 \cdot 4) = 10 \cdot 36 = 360$.

2. *Распределительный закон умножения относительно сложения или вычитания*: чтобы сумму двух чисел умножить на третье число, можно умножить на это число каждое слагаемое и результаты сложить:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{или} \quad (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$$

Выполним, используя распределительный закон умножения примеры: а) $92 \cdot 7$; б) $39 \cdot 8$.

Решение: а) $92 \cdot 7 = (90 + 2) \cdot 7 = 90 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 630 + 14 = 644$.

Пример б) решить самостоятельно.

Есть еще два важных свойства умножения натуральных чисел.

а) если один из множителей равен нулю, то и произведение равно нулю:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Например, $15 \cdot 0 = 0 \cdot 15 = 0$;

б) если один из множителей равен 1, то произведение равно второму множителю:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Например, $129 \cdot 1 = 1 \cdot 129 = 129$.

Очень часто нам приходится умножать натуральные числа *на разрядную единицу* (10, 100, 1000, ...).

Найдем произведение чисел $216 \cdot 100$, используя распределительный закон:

$$216 \cdot 100 = (200 + 10 + 6) \cdot 100 = 200 \cdot 100 + 10 \cdot 1000 + 6 \cdot 1000 =$$
$$= 20000 + 1000 + 600 = 21600.$$

Чтобы умножить натуральное число на разрядную единицу 10, 100, 1000, ..., надо приписать справа к этому числу столько нулей, сколько их в разрядной единице, на которую умножаем.

Используя распределительный закон умножения и правило умножения на разрядную единицу, мы записываем умножение в «столбик»:

$$\begin{array}{r}
\times\ 124 \\
\underline{334} \\
496 \\
+\ 372 \\
\underline{372} \\
41416.
\end{array}$$

Деление нацело. Пусть a и b – натуральные числа. Говорят, что a делится на b нацело, если найдется натуральное число с такое, что $a = bc$. Число a называют делимым, b – делителем, c – частным. Делимое и делитель можно умножить или разделить нацело на одно и то же натуральное число – частное от этого не изменится.

Ясно, что любое натуральное число а делится на 1 и само на себя:

$$a : 1 = a;$$
$$a : a = 1.$$

Если a не имеет других делителей, кроме 1 и самого себя, то оно называется *простым*. Например, 7 делится только 1 и 7, следовательно, 7 – простое число, а число 6, кроме делителей 1 и 6, имеет еще два простых делителя. Если число a имеет более двух делителей, то оно называется *составным*. Например, составное число, у него 4 делителя: 1, 6, 2, 3. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным, образует свой класс, состоящий из одного элемента. Числа 2 и 3 являются простыми, причем $6 = 2 \cdot 3$ – представили 6 как произведение его простых делителей. Аналогично представим числа 12 и 18; $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ и $18=2 \cdot 3 \cdot 3$; $A = \{2, 2, 3\}$– множество делителей числа 12; $B = \{2, 3, 3\}$ – множество простых делителей 18. Общими усилиями выясняем, что 2 – общий делитель чисел 12 и 18, с одной стороны; с другой – 2 является общим для множеств A и B, то есть принадлежит частичному пересечению этих множеств. Далее: 2 и 3 являются общими делителями 12 и 18 и входят в пересечение множеств A и B. Нетрудно заметить, что $6 = 2 \cdot 3$ – наибольший общий делитель чисел 12 и 18, а множество, состоящее из 2 и 3, – полное пересечение множеств A и B. Вывод: $6 = 2 \cdot 3$ – наибольший делитель чисел 12 и 18 – является произведением простых делителей этих чисел, входящих в пересечение множеств простых их делителей. Это правило верно для любых двух натуральных чисел. *Пересечением* множеств A и B называется множество всех их общих элементов.

Пример. Пусть $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ и $b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$. Найдите наибольший общий делитель этих чисел.

Решение. Найдем общие делители: 2, 3, 3, 7. Эти числа входят в пересечение множеств простых делителей данных чисел. Следовательно, их произведение, равное 126, является наибольшим общим делителем. *Итак, наибольшим общим делителем натуральных чисел a и b является произведение чисел, входящих в пересечение множеств простых делителей этих чисел*.

Рассмотрим теперь *объединение* множеств простых делителей натуральных чисел, приведенных в только что рассмотренном примере. Пусть $A = \{2, 2, 3, 3, 3, 5, 7\}$ – множество простых делителей числа a, $B = \{2, 3, 3, 7, 7\}$ – множество простых делителей числа b. *Объединением* множеств A и B называется множество всех чисел, каждое из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Исходя из этого определения, найдем объединение данных множеств: $A \cup B = \{2, 2, 3, 3, 3, 5, 7, 7\}$. Выясним, каким свойством обладает это объединение. Не делится ли оно на a, на b? Убеждаемся: делится и на a, и на b. Мы нашли одно свойство.

Выдвинем еще одну гипотезу: не является ли произведение всех чисел объединения наименьшим числом, которое делится и на a, и на b? Убеждаемся и в этом: произведение всех чисел объединения множеств A и B – наименьшее число, которое делится и на a, и на b. Поэтому это число обозначается $[a; b]$ и называется наименьшим общим кратным чисел a и b. Итак, наименьшим общим кратным натуральных чисел a и b является произведение чисел, входящих в объединение множеств простых делителей этих чисел.

Есть формула, связывающая три числа: $a \cdot b$ – произведение чисел a и b; $(a;\, b)$ – наибольший общий делитель и $[a\,;\, b]$ – наименьшее общее кратное этих чисел. Было бы неплохо, если бы кто-нибудь нашел эту формулу и убедился в справедливости этой формулы на конкретных примерах.

В заключении теории первой темы решим задачу на *вычисление вероятности* некоторого случайного события. Например, число $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ имеет три простых делителя: одна 3 и две двойки (2 и 2). Эти делители как-то отметили, поместили в непрозрачный мешочек и предложили вытащить один делитель. *Какова вероятность случайного события*, что первым вынутым числом будет число 3? Что надо делать, чтобы решить этот тип задачи, выясним на нашем примере. В мешочке три числа 2, 2 и 3. Вытаскивание (вслепую) одного числа – это событие, причем благоприятное, если вынули 3. Всех событий три, так как в мешочке три числа. *Вероятностью события называется отношение числа благоприятных событий ко всему числу событий*. Следовательно, вероятность события, что первым вынутым числом будет 3, равна 1 : 3 – дробь. Тему «Дроби» еще предстоит изучать, относитесь к изучению этой темы ответственно, она необходима во многих областях деятельности человечества: в расчетах, инженерии, в частности, теории вероятностей, которая помогает разобраться в большом многообразии случайных событий, которыми изобилует наша жизнь.

Завершим решение рассматриваемой задачи. Какова вероятность, что первым вынутым числом будет 2? Применим отмеченное правило: число благоприятных событий для 2 равно двум, так как их две штуки в мешочке, а общее число событий по-прежнему равно трем. Следовательно, искомая вероятность равна отношению 2 : 3.

Приведем примеры некоторых заданий, реализующих Шаг 1 – «учим мыслям» (типовые задачи) и Шаг 2 – «учим мыслить» (задания для самостоятельной работы и творческие задания) по теме «Натуральное число, элементы комбинаторики, теории множеств и теории вероятностей».

II. *Типовые задачи*.

1. Записать число, в котором:

а) 3 сотни, 2 десятка и 5 единиц; б) 8 миллионов, 6 десятков тысяч, 3 тысячи и 7 десятков.

2. Сравнить числа:

а) 5 734 и 27 035; б) 98 745 и 875 481.

3. Начертить отрезок КМ и отметить на нем точку С. Сколько отрезков теперь на чертеже? Измерить и записать длину каждого отрезка.

4. Какие натуральные числа лежат на координатном луче между числами:

а) 87 и 92; б) 1 089 и 1 091?

5. Выполнить действия:

а) 75 000–54 20+9207; б) 66 667–(43 751–4 841).

6. Выполнить умножение:

а) 56 · 10000; б) 650 · 100

III. *Задания для самостоятельной работы*.

7. Составить из цифр 3 и 8 четырехзначное, шестизначное, восьмизначное числа.

8. Записать в виде суммы разрядных слагаемых числа: 28, 159, 2 083, 57 040.

9. Записать цифрами число, представленное в виде суммы разрядных слагаемых: а) 30 000+2 000+800+4; б) 20 0000+7 000+6 000+700+20.

10. Назвать все натуральные числа, которые:

а) меньше 15; б) больше 2 157, но меньше 2 160.

11. Записать в порядке возрастания числа:

2 746, 178, 5 384, 61 003, 479, 5 348, 61 030

12. На отрезке АВ отмечена точка С, АС = 31 см, СВ = 17 см. Вычислить длину отрезка АВ.

13. Какое из чисел расположено на координатном луче правее:

а) 134 или 185; б) 227 или 207?

14. Найти сумму двух чисел, если известно, что:

а) одно число 2 130, а другое на 143 больше; б) одно число 634, а другое на 242 меньше.

15. Выполнить действия:

а) (473 + 291 – 764) · 23; б) 12 · (157 – 15) – 14 · (108 – 57).

16. Вычислить наиболее простым способом:

а) (55 · 57) : 11; б) (2200 · 64) : 110.

17. В теплице с 1 м2 снимают 30 кг огурцов. Сколько килограммов огурцов сняли в теплице, ширина которой 5 м, а длина 10 м?

Творческие задания.

18. Сравнить числа, если в них некоторые цифры заменены звездочками:

а) 8*5 и 9**; б) 13*4* и 13*44*; в) *321* и 9*4*; г) **** и ***.

19. В числе 9 347 051 зачеркнуть четыре цифры так, чтобы оставшиеся цифры образовали: а) наибольшее трехзначное число; б) наименьшее трехзначное число.

20. К какому семизначному числу надо прибавить 1, чтобы получить восьмизначное число?

21. Найти сумму четырех чисел, первое из которых равно 2 400, а каждое следующее на 60 больше предыдущего.

22. Вставить вместо * пропущенные цифры:

$$\begin{array}{rrrr} 378* & *7*3 & 7*58 & *3*2* \\ +\,*8*7 & +\,6*8* & -\,281* & -\,*2*9 \\ \hline 6646 & 12**5 & 4545 & 7579 \end{array}$$

23. Поставить в нужных местах знаки сложения так, чтобы получились верные равенства:

а) 7 7 7 7 7 7 = 861; б) 3 3 3 3 3 3 3 3 = 375.

24. Не выполняя вычислений, указать действия, которые выполнены неверно:

а) 735 : 35 = 201; б) 4 860 : 45 = 1009; в) 4 494 : 42 = 107.

25. Игральный кубик имеет 6 граней, каждая грань отмечена цифрами 1, 2, …, 6. Какова вероятность того события, что при одном выбрасывании на верхней грани будет: а) 6; в) 2 или 3; с) четная цифра; д) такая цифра, которая в сумме с другими цифрами граней куба дает 4?

26. Найдите значения цифр, обозначенных буквами:

а) $\overline{xyz}\cdot\overline{abc}=\overline{9z2019}$; б) $\overline{xyz}\cdot\overline{abc}=\overline{8z2020}$.

Результаты исследования.

1. Дана концепция изучения тем школьного курса математики не изолированно, а в допустимой совокупности, включая изучение отдельных учебных элементов как решение конкретных задач, связанных с этой темой.

2. Содержание тем расписано подробнейшим образом (доведено до микрокомпетенций – дескрипторов).

3. Подробно составлены требования к результативности изучения тем.

4. Продемонстрирована технология внедрения КП в процесс изучения школьной математики.

Заключение. Исторический опыт российского образования убеждает: чем ниже уровень требований к результатам обучения, тем ниже качество образования.

1. В статье коротко рассмотрены три системы образования: ЗУН, компетентностный подход и современная школьная технология. Последняя система признана наихудшей, так как она требует только умения, в том время как ЗУН – знания, умения и навыки, а компетентностный подход, кроме ЗУН, еще требует владения умением решать нестандартные задачи, ставить новые проблемы и решать их.

2. Предложена новая технология изучения школьной математики, основанная на компетентностном подходе и продемонстрированная на примере изучения первой темы курса математики для 5 класса. До сих пор этого не было, поэтому новизна обеспечена. Теоретическое и практическое значения очевидны, так как новый подход открывает широкие возможности для развития индивидуальных способностей обучающихся.

Перспективы зависят от того, как скоро будут созданы УМД – учебно-методическое и дидактическое обеспечения по каждой теме и каждому предмету.

Уровень требований к результатам обучения по предложенному проекту госстандартов значительно ниже уровня требований системы образования зуновской и компетентностного подхода, поэтому если госстандарты будут приняты на основании предложенного проекта, то на повышение качества образования можно не надеяться. Отметим, что эти материалы обслуживают и дистанционное образование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жафяров А. Ж.** Иерархическая модель формирования креативно компетентных и интеллектуально развитых коллективов кадров // Science for Education Today. – 2020. – Т. 10, № 2. – С. 138–149. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42772189
2. **Жафяров А. Ж.** Компетентностный подход: непротиворечивая теория и технология // Science for Education Today. – 2019. – Т. 9, № 2. – С. 81–95. URL: https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=38191460
3. **Жафяров А. Ж.** Методология и технология внедрения компетентностного подхода в математическом образовании // Вестник Новосибирского государственного педагогического университета. – 2016. – Т. 6, № 3. – С. 105–115. URL: http://en.sciforedu.ru/article/1823
4. **Жафяров А. Ж.** Реализация технологии внедрения компетентностного подхода в школьном курсе математики // Вестник Новосибирского государственного педагогического университета. – 2017. – Т. 7, № 2. – С. 71–84. URL: http://en.sciforedu.ru/article/2363
5. **Жафяров А. Ж.** Методология и технологии повышения компетентности учителей, студентов и учащихся по теме «Линейная функция и её приложения»: монография. – Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2013. – 279 с.
6. **Bergsmann E., Schultes M.-Th., Winter P., Schober B., Spiel Ch.** Evaluation of competence-based teaching in higher education: From theory to practice // Evaluation and Program Planning. – 2015. – Vol. 52. – P. 1–9. DOI: https://doi.org/10.1016/j.evalprogplan.2015.03.001
7. **Cheetham G., Chivers G.** The reflective (and competent) practitioner: a model of professional competence which seeks to harmonise the reflective practitioner and competence-based approaches // Journal of European Industrial Training. – 1998. – Vol. 22, issue 7. – P. 267–276. DOI: https://doi.org/10.1108/03090599810230678
8. **Dewey J.** Experience and education. – N.-Y.: Simon and Schuster Publ., 2007. – 96 p. URL: http://www.schoolofeducators.com/wp-content/uploads/2011/12/EXPERIENCE-EDUCATION-JOHN-DEWEY.pdf
9. **Gravina E. W.** Competency-Based Education and Its Effect on Nursing Education: A Literature Review // Teaching and Learning in Nursing. – 2017. – Vol. 12, Issue 2. – P. 117–121. DOI: https://doi.org/10.1016/j.teln.2016.11.004
10. **Judrups J., Zandbergs U., Arhipova I., Vaisnore L.** Architecture of a competence – based human resource development solution // Procedia Computer Science. – 2015. – Vol. 77. – P. 184–190. DOI: https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.382
11. **Markham T., Lenz B.** Ready for the world // Educational Leadership. – 2002. – Vol. 59, no. 7. – P. 76–80. URL: http://scholar.google.com/scholar_lookup?title=Ready%20for%20the%20world&author=T.%20Markham&author=B.%20Lenz&journal=Educational%20Leadership&volume=59&pages=76-80&publication_year=2002

12. **Miranda S., Orciuoli F., Loia V., Sampson D.** An ontology-based model for competentce management // Data and Knowledge Engineering. – 2017. – Vol. 107. – P. 51–66. DOI: https://doi.org/10.1016/j.datak.2016.12.001
13. **Pijl-Zieber E. M., Barton S., Konkin J., Awosoga O., Caine V.** Competence and competency-based nursing education: Finding our waythrough the issues // Nurse Education Today. – 2014. – Vol. 34, issue 5. – P. 676–678. DOI: https://doi.org/10.1016/j.nedt.2013.09.007
14. **Rezgui K., Mhiri H., Ghédira K.** Ontology-based e-Portfolio modeling for supporting lifelong competency assessment and development // Procedia Computer Science. – 2017. – Vol. 112. – P. 397–406. DOI: https://doi.org/10.1016/j.procs.2017.08.041
15. **Stefanutti L., de Chiusole D.** On the assessment of learning in competence based knowledge space theory // Journal of Mathematical Psychology. – 2017. – Vol. 80. – P. 22–32. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmp.2017.08.003
16. **Касаткин А. П.** Современное образовательное пространство: особенности и перспективы // Философия образования. – 2017. – № 3 (72). – С. 3–16. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29715435
17. **Тестов В. А.** Принцип природосообразности и его применение в методике обучения математике // Научно-методический электронный журнал Концепт. – 2020. – № 1. – С. 1–12. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41868998
18. **Тестов В. А.** Принцип природосообразности и обучение математике // Народное образование. – 2020. – № 1 (1478). – С. 141–148. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42629832
19. **Яровая Е. А.** Формирование метапредметной компетентности учащихся 5–6-х классов основной школы (биология, математика): монография / под ред. А. Ж. Жафярова. – Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2014. – 161 с. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23538185
20. **Дахин А. Н., Яровая Е. А., Вилисов Д. В.** Компетентностное обучение в контексте сравнительной педагогики // Школьные технологии. – 2019. – № 6. – С. 53–57. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?Id=42285287

REFERENCES

1. Zhafyarov A. Zh. Hierarchical model of formation of creative competent and intellectually developed personnel collectives. *Science for Education Today*, 2020, vol. 10, no. 2, pp. 138–149. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42772189 (In Russian)
2. Zhafyarov A. Zh. Competence approach: consistent theory and technology. *Science for Education Today*, 2019, vol. 9, no. 2, pp. 81–95. URL: https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=38191460 (In Russian)
3. Zhafyarov A. Zh. Methodology and technology of implementation of the competence-based approach in mathematical education. *Bulletin of the Novosibirsk State Pedagogical University*, 2016, vol. 6, no. 3, pp. 105–115. URL: http://en.sciforedu.ru/article/1823 (In Russian)
4. Zhafyarov A. Zh. Implementation of the technology of implementation of the competence-based approach in the school mathematics course. *Bulletin of the Novosibirsk State Pedagogical University*, 2017, vol. 7, no. 2, pp. 71–84. URL: http://en.sciforedu.ru/article/2363 (In Russian)
5. Zhafyarov A. Zh. *Methodology and technologies for increasing the competence of teachers, students and pupils on the topic «Linear function and its applications»*: a monograph. Novosibirsk: Publishing house of NGPU, 2013. 279 p. (In Russian)
6. Bergsmann E., Schultes M.-Th., Winter P., Schober B., Spiel Ch. Evaluation of competence-based teaching in higher education: From theory to practice. Evaluation and Program Planning, 2015, vol. 52, pp. 1–9. DOI: https://doi.org/10.1016/j.evalprogplan.2015.03.001

7. Cheetham G., Chivers G. The reflective (and competent) practitioner: a model of professional competence which seeks to harmonise the reflective practitioner and competence-based approaches. *Journal of European Industrial Training*, 1998, vol. 22, issue 7, pp. 267–276. DOI: https://doi.org/10.1108/03090599810230678
8. Dewey J. *Experience and education*. New York: Simon and Schuster Publ., 2007, 96 p. URL: http://www.schoolofeducators.com/wp-content/uploads/2011/12/EXPERIENCE-EDUCATION-JOHN-DEWEY.pdf
9. Gravina E. W. Competency-Based Education and Its Effect on Nursing Education: A Literature Review. *Teaching and Learning in Nursing*, 2017, vol. 12, issue 2, pp. 117–121. DOI: https://doi.org/10.1016/j.teln.2016.11.004
10. Judrups J., Zandbergs U., Arhipova I., Vaisnore L. Architecture of a competence – based human resource development solution. *Procedia Computer Science*, 2015, vol. 77, pp. 184–190. DOI: https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.382
11. Markham T., Lenz B. Ready for the world. *Educational Leadership*, 2002, vol. 59, no. 7, pp. 76–80. URL: http://scholar.google.com/scholar_lookup?title=Ready%20for%20the%20world&author=T.%20Markham&author=B.%20Lenz&journal=Educational%20Leadership&volume=59&pages=76-80&publication_year=2002
12. Miranda S., Orciuoli F., Loia V., Sampson D. An ontology-based model for competentce management. *Data and Knowledge Engineering*, 2017, vol. 107, pp. 51–66. DOI: https://doi.org/10.1016/j.datak.2016.12.001
13. Pijl-Zieber E. M., Barton S., Konkin J., Awosoga O., Caine V. Competence and competency-based nursing education: Finding our waythrough the issues. *Nurse Education Today*, 2014, vol. 34, issue 5, pp. 676–678. DOI: https://doi.org/10.1016/j.nedt.2013.09.007
14. Rezgui K., Mhiri H., Ghédira K. Ontology-based e-Portfolio modeling for supporting lifelong competency assessment and development. *Procedia Computer Science*, 2017, vol. 112, pp. 397–406. DOI: https://doi.org/10.1016/j.procs.2017.08.041
15. Stefanutti L., de Chiusole D. On the assessment of learning in competence based knowledge space theory. *Journal of Mathematical Psychology*, 2017, vol. 80, pp. 22–32. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmp.2017.08.003
16. Kasatkin A. P. Modern educational space: features and prospects. *Philosophy of Education*, 2017, no. 3 (72), pp. 3–16. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29715435 (In Russian)
17. Testov V. A. The principle of natural conformity and its application in the methodology of teaching mathematics. *Scientific and Methodological Electronic Journal Concept*, 2020, no. 1, pp. 1–12. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41868998 (In Russian)
18. Testov V. A. The principle of natural conformity and teaching mathematics. *National education*, 2020, no. 1 (1478), pp. 141–148. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42629832 (In Russian)
19. Yarovaya E. A. *Formation of metasubject competence of students in grades 5–6 of basic school (biology, mathematics)*: a monograph. Ed. A. Zh. Zhafyarov. Novosibirsk: NSPU, 2014, 161 p. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23538185 (In Russian)
20. Dakhin A. N., Yarovaya E. A., Vilisov D. V. Competence-based learning in the context of comparative pedagogy. *School Technologies*, 2019, no. 6, pp. 53–57. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?Id=42285287 (In Russian)

Received April 14, 2020 — Поступила: 14.04.2020

Accepted by the editors June 30, 2020 — Принята редакцией: 30.06.2020