

## УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ МЕМБРАННОГО ТИПА

В. В. Скрипачев

(Киев)

В связи с успешными опытами Крамера [1,2] на обтянутых гибкими покрытиями моделях были предприняты попытки теоретически объяснить влияние деформации границы на положение точки потери устойчивости в пограничном слое. А. И. Короткий [3] рассмотрел устойчивость плоского ламинарного пограничного слоя на упругой поверхности в предположении линейной связи между возмущением давления и нормальной деформацией поверхности. Бенджамин [4] и Ландал [5] исследовали устойчивость ламинарного пограничного слоя на поверхности мембранного типа в предположении, что физические характеристики поверхности зависят от длины волны возмущающего потока.

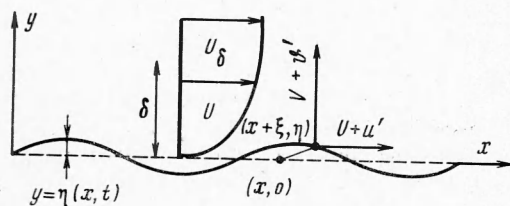
Ниже рассматривается устойчивость течения Блазиуса на поверхности типа мембраны, физические характеристики которой постоянны по длине.

Будем считать, что при отсутствии возмущений поверхность пластины совпадает с полуплоскостью  $x \geq 0, y = 0$  (фиг. 1). Предположим, что в определенный момент времени в потоке возникли некоторые возмущения. Исследуем устойчивость потока по отношению к этим возмущениям.

Пусть  $U, V$  ( $V \ll U$ ) — составляющие скорости течения Блазиуса по осям  $x, y$  соответственно,  $p$  — давление,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\rho$  — плотность жидкости. Скорости возмущений  $u', v'$  и возмущение давления  $p'$  будем считать малыми в том смысле, что членами, квадратичными относительно возмущений, можно пренебречь. Введем функцию тока  $\psi'$  возмущающего течения в виде

$$\psi' = \varphi(y) \exp [i \alpha(x-ct)] \quad (1)$$

предполагая при этом, что берется действительная часть



Фиг. 1

выражения (1). Волновое число  $\alpha$  — действительная величина, связанная с длиной волны возмущающего течения соотношением  $\alpha = 2\pi/\lambda$ . Фазовая скорость  $c = c_r + ic_i$  — комплексная величина. Знак мнимой части  $c_i$  показывает, будет ли возмущение возрастать ( $c_i > 0$ ) или затухать ( $c_i < 0$ ). В формуле (1), как и ниже, употреблены безразмерные величины. В качестве масштаба скоростей принята скорость  $U_\delta$  на внешней границе пограничного слоя, а в качестве масштаба длин — толщина пограничного слоя

$$\delta = 6 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\delta}}$$

Основной интерес представляет нейтральная кривая  $c_i = 0$ , отделяющая область нарастающих возмущений от области затухающих возмущений. По виду этой кривой определяется число Рейнольдса потери устойчивости. Построение кривой нейтральной устойчивости производится на

основе решения уравнения Орра — Зоммерфельда для амплитуды  $\varphi$  функции тока возмущающего течения [6]

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = \frac{1}{\alpha i R} (\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi) \quad (2)$$

где

$$R = \frac{\delta U_\xi}{v}, \quad U = 2y - 5y^4 + 6y^5 - 2y^6$$

Граничные условия для уравнения (2) выражают условия затухания возмущений на бесконечности и условия прилипания. Условия на бесконечности имеют вид [6]

$$\varphi' + \alpha\varphi = 0, \quad |\varphi| < \infty \quad (3)$$

Условия прилипания выражают равенство скорости элемента поверхности и частицы жидкости, примыкающей к поверхности (фиг. 1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} &= U(x + \xi, \eta) + u'(x + \xi, \eta) \\ \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} &= V(x + \xi, \eta) + v'(x + \xi, \eta) \end{aligned} \quad (4)$$

Положим

$$\xi(x, t) = \xi_1 e^{i\alpha(x-ct)}, \quad \eta(x, t) = \eta_1 e^{i\alpha(x-ct)} \quad (5)$$

Подставляя равенство (5) в (4), разлагая правые части последних в ряд Тейлора и учитывая малость деформаций и скорости  $V$ , получаем

$$\xi_1 = \frac{i}{\alpha c} \left[ \frac{U'(0)\varphi(0)}{c} + \varphi'(0) \right], \quad \eta_1 = \frac{\varphi(0)}{c} \quad (6)$$

Для дальнейших вычислений удобно ввести нормальную  $Y_0$  и тангенциальную  $X_0$  податливости потока по отношению к бегущей волне. Нормальная (тангенциальная) податливость определяется с точностью до знака отношением нормальной (тангенциальной) скорости к возмущению давления  $p' = p_1 \exp[i\alpha(x-ct)]$ , т. е.

$$\begin{aligned} Y_0 &= - \frac{V(x + \xi, \eta) + v'(x + \xi, \eta)}{p'(x + \xi, \eta)} \\ X_0 &= \frac{U(x + \xi, \eta) + u'(x + \xi, \eta)}{p'(x + \xi, \eta)} \end{aligned}$$

что с точностью до малых первого порядка можно записать так:

$$Y_0 = \frac{i\alpha\varphi(0)}{p_1(0)}, \quad X_0 = \frac{1}{p_1(0)} \left[ \frac{\varphi(0)}{c} U'(0) + \varphi'(0) \right] \quad (7)$$

Амплитуда  $p_1$  возмущения давления определяется из линеаризованных уравнений движения вязкой жидкости в проекциях на оси  $x$  и  $y$  соответственно

$$p_1 = \frac{1}{i\alpha R} [\varphi'''(0) - \alpha^2\varphi'(0)] + c\varphi'(0) + U'(0)\varphi(0) \quad (8)$$

или

$$p_1 = - \int_0^\infty \left[ \frac{\alpha}{iR} (\varphi'' - \alpha^2\varphi) - \alpha^2(U - c)\varphi \right] dy \quad (9)$$

Тождественность выражений (8) и (9) следует из уравнения (2).

Аналогичным образом вводятся тангенциальная  $Y_{12}$  и нормальная  $Y_{11}$  податливости деформируемой поверхности по отношению к бегущей волне

$$Y_{12} = \frac{1}{p'} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad Y_{11} = - \frac{1}{p'} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

что с точностью до малых первого порядка запишется в виде

$$Y_{12} = -\frac{i\alpha c \xi_1}{p_1}, \quad Y_{11} = \frac{i\alpha c \eta_1}{p_1} \quad (10)$$

Равенства

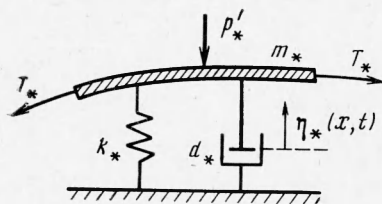
$$Y_0 = Y_{11}, \quad X_0 = Y_{12} \quad (11)$$

дают граничные условия на деформируемой поверхности.

Как показывают расчеты, тангенциальная податливость оказывает слабое влияние на положение точки потери

устойчивости и ее можно считать равной нулю.

Для определения нормальной податливости  $Y_{11}$ , зависящей от  $\eta_1$ , рассмотрим движение элемента мембраны (фиг. 2)



Фиг. 2

$$m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -p' - k\eta + T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - d \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (12)$$

$$m = \frac{m_*}{\rho \delta} = \frac{k_* m}{R}, \quad p' = \frac{p'_*}{\rho U \delta^2}, \quad k = \frac{k_* \delta}{\rho U \delta^2}$$

$$T = \frac{T_*}{\delta \rho U \delta^2}, \quad d = \frac{d_*}{\rho U \delta}$$

Здесь  $m_*$  — масса единицы площади мембраны,  $T_*$  — поверхностное натяжение, приходящееся на единицу ширины мембраны,  $k_*$  — коэффициент жесткости. Звездочками отмечены размерные величины.

Учитывая (5), из уравнения (12) находим отношение  $\eta_1/p_1$ , подставляя которое в (10) получаем

$$Y_{11} = -\frac{i\alpha c}{m\alpha^2(c_0^2 - c^2 - cid/m\alpha)} \quad (13)$$

где

$$c_0^2 = c_{0m}^2 + \frac{\omega_0^2}{\alpha^2}, \quad c_{0m}^2 = \frac{T}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} = k\omega^2 R^2$$

Приближенное решение уравнения (2) можно представить в виде

$$\varphi = \Phi + A\varphi_3 \quad (14)$$

В этом уравнении  $\Phi$  — «невязкое» решение, удовлетворяющее уравнению

$$(U - c)(\Phi'' - \alpha^2\Phi) - U''\Phi = 0 \quad (15)$$

а  $\varphi_3$  — приближенное «вязкое» решение (2), удовлетворяющее уравнению [6]

$$\frac{d^4\varphi_3}{d\eta^4} - i\eta_2 \frac{d^2\varphi_3}{d\eta^2} = 0, \quad \eta_2 = \frac{y - y_c}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = (\alpha R U_c')^{-1/2} \quad (16)$$

Здесь  $y_c$  — значение  $y$ , при котором  $U = c$ .

Решения  $\Phi$  и  $\varphi_3$  удовлетворяют граничным условиям (3). Граничные условия (11) и условия нетривиальности решения приводят к характеристическому уравнению, связывающему величины  $\alpha$ ,  $c$ ,  $R$  с параметрами деформируемой поверхности. Прежде чем записать это уравнение, упростим выражение для амплитуды давления  $p_1$ , входящей в (11), пренебрегая малыми по величине членами. Согласно (8) и (14) можем записать

$$p_1 = \frac{\Phi'''(0) - \alpha^2\Phi'(0)}{i\alpha R} + A \frac{\varphi_3'''(0) - \alpha^2\varphi_3'(0)}{i\alpha R} + c\varphi'(0) + U''(0)\varphi(0) \quad (17)$$

Так как невязкое решение изменяется медленно, то первым членом правой части (17) можно пренебречь. В случае течения Блазиуса этот член в точности равен нулю, что следует из уравнения (15) после его дифференцирования по  $y$ . Сумма третьего и четвертого членов правой части (17) согласно (6) и (10) равна  $cY_{12}p_1$  и ею также можно пренебречь. С целью дальнейших упрощений формулы (17) найдем  $\varphi_3'''(0)$  из уравнения (16) путем его почленного интегрирования по  $y$

$$\varphi_3'''(0) = -i\alpha R y_c U_c' \varphi_3'(0) \left[ 1 + \frac{\varphi_3(0)}{y_c \varphi_3'(0)} \right] \quad (18)$$

Из формулы (18) вытекает, что  $|\varphi_3'''(0)| \gg |\varphi_3'(0)|$ . Поэтому, учитывая также, что  $U_c' \approx U'(0)$ ,  $y_c U_c' \approx c$  и используя (7) и (11), окончательно находим

$$p_1(0) = U'(0)\Phi(0) + c\Phi'(0) \quad (19)$$

С точностью до членов  $R^{-1/3}$  идентичное выражение получается также и путем преобразования формулы (9). Приведенные выше рассуждения опровергают утверждение Ландала [6] о том, что линеаризованное уравнение движения в проекции на ось  $y$  дает более точное выражение для возмущения давления, чем линеаризованное уравнение движения в проекции на ось  $x$ .

Используя полученное выражение для  $p_1$ , можем характеристическое уравнение записать в виде

$$\{Y_{11} [U'(0)\Phi(0) + c\Phi'(0)] - i\alpha\Phi(0)\} [U'(0)\varphi_3(0) + c\varphi_3'(0)] = -i\alpha\varphi_3(0) [U'(0)\Phi(0) + c\Phi'(0)] \quad (20)$$

Упростим выражение (20). Введем следующие обозначения:

$$z = c \left( \frac{\alpha R}{[U'(0)]^2} \right)^{1/3}, \quad u + iv = \left[ 1 + \frac{iU'(0)\Phi(0)}{c\Phi'(0)} \right]^{-1} \quad (21)$$

$$\frac{U'(0)\varphi_3(0)}{c\varphi_3'(0)} = -F(z), \quad F^*(z) = \frac{1}{1-F(z)}$$

Здесь  $F(z)$  — функция Титенса, таблицы которой содержатся в [6]. В обозначениях (21) уравнение (20) после несложных преобразований представится в виде

$$F^*(z) = u + iv + \frac{U'(0)Y_{11}}{i\alpha} \quad (22)$$

Функция  $\Phi$ , через которую выражается  $u + iv$ , определяется из решения уравнения (15). Представляя это решение в виде ряда по степеням  $\alpha^2$  и ограничиваясь главными членами, получаем [6]

$$u + iv = cU'(0) \left[ \frac{1}{\alpha(1-c)^2} + \omega \right], \quad \omega = \frac{1}{cU'(0)} + K(c)$$

$$K(c) = \int_0^1 \frac{dy}{(U-c)^2} = -\frac{1}{cU_c'} + \frac{U_c'' \ln c}{(U_c')^3} - \frac{U_c''' \pi i}{(U_c')^3} + \dots \quad (23)$$

Подставим в (22) значение  $Y_{11}$  по (13) и отделим действительную и мнимую части. Тогда найдем

$$F_r^* = u - \frac{mU'(0)(c_0^2/c - c)}{d^2 + m^2\alpha^2(c_0^2/c - c)^2}$$

$$F_i^* = v - \frac{U'(0)d}{\alpha[d^2 + m^2\alpha^2(c_0^2/c - c)^2]} \quad (24)$$

где  $F_r^*$  и  $F_i^*$  — соответственно действительная и мнимая части функции  $F^*(z)$ .

Заметим, что иногда связью между давлением и деформацией задаются в виде [3]

$$\eta = p' K_1 e^{i\theta}$$

т. е. согласно (10) полагают

$$Y_{11} = i\alpha c K_1 e^{i\theta}$$

и не рассматривают конкретный вид деформируемой поверхности. При этом коэффициент  $K_1$  и сдвиг фаз  $\theta$  между давлением и деформацией счита-

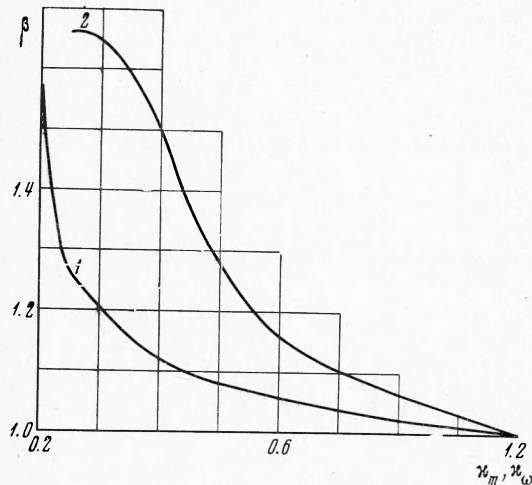
ют характерными постоянными деформируемой поверхности. Из (13) нетрудно видеть, что для принятой здесь модели деформируемой поверхности

$$K_1 = \{[m\alpha^2 (c_0^2 - c^2)]^2 + d^2 c^2 \alpha^2\}^{-1/2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = - \frac{d c \alpha}{m \alpha^2 (c^2 - c_0^2)}$$

т. е.  $K_1$  и  $\theta$  зависят от физических параметров волны возмущения и параметров деформируемой поверхности.

На основании изложенного выше построение кривой нейтральной устойчивости при фиксированных параметрах деформируемой поверхности может быть выполнено в следующей последова-



Фиг. 3

тельности. Для каждого  $z$  по таблицам находят  $F_r^*$  и  $F_i^*$ , по формулам (24) и (21) определяют  $\alpha$  и  $c$  и по (21) вычисляют соответствующее значение числа  $R$ . Числу  $R$  потери устойчивости соответствуют  $z = 3.21$ ,  $F_i^* = 0.58$ ,  $F_r^* = 1.49$ .

Результаты расчетов чисел  $R$  потери устойчивости приведены на фиг. 3. Кривая 1 изображает зависимость  $\beta = R/R_1$  от параметра массы  $\chi_m = k_m/k_{m1}$  при  $c_{0m} = 0.75$ ,  $k_{\omega} = 4.56 \cdot 10^{-5}$ ,  $d = 0.1$ ,  $k_{m1} = 1.8 \cdot 10^4$ . Число  $R_1$  соответствует числу  $R$  при  $k_m = k_{m1}$ , мало отличающемуся от числа  $R$  для жесткой поверхности. Кривая 2 дает зависимость  $\beta$  от  $\chi_{\omega} = k_{\omega}/k_{\omega_1}$ , при  $\chi_m = 0.4$ ,  $c_{0m} = 0.75$ ,  $d = 0.1$ ,  $k_{\omega_1} = 7.4 \cdot 10^{-4}$ . Необходимо отметить, что в приведенных расчетах значения  $c_{0m}$  и  $d$  были выбраны более или менее произвольно.

Поступила 13 V 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер М. О. Boundary layer stabilization by distributed damping. J. Amer. Soc. Naval Engrs., 1960, vol. 72, No. 1.
2. Крамер М. О. Boundary layer stabilization by distributed damping. Naval Engrs. J., 1962, vol. 74, No. 2.
3. Короткин А. И. Устойчивость ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости на упругой поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
4. Бенджамин Т. В. Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, pt. 4.
5. Ландау М. Т. On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, pt. 4.
6. Линь Цзя-уэяо Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.