

ПОЛЕ ДАВЛЕНИЙ ОТ РАВНОМЕРНО НАГРУЖЕННОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО КРЫЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

УДК 533.69

Н. Ф. Воробьев

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

В аэродинамике крыла различают две задачи: прямую — нахождение поля газодинамических параметров течения по заданной геометрии крыла, обратную — определение поля параметров течения по заданной нагрузке на крыле. Для тонкого крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке [1–3] в линейной постановке решение прямой задачи представляется в виде потенциала

$$\Phi_1(x, y, z) = -\frac{1}{\pi} \iint_s \frac{\Phi'_\eta(\xi, \zeta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 - [(z - \zeta)^2 + y^2]}} ds, \quad (1)$$

обратной — в виде потенциала

$$\Phi(x, y, z) = \frac{y}{\pi} \iint_s \frac{\Phi'_\xi(\xi, \zeta)(x - \xi)}{[(z - \zeta)^2 + y^2]\sqrt{(x - \xi)^2 - [(z - \zeta)^2 + y^2]}} ds. \quad (2)$$

Здесь s — область зависимости точки $P(x, y, z)$ на базовой плоскости $\eta = 0$; $\Phi'_\eta(\xi, \zeta)$, $\Phi'_\xi(\xi, \zeta)$ — скос потока, перепад давления на плоскости $\eta = 0$ соответственно; (x, y, z) — координаты точки P в прямоугольной декартовой системе координат, связанной с физической прямоугольной системой координат соотношениями $x_1 = \sqrt{M^2 - 1} x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$. Область зависимости s ограничена линией L пересечения характеристического конуса с вершиной в точке P с плоскостью $\eta = 0$:

$$(x - \xi) - \sqrt{(z - \zeta)^2 + y^2} = 0. \quad (3)$$

Решению прямых задач аэродинамики, согласно формуле (1), с простым ядром посвящено большое количество работ. При решении задач в виде потенциала (2) имеют место трудности, связанные со сложной структурой ядра подынтегрального выражения и сильной сингулярностью при стремлении точки P на базовую плоскость ($y \rightarrow 0$) [4]*. При нахождении газодинамических параметров потока (производных потенциала скорости) степень подынтегральных особенностей возрастает, при этом иногда бывает невозможно проведение формальных операций дифференцирования, а иногда дифференцирование приводит к появлению таких особенностей, при которых интегралы становятся расходящимися. Часто используется прием признания существования интегралов в смысле Адамара [2]. Введение такой символики вносит не только осложнение в реализацию алгоритма решения, но и требует иногда признания физически абсурдных результатов. Однако при строгом учете характера особенностей ядер интегральных операторов, а также при некоторых условиях гладкости, накладываемых на определяющие параметры задачи, возможно представление газодинамических параметров потока в классе ограниченных функций [3, 4].

В данной работе представлены в элементарных функциях формулы, определяющие поле давлений (наиболее наглядную газодинамическую характеристику потока) от равномерно нагруженного крыла прямоугольной формы в плане. Этот результат, имеющий самостоятельный интерес (поле давлений, индуцированное некоторым прямоугольным эле-

*В [4] на рисунке следует поменять местами обозначения осей координат y, η и z, ζ .

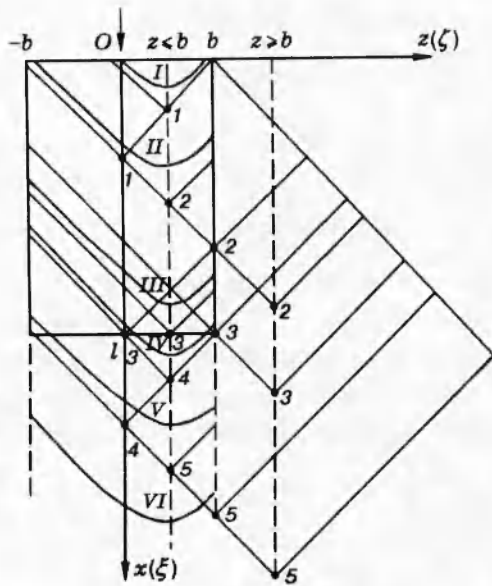


Рис. 1

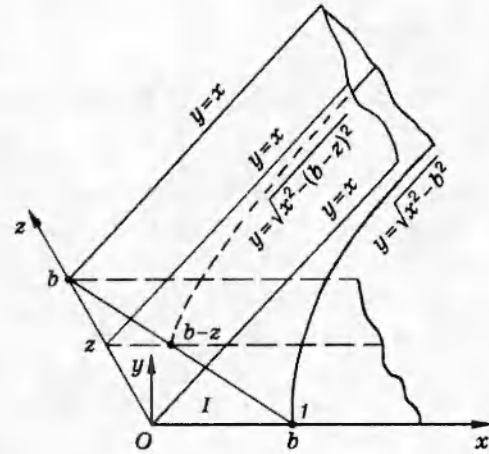


Рис. 2

ментом летательного аппарата), можно использовать при реализации алгоритма решения обратных задач для крыла сложной формы в плане, когда проекция крыла на базовую плоскость разбивается на прямоугольные ячейки, а также в качестве теста при численных расчетах. Ввиду сложности и громоздкости необходимых для решения задачи операций дифференцирования и интегрирования они не приводятся.

Крыло прямоугольной формы в плане размаха $2b$ и длиной l ($l \geq 2b$) обтекается сверхзвуковым потоком. На рис. 1 показаны следы конусов зависимости точек $P(x, y, z)$ на плоскости $\eta = 0$. Можно выделить характерные области, где решение имеет вид, присущий этой области.

Для точек, лежащих в плоскости $z = \text{const}$, $0 < z < b$, имеют место шесть характерных областей решения.

Область I: к ней относятся точки $P(x, y, z)$, след L конуса которых (гипербола (3)) пересекает переднюю кромку крыла $\xi = 0$ два раза, не пересекая боковых кромок.

Область II: гипербола L пересекает переднюю кромку $\xi = 0$ и боковую кромку $\zeta = b$.

Область III: гипербола L пересекает боковые кромки $\zeta = -b$ и $\zeta = b$, не пересекая переднюю и заднюю.

Область IV: гипербола L дважды пересекает заднюю кромку $\xi = l$ и один раз боковые кромки $\zeta = -b$ и $\zeta = b$.

Область V: гипербола L один раз пересекает заднюю кромку $\xi = l$ и боковую кромку $\zeta = -b$.

Область VI: гипербола L не пересекает проекцию крыла, эта область простирается неограниченно вниз по потоку.

На рис. 1 в плоскости $z = \text{const}$ ($0 < z < b$) точки 1-5 являются граничными (вниз по потоку) для точек $P(x, y = 0, z)$ областей I-V. Для точек $P(x, y = 0, z)$ гипербола L вырождается в характеристические линии, исходящие из точек 1-5.

Для точек $P(x, y, z)$, лежащих в плоскости симметрии $z = 0$, отсутствуют области II, V. Для точек $P(x, y, z)$, лежащих в плоскости боковой кромки $z = b$, область I вырождается в линию $y = x$ (в точку $x = 0, y = 0$ на плоскости $\eta = 0$), отсутствует область IV. Для точек $P(x, y, z)$, лежащих в плоскости $z = \text{const}$, $z > b$, существуют области II, III, V, VI.

На рис. 2 в изометрии показана область I, расположенная над правой половиной

крыла. Она ограничена головной характеристической плоскостью $y = x$ и поверхностью $y = \sqrt{x^2 - (b - z)^2}$. В плоскости $z = b$ область I вырождается в характеристическую линию $y = x$. На больших расстояниях от крыла ($x \geq y \geq H \gg l \geq b$) поверхность $y = \sqrt{x^2 - (b - z)^2}$ асимптотически приближается к головной характеристической плоскости $y = x$.

На рис. 3 схематично изображены сечения областей I - VI плоскостью симметрии $z = 0$. Характеристика $y = x$ разделяет область невозмущенного потока и область I . Линия $y = \sqrt{x^2 - b^2}$ — граница областей I, III . Характеристика $y = x - l$ — граница областей III, IV . Линия $y = \sqrt{(x - l)^2 - b^2}$ — граница областей IV, VI .

Для равномерно нагруженного ($\Psi'_z(\xi, \zeta) = p_0$) прямоугольного крыла после проведения необходимых громоздких операций интегрирования и дифференцирования [3, 4] поле давлений представляется в элементарных функциях. Введя функцию

$$\arcsin \left\{ 1 - 2y^2 \frac{(x - \xi)^2 - [(z - \zeta)^2 + y^2]}{[(x - \xi)^2 - y^2][(z - \zeta)^2 + y^2]} \right\} = \text{arc}(\xi, \zeta), \quad (4)$$

запишем полученные значения $\Phi'_x(x, y, z)$ в областях I - VI .

Решение в плоскости $z = \text{const}$, $0 \leq z \leq b$:

$$\begin{aligned} \Phi'_x &= p_0, & y \leq x \leq \sqrt{(z - b)^2 + y^2} & \quad (\text{область } I), \\ \Phi'_x &= \frac{p_0}{2\pi} \left[\frac{3}{2} \pi + \text{arc}(0, b) \right], & \sqrt{(z - b)^2 + y^2} \leq x \leq \sqrt{(z + b)^2 + y^2} & \quad (\text{область } II), \\ \Phi'_x &= \frac{p_0}{2\pi} \left[\pi + \text{arc}(0, b) + \text{arc}(0, -b) \right], & \sqrt{(z + b)^2 + y^2} \leq x \leq (l + y) & \quad (\text{область } III), \\ \Phi'_x &= \frac{p_0}{2\pi} \left[-\pi + \text{arc}(0, b) + \text{arc}(0, -b) \right], & (l + y) \leq x \leq l + \sqrt{(z - b)^2 + y^2} & \quad (\text{область } IV), \\ \Phi'_x &= \frac{p_0}{2\pi} \left[-\frac{\pi}{2} + \text{arc}(0, b) + \text{arc}(0, -b) - \text{arc}(l, b) \right], \\ & & l + \sqrt{(z - b)^2 + y^2} \leq x \leq l + \sqrt{(z + b)^2 + y^2} & \quad (\text{область } V), \\ \Phi'_x &= \frac{p_0}{2\pi} \left[\text{arc}(0, b) + \text{arc}(0, -b) - \text{arc}(l, b) - \text{arc}(l, -b) \right], \\ & & x \geq l + \sqrt{(z + b)^2 + y^2} & \quad (\text{область } VI). \end{aligned}$$

Решение в плоскости $z = \text{const}$, $z \geq b$:

$$\begin{aligned} \Phi'_x &= \frac{p_0}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \text{arc}(0, b) \right], & \sqrt{(z - b)^2 + y^2} \leq x \leq \sqrt{(z + b)^2 + y^2} & \quad (\text{область } II), \\ \Phi'_x &= \frac{p_0}{2\pi} \left[\text{arc}(0, -b) - \text{arc}(0, b) \right], & \sqrt{(z + b)^2 + y^2} \leq x \leq l + \sqrt{(z - b)^2 + y^2} & \quad (\text{область } III), \\ \Phi'_x &= \frac{p_0}{2\pi} \left[-\frac{\pi}{2} + \text{arc}(0, -b) - \text{arc}(0, b) + \text{arc}(l, b) \right], \\ & & l + \sqrt{(z - b)^2 + y^2} \leq x \leq l + \sqrt{(z + b)^2 + y^2} & \quad (\text{область } V), \\ \Phi'_x &= \frac{p_0}{2\pi} \left[\text{arc}(l, b) - \text{arc}(l, -b) - \text{arc}(0, b) + \text{arc}(0, -b) \right], \\ & & x \geq l + \sqrt{(z + b)^2 + y^2} & \quad (\text{область } VI). \end{aligned}$$

Границы областей решения — поверхности в возмущенной части пространства.

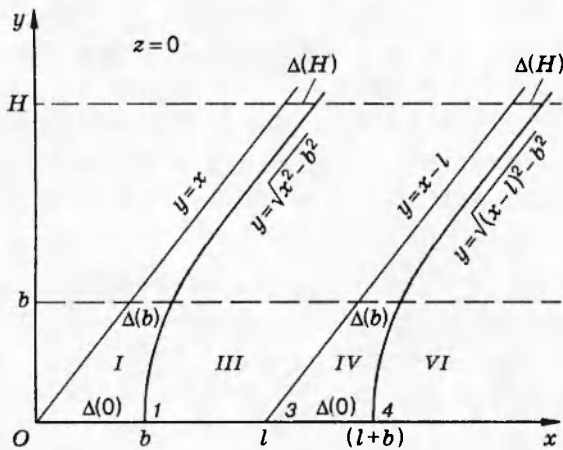


Рис. 3

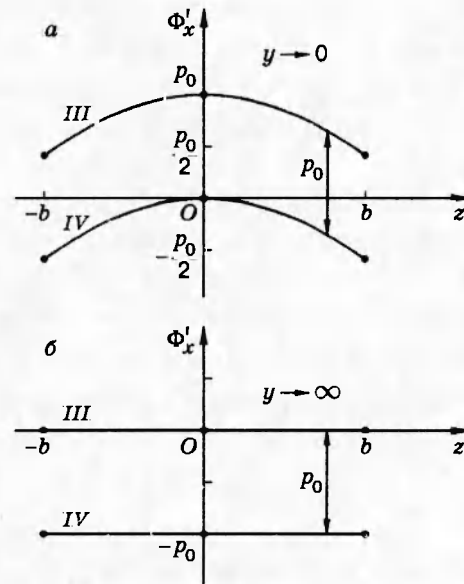


Рис. 4

В приведенных решениях $\text{arc}(0, b)$, $\text{arc}(0, -b)$, $\text{arc}(l, b)$, $\text{arc}(l, -b)$ — значения функции (4) в точках $(\xi = 0, \zeta = b)$, $(\xi = 0, \zeta = -b)$, $(\xi = l, \zeta = b)$, $(\xi = l, \zeta = -b)$ соответственно. Причем для точек $P(x, y = 0, z)$, лежащих на базовой плоскости, $\text{arc}(0, \pm b) = \text{arc}(l, \pm b) = \pi/2$. Для точек $P(x, y, z = 0)$ в плоскости симметрии крыла $\text{arc}(0, b) = \text{arc}(0, -b)$, $\text{arc}(l, b) = \text{arc}(l, -b)$. Для точек $P(x, y, z = b)$ в плоскости правой боковой кромки $\text{arc}(0, b) = \text{arc}(l, b) = -\pi/2$. Кроме того, на границах областей I–VI имеют место следующие равенства: $\text{arc}(0, b) = \pi/2$ на границе областей I, II (на поверхности $x = \sqrt{(z-b)^2 + y^2}$); $\text{arc}(0, -b) = \pi/2$ — II, III ($x = \sqrt{(z+b)^2 + y^2}$); $\text{arc}(l, b) = \pi/2$ — IV, V ($x = l + \sqrt{(z-b)^2 + y^2}$); $\text{arc}(l, -b) = \pi/2$ — V, VI ($x = l + \sqrt{(z+b)^2 + y^2}$).

С учетом отмеченных свойств функции (4) можно довольно наглядно проанализировать картину поля давлений, полученного согласно решениям в областях I–VI.

На базовой плоскости $y = 0$ перепад давления $\Phi'_x = 0$ везде вне проекции крыла S . На проекции S , как и должно быть, $\Phi'_x = p_0$.

В плоскости $z = b$ решение не терпит разрыва. Решение при $z \leq b$ непрерывно переходит в решение при $z \geq b$, склейка решений происходит в областях II, III, V, VI.

При $|z| \leq b$ на границах областей I, II; II, III; IV, V; V, VI решение не терпит разрыва. Решение терпит разрыв на границе областей III, IV.

При $z \geq b$ решение одной области непрерывно переходит в решение соседней области (с учетом того, что при $z = b$ области I, VI вырождаются соответственно в характеристические линии $y = x$, $y = x - l$).

Граница областей III, IV — характеристическая плоскость $y = x - l$, проходящая через заднюю кромку крыла $\xi = l$. Величина разрыва на всей плоскости $y = x - l$ постоянна: $[\Phi'_x(III) - \Phi'_x(IV)] = p_0$. Но в отличие от постоянной величины разрыва p_0 на головной характеристической плоскости, являющейся границей между невозмущенным потоком и областью I, когда всюду перед поверхностью разрыва давление равно нулю, а за поверхностью разрыва постоянное, равное p_0 , на «хвостовой» характеристической плоскости давление — переменная величина с обеих ее сторон.

На рис. 4 приведены графики изменения Φ'_x вдоль размаха крыла на характеристической плоскости $y = x - l$ со стороны области III (линии III) и со стороны области IV

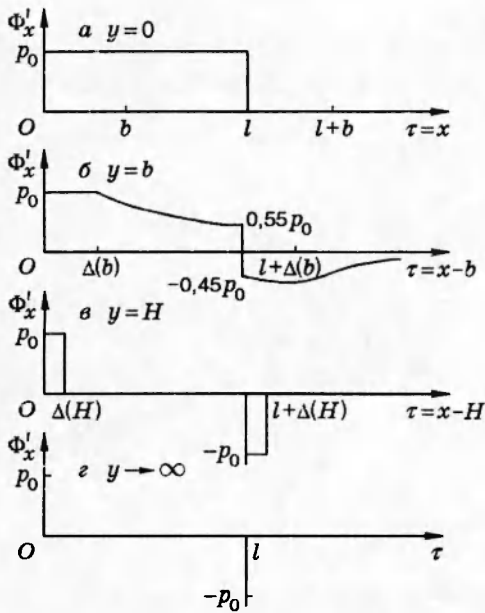


Рис. 5

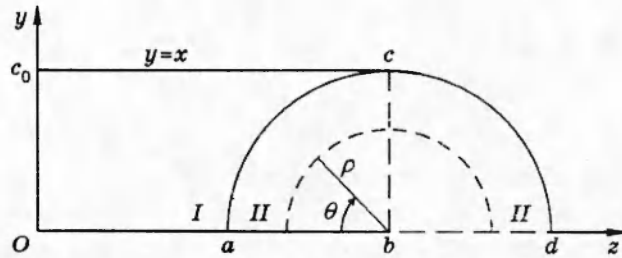


Рис. 6

(линии IV). Вблизи базовой плоскости ($y \rightarrow 0$, рис. 4,а) Φ'_x изменяется со стороны области III от значения p_0 в плоскости симметрии $z = 0$ до $p_0/2$ в плоскости боковой кромки крыла, а со стороны области IV соответственно от нуля до $-p_0/2$. Перепад давления везде одинаков и равен p_0 . На большом удалении от базовой плоскости ($y \rightarrow \infty$, рис. 4,б) с точностью до малых второго порядка $\Phi'_x = 0$ со стороны области III и $\Phi'_x = -p_0$ со стороны области IV. Опять перепад давления равен p_0 вдоль всего размаха.

Проанализируем картину распределения Φ'_x в плоскости симметрии крыла $z = 0$. Схема течения в этой плоскости представлена на рис. 3. Выделим несколько сечений $y = y^* = \text{const}$: $O, b, H \gg l \geq b, \infty$. Протяженность областей I, IV в этих сечениях $\Delta(y) = \sqrt{b^2 + y^2} - y$. Для выбранных сечений $\Delta(0) = b$, $\Delta(b) = (\sqrt{2} - 1)b$, $\Delta(H) = b^2/2H$ (с точностью до малых второго порядка), $\Delta(\infty) = 0$ (области I, IV асимптотически вырождаются в характеристические линии $y = x$, $y = x - l$ соответственно). В сечении $y^* = 0$ (рис. 5,а), как и следует из постановки задачи, $\Phi'_x = p_0$ на крыле ($\tau \leq l$) и $\Phi'_x = 0$ в следе за крылом ($\tau > l$).

На рис. 5 введена новая переменная $\tau = x - y^*$. В новых переменных во всех сечениях $\tau = 0$ соответствует головной характеристической линии $y = x$, а $\tau = l$ — характеристической линии $y = x - l$. Как видно из рис. 5,а-г, во всех сечениях $y = y^*$ на характеристической линии $y = x - l$ величина Φ'_x претерпевает скачок $[\Phi'_x(III) - \Phi'_x(IV)] = p_0$, что уже отмечалось выше при анализе рис. 4. В сечении $y^* = b$ (рис. 5,б) протяженность области постоянного давления уменьшилась до значения $(\sqrt{2} - 1)b$, после чего Φ'_x непрерывно убывает до значения $0,55 p_0$ на характеристике $y = x - l$, где претерпевает скачок p_0 . После скачка $\Phi'_x < 0$, убывая по абсолютной величине, асимптотически стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. На больших расстояниях от крыла ($y^* = H \gg l \geq b$, рис. 5,в) возмущения от крыла S с точностью до малых второго порядка сосредоточены в узких областях I, IV протяженности $\Delta(H)$, где $\Phi'_x = p_0$. Результаты, представленные на рис. 5,в, можно трактовать как характеристики звукового удара в плоскости симметрии прямоугольного крыла размаха $2b$: головной скачок давления интенсивности p_0 , хвостовой скачок разрежения интенсивности $-p_0$, протяженность скачков $\Delta(H) = b^2/2H$. На очень больших расстояниях ($y \rightarrow \infty$, рис. 5,г) протяженность $\Delta(\infty) \rightarrow 0$, области I, IV вырождаются в линии $y = x$,

$y = x - l$, на которых Φ'_x претерпевает разрыв p_0 .

Проанализируем картину распределения Φ'_x в плоскости $x = \text{const}$, проходящей через области I, II (зона концевго эффекта). В области II решение записывается в виде

$$\Phi'_x = \frac{p_0}{2\pi} \left[\frac{3}{2}\pi + \arcsin(0, b) \right] \quad \text{для } z \leq b; \quad (5)$$

$$\Phi'_x = \frac{p_0}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(0, b) \right] \quad \text{для } z \geq b. \quad (6)$$

На рис. 6 изображено сечение возмущенной области плоскостью $x = \text{const}$. Линия Ob — след правой половины прямоугольного крыла, c_0cd — головной характеристической поверхности (c_0c — характеристической плоскости $y = x$). След области I — четырехугольник Oc_0caO , области II — полукруг $acdba$ радиуса x .

Запишем выражение $\arcsin(0, b)$ в развернутом виде:

$$\arcsin(0, b) = \arcsin \left\{ 1 - 2y^2 \frac{x^2 - [(z-b)^2 + y^2]}{(x^2 - y^2)[(z-b)^2 + y^2]} \right\}.$$

Сделаем замену переменных $y = \rho \sin \theta$, $(b - z) = \rho \cos \theta$; направление отсчета угла θ показано на рис. 6. Согласно сделанной замене переменных, $[(z-b)^2 + y^2] = \rho^2$, тогда

$$\arcsin(0, b) = \arcsin \left\{ 1 - 2 \sin^2 \theta \frac{x^2 - \rho^2}{x^2 - \rho^2 \sin^2 \theta} \right\}. \quad (7)$$

Решение для $z \leq b$ (равенства (5), (7)). На границе областей I, II (на окружности ac , когда $\rho = x$) $\Phi'_x = p_0$; решение области I непрерывно переходит в решение области II (этот результат уже отмечался выше при общем анализе течения). На базовой плоскости $y = 0$ (на отрезке ab следа крыла, когда $\theta = 0$) $\Phi'_x = p_0$, что согласуется с условиями при постановке задачи. В плоскости боковой кромки $z = b$ (когда $\theta = \pi/2$) $\Phi'_x = p_0/2$.

Решение для $z \geq b$ (равенства (6), (7)). В плоскости боковой кромки $z = b$ (когда $\theta = \pi/2$) решение не терпит разрыва (этот результат отмечался выше). Для точек $z \geq b$ на щели базовой плоскости (на отрезке bd , когда $\theta = \pi$) $\Phi'_x = 0$, что также согласуется с условиями постановки задачи. Для точек, лежащих на дифрагирующем участке головной характеристической поверхности (на окружности cd , когда $\rho = x$), $\Phi'_x = 0$, что соответствует общепринятым граничным условиям в линейной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.: Гостехтеоретиздат, 1952.
2. Общая теория аэродинамики больших скоростей / Ред. У. Р. Сирс. М.: Воениздат, 1962.
3. Воробьев Н. Ф. Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке. Новосибирск: Наука, 1985.
4. Воробьев Н. Ф. Особенности решений задач аэродинамики крыла конечного размаха // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 3. С. 55–66.

Поступила в редакцию 25/XII 1995 г.