ПМТФ, № 4, 1967

ОБ УРАВНЕНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ. ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОЦЕССА ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА

А. Т. Онуфриев

(Новосибирск)

За последние несколько лет появился ряд экспериментальных работ [1–5], в которых показано, что существуют такие случаи турбулентного течения с несимметричным распределением скорости потока, для которых в том месте потока, где производная скорости равна нулю, напряжение турбулентного трения не равно нулю. В связи с этим ставится вопрос о связи тензора рейнольдсовых напряжений с характеристиками осредненного потока. Соотношения, принятые в обычной теории пути смешения, связывают величину напряжения трения с местным значением производной скорости потока и не согласуются с указанными экспериментальными данными. Эти соотношения основаны на предположении о малости величины пути смешения по сравнению с характерным размером потока. Опыт показывает, что это предположение не оправдывается [6].

Таким образом, турбулентная диффузия относится к случаю диффузии с большой средней длиной свободного пробега. И, наряду с понятием «градиентной диффузии», применяется понятие «объемной конвекции» [7–9] или «интегральной диффузии» [10], под которыми понимается такой механизм переноса, в котором величина напряжения трения не выражается через градиент скорости. Было предложено обобщение теории пути смешения [11–14], основанное на использовании простейшего кинетического уравнения, привлекавшегося при рассмотрении вопросов турбулентного переноса в работе [8], которое встречается при рассмотрении вопросов переноса в газах, при диффузии нейтронов и при переносе энергии излучением.

Предложенное обобщение теории пути смешения использует аналогию с указанными процессами и позволяет построить формулы, справедливые при больших значениях длины пробега. При малых значениях длины пробега из полученных зависимостей следуют соотношения для процесса диффузии в сплошной среде, и, в частности, соотношения теории пути смешения Прандтля. Модель интегральной диффузии — феноменологическая полуэмпирическая теория, в которой используются эмпирические постоянные и ряд гипотез, обычных для теории пути смешения. Самый общий анализ выражения для напряжения трения позволяет сделать вывод, что при несимметрии потока на протяжении, сравнимом с величиной «пути смешения», точки, в которых равны нулю производная скорости и напряжение турбулентного трения, не совпадают [12]. Поэтому можно надеяться, что модель интегральной диффузии позволит рассмотреть указанные вначале вопросы, которые вызывают затруднение для обычной теории пути смешения. Рассматривается несжимаемый турбулентный поток.

1. Уравнения. Гидродинамические поля раскладываются на их средние значения и пульсации. Статистические характеристики полей связаны соотношениями, полученными осреднением уравнений гидродинамики вязкой жидкости. Для несжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил уравнения неразрывности и движения имеют вид (см., например, [15])

$$\partial \rho U_\alpha / \partial x_\alpha = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho \frac{d}{dt} U_i + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} P_{\alpha i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \langle P \rangle - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \langle \mathring{\sigma}_{i\alpha} \rangle \tag{1.2}$$

В уравнениях Рейнольдса появились компоненты тензора добавочных напряжений. Для новых неизвестных, величин напряжений Рейнольдса, могут быть получены уравнения, в частности уравнение баланса энергии пульсационного движения

$$\frac{d}{dt}E+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}q_\alpha+P_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}U_\beta=\left\langle p\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\right\rangle-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\langle pu_\alpha\rangle-\langle u_\beta\sigma_{\alpha\beta}\rangle\right)-\left\langle\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right\rangle \tag{1.3}$$

$$E={}^1/_2\,\rho\langle u_\alpha u_\alpha\rangle,\quad P_{\alpha\beta}=\rho\langle u_\alpha u_\beta\rangle,\quad q_\alpha={}^1/_2\,\rho\langle u_\alpha u_k u_k\rangle$$

Знак $\langle\ \rangle$ означает осреднение, σ_{ij}° — тензор вязких напряжений, σ_{ij} — то же для пульсационных составляющих скорости, $P_{\alpha\beta}$ — тензор добавочных напряжений, q_α — плотность потока энергии пульсационного движения. Получившаяся система незамкнута, так как величины добавочных напряжений не выражены через осредненные характеристики гидродинамического поля, и число неизвестных превышает число уравнений.

Если пренебречь полностью молекулярным движением, то останутся уравнения, характеризующие пульсационное турбулентное течение

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\rho U_\alpha=0,\quad \rho\frac{d}{dt}U_i+\frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}=0,\quad \frac{d}{dt}E+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}q_\alpha+P_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}U_\beta=0 \tag{1.4}$$

При сравнении системы уравнений (1.4), описывающей пульсационное турбулентное течение, с системой уравнений, описывающей движение газа [16], можно отметить их полную внешнюю аналогию. Эта аналогия подчеркнута в книге [17]. Величине относительной скорости теплового движения молекул сопоставляется скорость пульсаций турбулентного потока. Система уравнений, описывающая движение газа, замыкается установлением связи между тензором напряжений и вектором плотности потока энергии и характеристиками среднего движения после определения функции распределения. Можно предположить, что и при построении тензора турбулентных напряжений можно воспользоваться некоторыми методами, развитыми в кинетической теории газа.

Ниже излагается подход к построению соотношений для тензора дополнительных напряжений и плотности потока энергии пульсационного движения в феноменологической теории турбулентного переноса. В работах [11–14] модель турбулентного переноса строилась на основе физических соображений и соображений аналогии с переносом энергии излучением и переносом нейтронов, сразу используя макроскопические характеристики потока. Ниже эта модель переноса строится на основе использования функции распределения, удовлетворяющей кинетическому уравнению простого вида. Это уравнение обсуждалось и использовалось во многих задачах о течении разреженного газа [18–21]. Но система уравнений турбулентного движения жидкости (1.1), (1.2), (1.3) остается незамкнутой.

2. Описание модели переноса. Представление о процессе турбулентного переноса можно получить на основе огрубленной схемы. Полагается, что в каждой точке потока размер образований, вовлеченных в пульсационное движение, «молей», имеет некоторую характерную величину, и для характеристики интенсивности турбулентного перемешивания «молей» с окружающей средой можно ввести величину, аналогичную длине свободного пробега, «путь смешения».

Предполагается, что можно характеризовать распределение пульсаций по скоростям функцией распределения f, удовлетворяющей релаксационному уравнению, которое в стационарном случае имеет вид [20]

$$c_s\partial f\,/\,\partial s=A\,(f_0-f) \tag{2.1}$$

Первое слагаемое в правой части характеризует величину порождения молей в некоторой точке потока. Распределение этих молей по скоростям принимается имеющим вид нормального распределения

$$f_0=\frac{\rho}{(\pi h)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(c_k-U_k)^2}{h}\right)$$

Это соответствует предположению о локальном термодинамическом равновесии при рассмотрении процесса переноса энергии излучением.

Параметр h характеризует величину энергии пульсационного движения в этой точке

$$h = {}^2/_3 \langle C^2 \rangle = {}^4/_3 E / \rho$$

где C — скорость собственного движения в системе координат, перемещающейся со средней скоростью потока.

Уравнение (2.1) можно проинтегрировать вдоль направления s, и для безграничного потока получаем

$$f(M_0) = \int_0^\infty f_0(s)\, \Pi\left(0,\ s;\ \frac{c}{A}\right) \frac{A\, ds}{c} \tag{2.2}$$

$$\Pi\left(0,\ s;\ \frac{c}{A}\right) = \exp\left[-\tau\left(0,\ s;\ \frac{c}{A}\right)\right], \qquad \tau\left(0,\ s,\ \frac{c}{A}\right) = \int_0^s \frac{A\, ds}{c}$$

Здесь s — расстояние вдоль луча от точки M_0, $f(M_0)$ — функция направления в точке M_0. Функция распределения, характеризующая все турбулентные пульсации скорости в окрестности некоторой точки потока, не является равновесной и будет стремиться к равновесному значению только при стремлении величины пути смешения к нулю.

Воспользовавшись выражением (2.2), можно получить формулы для составляющих тензора турбулентных напряжений P_{ij} и плотности потока энергии пульсационного движения q_i

$$P_{ij}(M_0) = \int [c_i - U_i(M_0)]\,[c_j - U_j(M_0)]\, f(M_0)\, dc_x dc_y dc_z \tag{2.3}$$

$$q_i(M_0) = \frac{1}{2}\int [c_i - U_i(M_0)]\,[c_k - U_k(M_0)]^2\, f(M_0)\, dc_x\, dc_y\, dc_z$$

(по двойным индексам проводится суммирование).

При использовании этих выражений, которые, как предполагается, должны быть справедливы в общем случае, требуется проведение громоздких вычислений.

Введя ряд упрощений, можно получить выражения, построенные ранее в цитированных работах. Во-первых, считается, что разность величины средней скорости в двух точках потока, для которых еще существенно взаимное влияние, мала по отношению к средней величине скорости пульсационного движения. Это ограничение не всегда выполняется с необходимой строгостью. Так, в слое постоянного напряжения трения, где для профиля средней скорости справедлив логарифмический закон, оценки показывают, что это отношение равно примерно 0.2 — на расстоянии в один пробег, 0.6 — на расстоянии в четыре пробега. Во-вторых, выражение для коэффициента, характеризующего интенсивность турбулентного перемешивания молей с окружающей средой, принимается зависящим только от координаты $\Lambda(s)$. В качественном отношении это предположение не вносит изменений, количественная погрешность будет лежать, по-видимому, в границах справедливости остальных предположений, тем более, что в полученные выражения входят эмпирические коэффициенты. Второе упрощение похоже на введение среднего значения коэффициента поглощения в задачах о переносе энергии излучением. Когда величина коэффициента поглощения не слишком сильно меняется, это приводит к небольшой численной погрешности. Уточнения можно добиться, введя разбиение на ряд интервалов при интегрировании по c. Величина Λ должна быть определена из дополнительных соображений.

Представляется целесообразным в качестве первого приближения использовать при расчетах более простые выражения. Это позволит выяснить качественно пригодность полученной аппроксимации. Можно также надеяться и на удовлетворительные количественные результаты в связи с тем, что схема пути смешения Прандтля, которая получается при еще больших ограничениях, дает удовлетворительные результаты во многих случаях при рассмотрении турбулентного переноса.

После упрощений для добавочного напряжения можно получить следующее выражение

$$P_{ij}=\int\limits_{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\int\limits_{0}^{\infty}\rho C_i C_j f_0(s) C^2 dC\right]\Pi(0,\ s;\ \Lambda)\frac{ds}{\Lambda}d\Omega\approx \tag{2.4}$$

$$\approx\int\limits_{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\int\limits_{0}^{\infty}\rho(\pi h)^{-3/2}C_i C_j \exp\frac{-C^2}{h}C^2\left(1+\frac{2}{h}C_k\Delta U_k\right)dC\right]\Pi(0,\ s;\ \Lambda)\frac{ds}{\Lambda}d\Omega$$

$$(\Lambda=c/A)$$

$$q_i=\frac{1}{2}\int\limits_{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\int\limits_{0}^{\infty}\rho(\pi h)^{-3/2}C_i C^4\exp\frac{-C^2}{h}\left(1+\frac{2}{h}C_k\Delta U_k\right)dC\right]\Pi(0,\ s;\ \Lambda)\frac{ds}{\Lambda}d\Omega$$

$$(C_k=c_k-U_k) \tag{2.5}$$

3. Величина напряжения трения. Из выражения (2.4) получаем (ось y направлена вверх, угол θ отсчитывается от положительного направления оси y, угол φ отсчитывается от положительного направления оси x в плоскости xz), при $C_k=-C\cos(s,\ x_k)$

$$P_{ij}=\int\limits_{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\cos(s,\ x_i)\cos(s,\ x_j)\left[\frac{3}{8\pi}\rho h-\frac{2}{\pi^{3/2}}\rho h^{1/2}\Delta U_k\cos(s,\ x_k)\right]\times$$

$$\times\Pi(0,\ s;\ \Lambda)\frac{ds}{\Lambda}d\Omega$$

$$d\Omega=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{3.1}$$

Рассмотрим предельный случай малой величины пути смешения Λ. Величины $h(s)$ и $\Delta U_k(s)=U_k(s)-U_k(0)$ можно разложить в ряды по s, и, оставляя члены порядка s, получаем

$$P_{xx}=-2\frac{\partial U_x}{\partial x}\frac{4}{15}\rho\Lambda\langle C\rangle+\frac{\rho h}{2}\qquad\left(\langle C\rangle=\frac{2}{\pi^{1/2}}h^{1/2}\right) \tag{3.2}$$

$$P_{xy}=-(\partial U_x/\partial y+\partial U_y/\partial x)\,{}^4/_{15}\,\rho\Lambda\langle C\rangle\ \text{ и т. п.}$$

т. е. при малой длине пути смешения получаются обычные соотношения, справедливые при малой длине пробега в среде с постоянной плотностью, что приводит к соотношениям теории пути смешения Прандтля.

В случае произвольной величины Λ турбулентное напряжение трения описывается выражением (3.1), которое еще более упростим применительно к случаю плоского течения $(\Delta U_y=\Delta U_z=0)$. В этом случае интерес будет представлять выражение P_{xy}

$$P_{xy}(y)=-\int\limits_{y}^{\infty}\rho\Delta U\langle C\rangle\{E_2(\tau(y,\ \zeta;\ \Lambda))-E_4(\tau(y,\ \zeta;\ \Lambda))\}\frac{d\zeta}{\Lambda}+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{y}\rho\Delta U\langle C\rangle\{E_2(\tau(\zeta,\ y;\ \Lambda))-E_4(\tau(\zeta,\ y;\ \Lambda))\}\frac{d\zeta}{\Lambda} \tag{3.3}$$

Здесь E_2 и E_4 — интегроэкспоненциальные функции.

Можно получить еще более простое выражение для турбулентного напряжения трения, сохраняющее все качественные черты, если воспользоваться приближением среднего косинуса ($\langle\cos\theta\rangle = {}^2/_3$)

$$P_{xy}(y) \approx -\frac{1}{4}\int\limits_y^{\infty} \rho\Delta U \langle C\rangle \Pi(y, \zeta; L)\frac{d\zeta}{L} + \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{y} \rho\Delta U \langle C\rangle \Pi(\zeta, y; L)\frac{d\zeta}{L} \quad (3.4)$$

Для тех случаев, когда нет сильной несимметрии в потоке, Н. И. Булеевым [11] было введено приближение «интегрального коэффициента диффузии». В выражении (3.3) разность скоростей ΔU разлагается в ряд, тогда

$$P_{xy} = -\rho\,\varepsilon\,\partial U / \partial y$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle C\rangle\,|\zeta - y|\exp\left(-\left|\int\limits_{\zeta}^{y}\frac{dz}{L}\right|\right)\frac{d\zeta}{L} \quad (3.5)$$

Использование этой модели дает результаты, удовлетворительно совпадающие с результатами теории пути смешения для течений в пограничном слое, в плоском канале, в трубе [11,14], а также позволило рассмотреть ряд задач для течения в трубе [11], для плоского турбулентного течения Куэтта [14], которые на основе обычной теории пути смешения без специального подбора постоянных удовлетворительно не решались.

Если путь смешения мал по сравнению с размером, на котором заметно изменяется величина $\langle C\rangle$, то

$$P_{xy} = -{}^1/_2\,\rho\,\langle C\rangle L\,\partial U / \partial y \quad (3.6)$$

4. Плотность потока энергии пульсационного движения. Из выражения (2.5) для плоского слоя следует

$$q_y(y) = -\int\limits_y^{\infty}\frac{\rho h^{3/2}}{\sqrt{\pi}}E_2(\tau(y, \zeta; \Lambda))\frac{d\zeta}{\Lambda} + \int\limits_{-\infty}^{y}\frac{\rho h^{3/2}}{\sqrt{\pi}}E_2(\tau(\zeta, y; \Lambda))\frac{d\zeta}{\Lambda} \quad (4.1)$$

В приближении среднего косинуса получается выражение

$$q_y(y) \approx -\int\limits_y^{\infty}\frac{\rho h^{3/2}}{2\sqrt{\pi}}\Pi(y, \zeta; L)\frac{d\zeta}{L} + \int\limits_{-\infty}^{y}\frac{\rho h^{3/2}}{2\sqrt{\pi}}\Pi(\zeta, y; L)\frac{d\zeta}{L} \quad (4.2)$$

которое в предельном случае малой величины пути смешения принимает вид

$$q_y \sim -{}^3/_8\,\rho\langle C\rangle L\;\partial h / \partial y \quad (4.3)$$

5. **Напряжение трения в несимметричном потоке.** В начале работы отмечались статьи, в которых исследовалась структура несимметричной струи. В работе [5], например, рассмотрена задача о смешении двух параллельных потоков, текущих вначале по раздельным плоским каналам с различными скоростями, а затем втекающих в канал без промежуточной перегородки. Если рассмотреть плоскость, проходящую через точку N, в которой $\partial U / \partial y = 0$, то оказывается, что в результате несимметрии распределения скорости потока и средней величины квадрата пульсационной скорости относительно этой плоскости величина турбулентного напряжения трения оказывается не равной нулю в точке N. Координата точки, в которой производная скорости равна нулю, смещается по отношению к точке, где напряжение трения равно нулю, систематически в сторону, где интенсивность турбулентности больше. Эти результаты ставят под сомнение гипотезу, применявшуюся до сих пор в полуэмпирической теории пути смешения, о связи тензора дополнительных напряжений с параметрами потока вида (3.2).

Метод интегральной диффузии позволяет описать этот результат [12]. Если на расстоянии в несколько длин пути смешения от плоскости, проходящей через точку N, распределение поля скорости и источников порождения пульсационного турбулентного движения несимметричны, то напряжение трения будет отлично от нуля, и точка, где $P_{xy} = 0$, сдвинется в сторону источников более слабой интенсивности. Эта принципиальная возможность, содержащаяся в методе интегральной диффузии, дает основание для попытки применения его к расчету течения рассматриваемого типа. Если получится удовлетворительное согласие расчета с экспериментом, то это будет служить подтверждением справедливости основных гипотез, положенных в основание теории интегральной диффузии.

6. О системе уравнений в приближении пограничного слоя. Для течения в пограничном слое, в котором перенос происходит в поперечном к потоку направлении, можно применить соотношения, полученные для плоского течения. Тогда система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \rho U_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho U_y}{\partial y} = 0$$

$$\rho U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + \rho U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} - \frac{\partial}{\partial y}(\rho \langle u_x u_y \rangle) + \mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}$$

$$\rho U_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{4} h\right) + \rho U_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{4} h\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\langle \rho C^2 u_y \rangle + \langle p u_y \rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{3}{4} h\right) - \mu \left\langle \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 \right\rangle - \rho \langle u_x u_y \rangle \frac{\partial U_x}{\partial y}$$

$$\rho \langle u_x u_y \rangle = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_y^\infty \rho \Delta U_x(\zeta)\, h^{1/2} \Pi(y, \zeta; L) \frac{d\zeta}{L} +$$

$$+ \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{y} \rho \Delta U_x(\zeta)\, h^{1/2} \Pi(\zeta, y; L) \frac{d\zeta}{L}$$

$$\frac{1}{2}\langle \rho C^2 u_y \rangle = -\int_y^\infty \frac{\rho h^{3/2}}{2\sqrt{\pi}} \Pi(y, \zeta; L) \frac{d\zeta}{L} + \int_{-\infty}^{y} \frac{\rho h^{3/2}}{2\sqrt{\pi}} \Pi(\zeta, y; L) \frac{d\zeta}{L}$$

Относительно слагаемых $\langle p u_y \rangle$, $\mu \langle (\partial u_j / \partial x_i)^2 \rangle$ и величины L должны быть сделаны какие-либо предположения. Анализу уравнения энергии пульсационного движения посвящены работы [22–27], в которых предложены либо приближенные уравнения, либо используются соображения размерности. В частности, в работе [25] предложено выражение

$$\mu \langle (\partial u_j / \partial x_i)^2 \rangle \sim k_2 \mu h / L^2 + k_3 \rho h^{3/2} / L$$

Здесь k_2 и k_3 — эмпирические постоянные.

Для определения величины пути смешения предложены уравнения [22,25], либо опытные зависимости. Для развитого потока в канале постоянного сечения А. М. Обуховым [28] предложены зависимости для L, которые могут быть во многих случаях удовлетворительны. В связи с методом интегральной диффузии интересно отметить, что в [28] была введена в рассмотрение внутренняя геометрия, элемент которой аналогичен элементу «оптической толщины» ds / L в методе интегральной диффузии. Так как вероятность взаимодействия зависит не от геометрической координаты, а от величины τ (0, s; L), которая различна вдоль лучей по разным направлениям, то в модели интегральной диффузии, так же как и во внутренней геометрии, появляется анизотропия.

Поступила 29 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Mathieu J. Contribution a l'étude aérothermique d'un jet plan évoluant en présence d'une paroi.Thes. Sci. Phys., Grenoble, 1959, No. 165, p. 1—85.
2. Schwarz W. H., Cosart W. P. The Two-Dimentional Turbulent Wall — Jet. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, p. 4, 481—495.

3. Сакипов З. Экспериментальное исследование полуограниченных струй Сб. «Прикладная теплофизика», Изд-во АН Казахск. ССР, 1964, стр. 29—46.
4. Beguier M. C. Ecoulements dissymetriques en régime turbulent. Compt. rend. Hebdomadaires Seances Acad. sci., 1965, vol. 260, No. 21, p. 5460—5463.
5. Bequier M. C. Mesures des tensions de Reynolds dans un écoulement dissymetrique en régime turbulent incompressible. J. Mécan., 1965, vol. 4, No. 3, p. 319—334.
6. Batchelor G. K. Note en Free Turbulent Flows with Special Reference to the Two — Dimentional Wake. J. Aeronaut. Sci., 1950, vol. 17, No. 3, p. 441—445.
7. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. Изд. иностр. лит., 1959.
8. Шубауэр Г. Б., Чен К. М. Турбулентное течение. КН. «Турбулентное течение и теплопередача» (под ред. Линь Ц. Ц.), Изд. иностр. лит., 1963, гл. 2, стр. 83—205.
9. Хинце И. О. Турбулентность, ее механизм и теория. Физматгиз, 1963.
10. Schönfeld J. C. Integral Diffusivity. J. Geophys. Res., 1962, vol. 67, No. 8, p. 3187—3199.
11. Булеев Н. И. Теоретическая модель механизма турбулентного обмена в потоках жидкости. Сб. «Теплопередача», Изд-во АН СССР, 1962, стр. 64—98.
12. Онуфриев А. Т. Модель неравновесных процессов в некоторых задачах механики сплошных сред. ПМТФ, 1963, № 1, стр. 47—56.
13. Spiegel E. A. A generalization of the mixinglength theory of turbulent convection. Astrophys. J., 1963, vol. 138, No. 1, p. 216—225.
14. Онуфриев А. Т. О применении метода интегральной диффузии при исследовании турбулентного переноса. ПМТФ, 1965, № 3, стр. 63—68.
15. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. I. Изд-во «Наука», 1965.
16. Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике. Изд. «Мир», 1965.
17. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. Физматгиз, 1963, стр. 693—694.
18. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision Processes in Gases, I. Phys. Rev., 1954, vol. 94, No. 3, p. 511—525.
19. Коган М. Н. Об уравнениях движения разреженного газа. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4, стр. 425—432.
20. Liepmann H. W., Narasimha R., Chanine M. T. Structure of a Plane Shock Layer. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 11, p. 1313—1324.
21. Chu C. K. Kinetic — theoretic description of the formation of a shock wave, Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 1, p. 12—22; No. 8, p. 1450—1455.
22. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР. Сер. физ., 1942, т. 6, № 1—2, стр. 56—58.
23. Невзглядов В. Г. К феноменологической теории турбулентности. Докл. АН СССР, 1945, т. 47, № 3, стр. 169—173.
24. Prandtl L. Über ein neues Formelsystem der ausgebildeten Turbulenz. Nachr. Gess. Wiss. Göttingen, Math.-Phys., 1945, Kl. 6—19.
25. Rotta I. C. Statistiche Theorie nichtgomogener Turbulenz. Z. Physik, 1951, B. 129, No. 5, S. 547—572; B. 131, No. 1, S. 51—77.
26. Давыдов Б. И. К статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 136, № 1, стр. 47—50.
27. Глушко Г. С. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 4, стр. 13—23.
28. Обухов А. М. О распределении масштаба турбулентности в потоках произвольного сечения. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3, стр. 209—220.