

**СТАТИСТИКА ЧИСЛА И ДЛИТЕЛЬНОСТИ ВЫБРОСОВ  
ОГИБАЮЩЕЙ МНОГОЧАСТИЧНОГО  
ДОПЛЕРОВСКОГО СИГНАЛА  
КАК ФУНКЦИЯ ЗАДАННОГО ПОРОГОВОГО УРОВНЯ****Г. А. Кашеева***Институт автоматки и электрометрии СО РАН, г. Новосибирск  
E-mail: sobolev@iae.nsk.su*

Найдены среднее и максимальное числа положительных выбросов огибающей многочастичного доплеровского сигнала при заданном пороговом уровне, а также средние длительности положительных и отрицательных выбросов в функции порога. Показано, что средняя длительность положительных выбросов огибающей обратно пропорциональна, а средняя длительность отрицательных выбросов прямо пропорциональна относительному пороговому уровню. Определено компромиссное значение порога, обеспечивающее требуемую точность измерений при допустимом уровне потерь информации о сигнале.

**Введение.** Известно [1], что многочастичный доплеровский сигнал (в измерительном объеме одновременно находится несколько частиц) представляет собой узкополосный нормальный квазигармонический случайный процесс, характеризующийся глубокой амплитудной и фазовой модуляцией, которая приводит к существенным ошибкам при измерении мгновенной скорости турбулентных потоков. Чтобы уменьшить погрешности, обусловленные фазовым шумом, предложен пороговый способ демодуляции сигнала [2], заключающийся в том, что обрабатываются только те участки его реализации, огибающая которых превышает заданный амплитудный порог (рис. 1, заштрихованные области), а участки сигнала с огибающей ниже порога исключаются из рассмотрения. Основанием для применения этого способа является тот факт, что максимальные паразитные выбросы мгновенной частоты сигнала, являющейся главным информационным параметром, имеют место при значениях его огибающей, стремящихся к 0, в то время как на интервалах с достаточно высокими значениями огибающей отклонения мгновенной частоты от ее номинальных значений минимальны (рис. 2, *b, c*). Однако с ростом порогового уровня также увеличивается доля исключаемых из рассмотрения участков реализации сигнала, лежащих ниже порога, и, следовательно, растут потери информации о текущих значениях сигнала. Показателем потерь информации будем считать отношение длительности подпороговой части сигнала к общей длине реализации, оцениваемое в процентах. Значение порога должно быть выбрано на основе компромисса между допус-

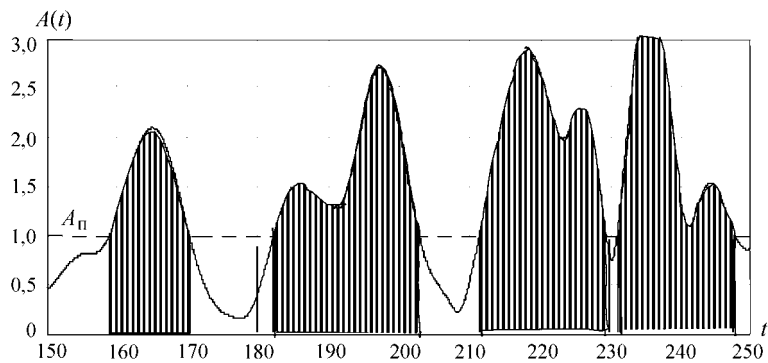


Рис. 1

тимой величиной относительной ошибки оценки мгновенной частоты, обусловленной паразитным фазовым шумом, и допустимым уровнем потерь информации о сигнале.

Пороговый способ широко используется в системах обработки доплеровского сигнала, и в этой связи представляет интерес статистика числа и длительности выбросов огибающей сигнала [3]. Данная работа посвящена определению этих величин в свете достижения указанного выше компромисса.

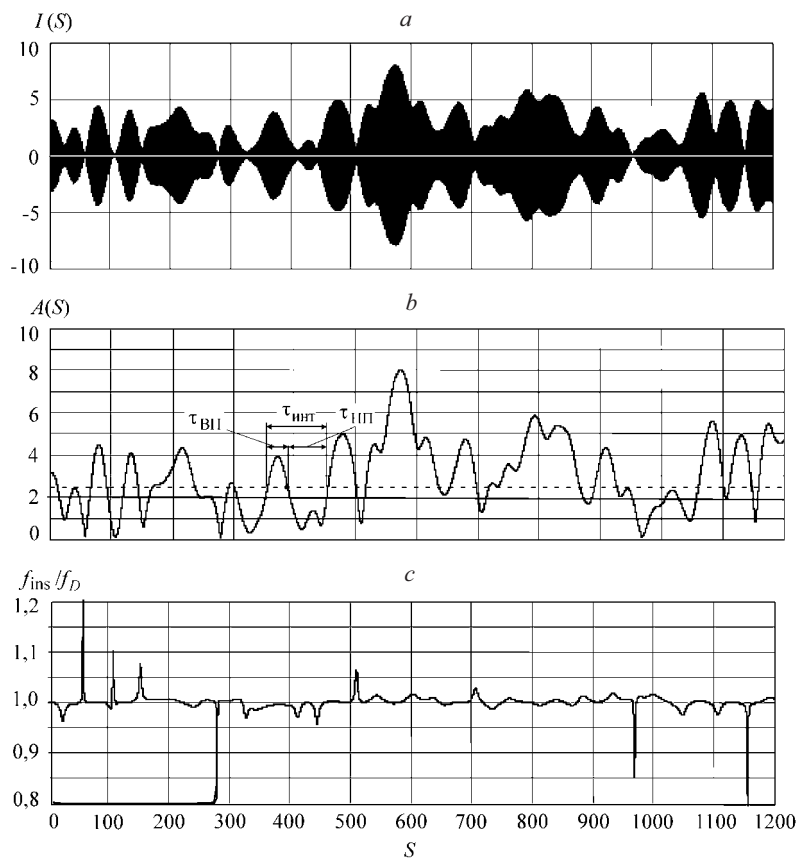


Рис. 2

**Среднее число выбросов огибающей** нормального стационарного квазигармонического случайного процесса за заданный пороговый уровень определим в соответствии с [4, выражение (2.5.50)]:

$$N_A(C) = \sqrt{-\frac{\rho_0''}{2\pi}} \left( \frac{C}{\sigma} \right) \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1)$$

где  $N_A(C)$  – среднее число положительных выбросов (ПВ) огибающей  $A(t)$  сигнала за заданный пороговый уровень  $C$  в единицу времени (под положительным выбросом понимается пересечение огибающей заданного уровня с положительной производной, или снизу вверх);  $\rho_0''$  – значение второй производной коэффициента корреляции при  $\tau = 0$ ;  $\sigma^2$  – дисперсия ВЧ-компоненты доплеровского сигнала.

Как показано в [4, выражение (2.5.52)], для оптических схем с гауссовыми пучками коэффициент корреляции имеет вид

$$\rho(\tau) = \exp\left(-\frac{\beta^2 \omega_D^2 \tau^2}{2}\right), \quad \beta = \frac{1}{2\pi M},$$

и, следовательно,

$$\rho_0'' = \frac{d^2 \rho(\tau)}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0}; \quad \sqrt{-\rho_0''} = \beta \omega_D = \frac{\omega_D}{2\pi M} = \frac{f_D}{M}, \quad (2)$$

где  $\omega_D, f_D$  – круговая и циклическая частоты доплеровского сдвига соответственно;  $2M$  – число интерференционных полос на уровне  $\exp^{-1}$  максимума интенсивности светового пучка.

Подставив (2) в (1) и введя обозначение  $z = C/\sigma$  (относительный порог), получим

$$N_A(z) = \frac{f_D}{M\sqrt{2\pi}} z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) = k_1 z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \quad (3)$$

где  $k_1 = \frac{f_D}{M\sqrt{2\pi}}$ .

Число ПВ за заданный порог за время реализации  $T$  составит

$$N_A(z)T = (ST_D)k_1 z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) = \frac{S}{M\sqrt{2\pi}} z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \quad (4)$$

где  $T = ST_D$  – длительность реализации, выраженная через число  $S$  доплеровских периодов  $T_D$  ( $T_D = 1/f_D$ ).

Анализ выражения (4) показывает, что максимум числа ПВ огибающей имеет место при  $z = C/\sigma = 1$  (т. е. при уровне порога, равном среднеквадратичному значению доплеровского сигнала).

Правильность полученного аналитически выражения (4) была подтверждена результатами компьютерного моделирования многочастичного доп-

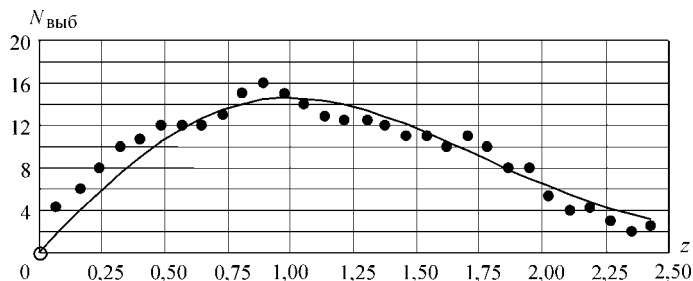


Рис. 3

леровского сигнала с параметрами  $\sigma = 2,46$ ,  $M = 20$ ,  $S = 1200$  (в измерительном объеме в среднем находится 20 частиц). Реализации самого сигнала, его огибающей и нормированной мгновенной частоты  $f_{\text{ins}}/f_D$  приведены на рис. 2, *a-c* соответственно. На рис. 2, *b* показаны также сечения огибающей порогами разного уровня. На рис. 3 представлено сравнение рассчитанных по аналитической формуле (4) значений числа пересечений  $N_A(z)T$  при указанных значениях параметров  $M$  и  $S$  (сплошная линия) и соответствующих величин, найденных для рассматриваемой смоделированной реализации такой же длительности и с тем же числом интерференционных полос в измерительном объеме (экспериментальные точки на графике). Как в теории, так и в модели максимальное число ПВ (около 14) имеет место при относительном пороге  $z = 1$  (штриховая линия на рис. 2, *b* соответствует уровню  $C = \sigma = 2,46$ ). Хорошее согласие теории с данными экспериментальной модели сигнала с достаточной точностью подтверждает правильность используемой аппроксимации многочастичного доплеровского сигнала как узкополосного нормального квазигармонического случайного процесса.

**Средние длительности выбросов огибающей** доплеровского сигнала за заданный пороговый уровень определим, исходя из следующих соображений. Весь временной интервал  $\tau_{\text{инт}}$  (см. рис. 2, *b*) между двумя последовательными ПВ огибающей состоит из интервала ее надпороговых (выше порога (ВП)) значений  $\tau_{\text{ВП}}$  и интервала подпороговых (ниже порога (НП)) значений  $\tau_{\text{НП}}$ . Длительность надпорогового выброса определяет, по сути, время существования непрерывного сигнала, а подпорогового – уровень потерь информации. Кроме того, само значение порога задает величину связанной с фазовым шумом [2] погрешности оценки мгновенной скорости, которая при относительно низких значениях порога ( $z \leq 0,1$ ) и малом числе интерференционных полос  $M$  может быть высокой (более 10 %).

На основании (4) можно определить среднее значение интервала между последовательными ПВ огибающей как отношение длительности реализации  $T$  к числу интервалов на длине реализации (т. е. числу выбросов  $-1$ ):

$$\langle \tau_{\text{инт}}(z) \rangle = \frac{T}{N_A(z)T - 1} \cong \frac{1}{N_A(z)} = \frac{T_D M \sqrt{2\pi}}{z \exp(-z^2/2)}. \quad (5)$$

Нормируя этот интервал на доплеровский период, получим

$$\left\langle \frac{\tau_{\text{инт}}(z)}{T_D} \right\rangle = \frac{M \sqrt{2\pi}}{z \exp(-z^2/2)}. \quad (6)$$

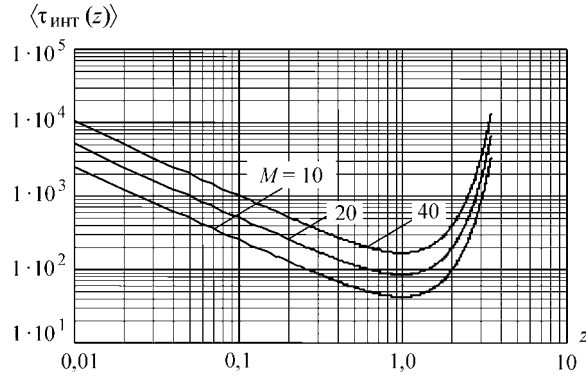


Рис. 4

Графики зависимости (6) приведен на рис. 4. Как и следовало ожидать, минимальный интервал между ПВ огибающей имеет место при  $z = 1$  и составляет в зависимости от числа полос ( $2M$ ) всего от 40 до 200 периодов доплеровской частоты.

Среднюю длительность надпорогового выброса огибающей  $\tau_{\text{ВП}}(z)$  можно определить, исходя из того, что соотношение между  $\tau_{\text{ВП}}(z)$  и всем интервалом  $\tau_{\text{инт}}$  (см. рис. 2, *b*) будет в среднем таким же, как соотношение общей длительности полезного сигнала  $T_{\text{ВП}}$  и общей длины реализации  $T$ . Это соотношение можно получить как отношение вероятности нахождения огибающей выше заданного порога к общей вероятности существования огибающей [2], равной 1, что запишем как

$$\left\langle \frac{\tau_{\text{ВП}}(z)}{\tau_{\text{инт}}} \right\rangle = \frac{T_{\text{ВП}}(z)}{T} = \frac{\int_z^{\infty} W(y) dy}{\int_0^{\infty} W(y) dy} = \frac{\int_z^{\infty} y \exp(-y^2/2) dz}{\int_0^{\infty} y \exp(-y^2/2) dz} = \exp(-(z^2/2)), \quad (7)$$

где  $W(y)$  – плотность вероятности значений огибающей [4].

Аналогично определим среднюю длительность подпорогового выброса  $\tau_{\text{НП}}(z)$ . Соотношение общей длительности подпорогового сигнала  $T_{\text{НП}}$  и общей длины реализации  $T$  с учетом (7) будет иметь вид

$$\left\langle \frac{\tau_{\text{НП}}(z)}{\tau_{\text{инт}}} \right\rangle = \frac{T_{\text{НП}}(z)}{T} = 1 - \exp(-(z^2/2)). \quad (8)$$

На рис. 5 сплошной линией показана зависимость (7) – относительная длительность полезного сигнала в функции порога, а штриховой – зависимость (8) – относительный показатель потерь информации о сигнале. Как следует из графиков, потери информации о сигнале пренебрежимо малы (менее 2 %), если значения относительного порога не превышают 0,2 (т. е. составляют менее 20 % от среднеквадратичного значения сигнала). Длительность полезного (надпорогового) сигнала в этом случае практически равна длине реализации. При значениях порога  $z = 1,178$  (близких к среднеквадратичному значению сигнала) длительности надпороговой и подпороговой ча-

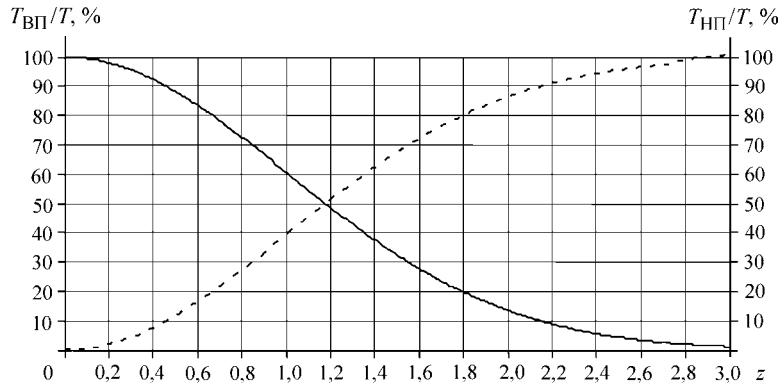


Рис. 5

стей огибающей будут одинаковыми – 50 % от общей длины реализации. Это следует из условия равенства соотношений (7) и (8):

$$\exp(-z^2/2) = 1 - \exp(-z^2/2),$$

откуда  $z = 1,178$ .

Полагая, что соотношения (7) и (8) выполняются в среднем на каждом интервале между ПВ огибающей, получим

$$\left\langle \frac{\tau_{\text{ВП}}(z)}{\tau_{\text{инт}}(z)} \right\rangle = \exp(-z^2/2), \text{ или } \langle \tau_{\text{ВП}}(z) \rangle = \langle \tau_{\text{инт}}(z) \rangle \exp(-z^2/2), \quad (9)$$

$$\left\langle \frac{\tau_{\text{НП}}(z)}{\tau_{\text{инт}}(z)} \right\rangle = 1 - \exp(-z^2/2), \text{ или } \langle \tau_{\text{НП}}(z) \rangle = \langle \tau_{\text{инт}}(z) \rangle [1 - \exp(-z^2/2)], \quad (10)$$

откуда нормированные на доплеровский период средние значения длительностей положительного и отрицательного выбросов (ОВ) огибающей при заданном пороге с учетом (6) определяются как

$$\begin{aligned} \langle S_{\text{ПВ}} \rangle &= \left\langle \frac{\tau_{\text{ВП}}(z)}{T_D} \right\rangle = \left\langle \frac{\tau_{\text{инт}}(z)}{T_D} \right\rangle \exp(-z^2/2) = \\ &= \frac{M\sqrt{2\pi}}{z \exp(-z^2/2)} \exp(-z^2/2) = \frac{M\sqrt{2\pi}}{z}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\langle S_{\text{ОВ}} \rangle = \left\langle \frac{\tau_{\text{НП}}(z)}{T_D} \right\rangle = \left\langle \frac{\tau_{\text{инт}}(z)}{T_D} \right\rangle [1 - \exp(-z^2/2)] = \frac{M\sqrt{2\pi}}{z} [\exp(-z^2/2) - 1]. \quad (12)$$

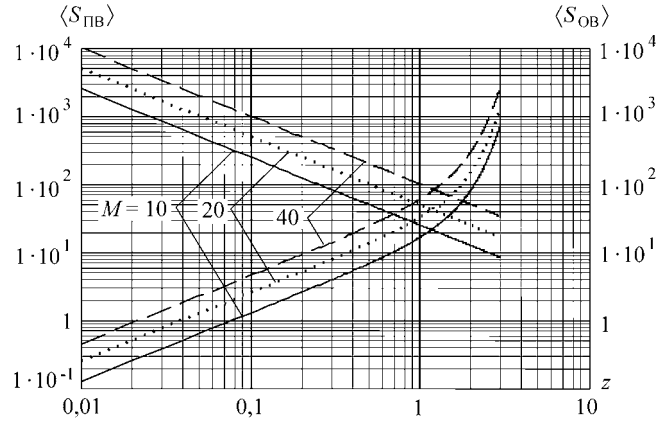


Рис. 6

При относительно малых значениях порога ( $z \ll 1$ ) выражение (12) можно аппроксимировать как

$$\langle S_{ОВ} \rangle = Mz \sqrt{\pi/2}. \quad (13)$$

Следовательно, нормированная на доплеровский период средняя длительность ПВ огибающей обратно пропорциональна, а средняя длительность ее ОВ прямо пропорциональна относительному уровню порога  $z$  (при относительно малых значениях порога, не превышающих 1). Кроме того, обе эти величины прямо пропорциональны числу интерференционных полос  $2M$  в фокальной плоскости. Семейства зависимостей (11) и (12) при трех значениях  $M$  показаны на рис. 6 в логарифмическом масштабе.

Как и следовало ожидать, при значении порога  $z \cong 1,2$  средние нормированные длительности положительного и отрицательного выбросов огибающей доплеровского сигнала равны между собой и лежат в пределах  $2M$ . Это означает, что при 50 %-ном уровне потерь информации о сигнале средние длительности интервалов существования сигнала и его отсутствия составляют  $2MT_D$ , т. е. в некотором приближении такой сигнал можно рассматривать как эквивалент одночастичного со скважностью 1.

Зависимость связанной с фазовым шумом погрешности  $\sigma_f$  (в процентах) от порога, рассчитанная в соответствии с [2], показана на рис. 7. Верхняя ось абсцисс представляет собой соответствующий заданному порогу  $z$  (отложенному по нижней оси) процент потерь информации о сигнале. Как следует из рисунка, при 50 %-ном уровне потерь информации погрешность фазового шума не превысит 0,25 % для  $M = 40$  и 1 % для  $M = 10$ , в то время как при 2 %-ном уровне потерь информации ( $z = 0,2$ ) эта погрешность возрастет в 2 раза. Следовательно, задавая допустимую погрешность оценки мгновенной скорости при имеющемся числе полос, из рис. 7 можно определить минимально допустимое значение порога, а по этому значению на основании рис. 6 – средние длительности надпорогового и подпорогового выбросов огибающей. Однако при этом следует иметь в виду, что значительное превышение порогового уровня относительно  $z = 1$ , не давая существенного снижения погрешности, связанной с фазовым шумом, приводит к многократно-

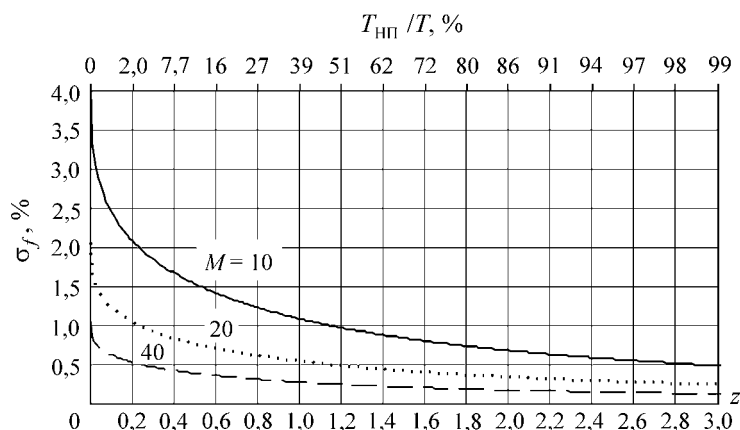


Рис. 7

му (в 100 раз и более) увеличению длительности ОВ огибающей в сравнении с длительностью ее ПВ. Это означает кратковременное существование полезного сигнала при значительно более длительных периодах его отсутствия, что эквивалентно случаю с очень низкой концентрацией частиц в измерительном объеме.

Таким образом, нижний уровень порога для огибающей, имеющий порядок  $z \cong 1,0-1,2$  (равный или близкий к среднеквадратичному значению доплеровского сигнала), можно считать компромиссным как с точки зрения потерь информации о сигнале, так и с точки зрения допустимой точности измерений мгновенной частоты.

**Закключение.** Определено среднее число положительных выбросов огибающей многочастичного доплеровского сигнала за заданный пороговый уровень в единицу времени. Показано, что значение порога, при котором имеет место максимальное число выбросов, равно среднеквадратичному значению сигнала, а само максимальное число выбросов обратно пропорционально числу единичных доплеровских всплесков на длине реализации. Полученные аналитические результаты были подтверждены данными компьютерного моделирования доплеровского сигнала при введении порогов разного уровня.

Найдены средние длительности положительных и отрицательных выбросов огибающей в функции порога. Показано, что нормированная на доплеровский период средняя длительность ПВ огибающей обратно пропорциональна значению порога  $z$ , а средняя длительность ОВ прямо пропорциональна этой величине и что обе эти величины прямо пропорциональны числу интерференционных полос  $2M$  в фокальной плоскости.

Установлено, что при 50 %-ном уровне потерь информации о сигнале нормированные длительности положительного и отрицательного выбросов огибающей равны между собой и соответствуют длительности сигнала одиночной частицы на уровне  $\exp^{-1}$ ; при этом значение порога  $z = 1,178$ .

Приведены графики, позволяющие выбрать компромиссное значение порога при заданной погрешности фазового шума и допустимом уровне потерь информации о сигнале.



#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дубнищев Ю. Н., Арбузов В. А., Белоусов П. П., Белоусов П. Я.** Оптические методы исследования потоков. Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2003.
2. **Кашеева Г. А., Соболев В. С.** Теоретические основы порогового способа обработки доплеровского сигнала // Автометрия. 1983. № 3. С. 62.
3. **Лабунец Л. В.** Интерполяционное приближение распределения длительности выбросов случайного процесса // Радиотехника и электроника. 2000. **45**, № 12. С. 1459.
4. **Тихонов В. И., Хименко В. И.** Выбросы траекторий случайных процессов. М.: Наука, 1987.

*Поступила в редакцию 23 июля 2007 г.*

---