УДК 532.68

ДИНАМИКА МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Л. К. Антановский

(*Новосибирск*)

В работе рассматривается медленное плоскопараллельное движение вязкой несжимаемой жидкости с межфазной границей γ при отсутствии внешних и инерционных массовых сил. Это означает, что комплексная скорость $v = v_x + iv_y$ и давление p удовлетворяют стационарной однородной системе Стокса на плоскости $z = x + iy$, скачок вектора напряжений на межфазной границе равен капиллярным силам, а всюду непрерывное поле скорости определяет перемещение γ (фазовые переходы отсутствуют). Предлагаемое приближение естественно и может быть обосновано при малом числе Рейнольдса и конечном числе Струхаля.

Для простоты предположим, что коэффициент поверхностного натяжения σ — известная функция точки z и времени t. Например, в задаче о термокапиллярной конвекции это так, если известна температура жидкости. Оказывается, что в таком случае при фиксированной кривой γ по динамическому условию определяется нормальная компонента скорости на γ в виде явного оператора $N(\gamma)$. Назовем его оператором «нормальная скорость». Тогда кинематическое условие приводит к динамической системе

$$\dot{\gamma} = N(\gamma) \tag{0.1}$$

($\dot{\gamma}$ — скорость движения γ вдоль ориентирующей ее нормали).

1. Основные представления. Введем обозначение оператора Коши — Римана $2\partial = \partial_x - i\partial_y$ и внешней формы «напряжение» $P(dz) = i(pdz + 2\mu\bar{\partial}v d\bar{z})$ (∂_x, ∂_y — операторы частного дифференцирования по x, y, μ — динамический коэффициент вязкости, который будет считаться кусочно-постоянным с линией разрыва γ). Здесь дифференциалы вычисляются при фиксированном времени t, явная зависимость всех величин от t указываться не будет.

Пусть $z = \tau(s)$ — параметризация кривой γ длиной дуги s, $\nu = id\tau/ds$ — ее нормаль. Для кусочно-непрерывной функции $f(z)$ с линией разрыва γ положим $f_{\pm}(\tau) = \lim\limits_{\varepsilon\to\pm 0} f(\tau + \varepsilon\nu)$, $\tau \in \gamma$, тогда исходную задачу запишем в виде

$$dP(dz) = 0, \quad d\,\mathrm{Im}(v d\bar{z}) = 0 \ \text{вне}\ \gamma; \tag{1.1}$$

$$P_+(d\tau) - P_-(d\tau) = d(\sigma d\tau/ds), \quad \dot{\gamma} = \mathrm{Re}(\bar{\nu} v) \ \text{на}\ \gamma. \tag{1.2}$$

При этом поле скорости будет считаться непрерывным на всей плоскости и вместе с давлением исчезающим на бесконечности.

Из уравнений (1.1) следует представление Колосова — Мусхелишвили $v(z) = \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}$, $iP(dz) = 2\mu d\,[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]$, где аналитические вне γ функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ всюду однозначны. Последнее вытекает из легко проверяемого тождества $\int\limits_{\partial D} P(dz) = 0$, где область D содержит контур γ, состоящий по предположению из простых замкнутых кривых γ_j.

Пусть $\varphi_+(\tau) - \varphi_-(\tau) = \omega(\tau)$, тогда из непрерывности скорости следует равенство $\psi_+(\tau) - \psi_-(\tau) = \overline{\omega(\tau)} - \bar{\tau} d\omega(\tau)/d\tau$. Так как по решению v, p системы Стокса функция φ определена с точностью до кусочно-постоянной функции и $v(\infty) = 0$, то можно считать, что $\varphi(\infty) = \psi(\infty) = 0$. Аддитивные постоянные у функции ω на кривых γ_j фиксируем ниже при интегрировании динамического условия (см. (1.3)).

По известному скачку функции φ и ψ представляются интегралами типа Коши, что приводит к основным равенствам $iP(dz) = 2\mu dU_\gamma\omega$, $v = V_\gamma\omega$, $\mathrm{Im}(v d\bar{z}) = dW_\gamma\omega$. Здесь U_γ, V_γ, W_γ — интегральные операторы над ω, определенные формулами $U_\gamma(\omega \mid z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \left[\omega(\tau)\, d\ln\left(\frac{\tau - z}{\bar\tau - \bar z}\right) - \overline{\omega(\tau)} \times \right.$ $\left. \times\, d\left(\frac{\tau - z}{\bar\tau - \bar z}\right)\right]$, $V_\gamma(\omega \mid z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \left[\omega(\tau)\, d\ln|\tau - z|^2 + \overline{\omega(\tau)}\, d\left(\frac{\tau - z}{\bar\tau - \bar z}\right)\right]$, $W_\gamma(\omega \mid z) =$ $= \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_\gamma \overline{\omega(\tau)}\, d\,[(\tau - z)\ln|\tau - z|^2]$. Очевидно, что скорость $V_\gamma\omega$ и функция тока $W_\gamma\omega$ непрерывны всюду, а $(U_\gamma\omega)_\pm = \pm\omega + \widehat{U}_\gamma\omega$ ($\widehat{U}_\gamma$ — главное значение U_γ на γ). Интегрируя динамическое условие, получаем интегральное уравнение Фредгольма на плотность ω (аналог уравнения Шермана — Лауричелла)

$$4\widehat{\mu}(\omega + \lambda\widehat{U}_\gamma\omega) = \sigma\nu, \quad \widehat{\mu} = (1/2)(\mu_+ + \mu_-), \tag{1.3}$$
$$\lambda = (\mu_+ - \mu_-)/(\mu_+ + \mu_-),$$

где постоянные интегрирования на γ_j отброшены, что уничтожает произвол в выборе ω. Легко заметить, что $\widehat{U}_\gamma c = \pm c$, $V_\gamma c = 0$, $W_\gamma c = 0$ (c — постоянное на каждой γ_j число, знак выбирается в зависимости от ориентации γ_j).

Покажем, что уравнение (1.3) всегда разрешимо, если $0 < \mu < \infty$ и γ является кривой Ляпунова. В данном случае $|\lambda| < 1$ и оператор $\widehat{U}_\gamma$ имеет слабую особенность, поэтому для доказательства разрешимости уравнения (1.3) достаточно установить единственность нулевого решения при $\sigma = 0$. Используя интегральное тождество $4\int\int \mu\,|\bar\partial v|^2\, dxdy +$ $+ \mathrm{Re}\int\limits_\gamma \sigma\frac{d\bar v}{ds}\, d\bar\tau = 0$ и условие на бесконечности, получим тождественно нулевое решение $v = 0$, $p = 0$.

Следовательно, функция φ кусочно-постоянна и тем же свойством обладает ω, поэтому однородное уравнение (1.3) приводит к равенству $\omega \pm \lambda\omega = 0$, или $\omega = 0$. Таким образом, решение (1.3) можно представить в виде $4\widehat{\mu}\omega = \sigma\nu - \lambda R_\lambda(\sigma\nu)$ (R_λ — интегральный оператор).

2. Реализация оператора «нормальная скорость». Теперь оператор $N(\gamma)$ полностью конкретизируется: $N(\gamma) = dF(\tau)/ds$, $\tau \in \gamma$. Здесь $4\widehat{\mu}F(\tau) = W_\gamma(\sigma\nu - \lambda R_\lambda(\sigma\nu))$ или в развернутом виде $4\widehat{\mu}F(\tau_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\gamma \mathrm{Im}$ $\left(\frac{d\bar\tau}{d\tau}\frac{\tau - \tau_0}{\bar\tau - \bar\tau_0}\right)\sigma(\tau)\, ds - \mathrm{Re}\,\frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_\gamma \overline{R_\lambda(\sigma\nu \mid \tau)}\, d\,[(\tau - \tau_0)\ln|\tau - \tau_0|^2]$. Пусть точка сверху обозначает дифференцирование по времени, тогда система (0.1) превратится в уравнение

$$\mathrm{Im}(\dot\tau\, d\bar\tau) = dF(\tau), \tag{2.1}$$

ибо $\dot\gamma = \mathrm{Im}(\dot\tau\, d\bar\tau/ds)$. Отметим, что теперь в (2.1) положение точки τ на γ можно задавать любым параметром.

Предположим, что γ — ориентированная против часовой стрелки кривая, ограничивающая конечную область (плоскую «каплю»). Пусть πr^2 — ее площадь, a — центр масс, т. е. $2\pi r^2 = \mathrm{Im}\int\limits_\gamma \bar\tau\, d\tau$, $a = \frac{1}{2\pi i r^2}\int\limits_\gamma |\tau|^2\, d\tau$. Из (2.1) следует, что площадь «капли» сохраняется, а точка a движется по закону

$$\dot a = \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_\gamma F(\tau)\, d\tau. \tag{2.2}$$

Рассмотрим многообразие M вещественных 2π-периодических непрерывных функций $\eta(\theta)$, удовлетворяющих условиям $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{2\eta}d\theta = 1$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{3\eta+i\theta}d\theta = 0$. Тогда класс звездных относительно точки a кривых можно задать элементом $\eta \in M$ в виде $\gamma = \{\tau = a + re^{\eta+i\theta}\}$. В результате (2.1) превратится в систему для a и η:

$$\dot{a} = A(a, \eta); \tag{2.3}$$

$$(e^{2\eta}/2)^{\cdot} + B'(\eta, a) = 0, \tag{2.4}$$

где $A(a, \eta)$ — правая часть уравнения (2.2); $B(\eta, a|\theta) = r^{-2}\{\mathrm{Im}[\dot{a}(\overline{\tau} - \overline{a})] - F(\tau)\}$. Здесь и ниже штрих обозначает дифференцирование по θ. Очевидно, что аналогичную конструкцию можно проделать для набора замкнутых кривых.

3. Точные решения. Так как $B(0, a) = 0$ при произвольной функции $\sigma(z)$, то в классе окружностей существует решение системы (0.1), если их центр удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot{a} = A(a, 0) \equiv -\frac{1}{8\pi\hat{\mu}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sigma(a + re^{i\theta})\, e^{i\theta}d\theta. \tag{3.1}$$

Введем положительную функцию

$$\alpha(\theta) = \sigma(a + re^{i\theta})/4\hat{\mu}r \tag{3.2}$$

и оператор Гильберта H формулой $H(f\,|\,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\xi}{2}d\xi$. Тогда скорость жидкости на γ определится в виде $v(a + re^{i\theta}) = \dot{a} - rie^{i\theta}H(\alpha|\theta)$. Например, если $\sigma(z) = \sigma_0[1 + \varepsilon(|z/r|^2 - 1)]$, то, выбирая в качестве масштаба времени $4\hat{\mu}r/\sigma_0$, получим решение $a = a_0e^{-\varepsilon t}$, $v(a + re^{i\theta}) = -\varepsilon\overline{a}e^{2i\theta}$ (a_0 — центр начальной окружности, r — ее радиус).

Линеаризация (2.4) на положении равновесия $\eta = 0$, $a = 0$ приводит к задаче $\dot{\eta} + (H\eta)' = 0$ для функции η, ортогональной 1 и $e^{i\theta}$. Если $\eta_0(\theta)$ — начальное возмущение γ, то $\eta(\theta) = \frac{e^{-2t}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 2(\theta-\xi) - e^{-t}\cos(\theta-\xi)}{1 - 2e^{-t}\cos(\theta-\xi) + e^{-2t}}\times$ $\times\eta_0(\xi)\,d\xi$. Интересно отметить, что с ростом времени $a \to 0$ при $\varepsilon > 0$, а $\eta \to 0$ при всех ε. Наша цель — доказать последнее утверждение в более общем виде.

4. Устойчивость формы межфазной границы. Пусть теперь для простоты $\lambda = 0$, тогда линеаризованная на точном решении $\eta = 0$ задача (2.4) имеет простой вид

$$\dot{\eta} + [H(\alpha\eta) - \eta H\alpha - K(\alpha, \eta)]' = 0, \tag{4.1}$$

где коэффициент α определен формулой (3.2) и $K(\alpha, \eta\,|\,\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\eta(\xi)\times$ $\times[\alpha(\xi)\sin(\theta-\xi) - H(\alpha|\xi)\cos(\theta-\xi)]d\xi$. Очевидно, что множество T_0M функций η, ортогональных 1 и $e^{i\theta}$ (касательное пространство в нуле многообразия M), инвариантно по отношению к оператору задачи (4.1). Введем на множестве T_0M структуру пространства Соболева с нормой

$\|\eta\|_s = \left(\sum\limits_{|k|\geqslant 2} |k|^{2s} |\eta_k|^2\right)^{1/2}$, $\eta_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \eta(\theta)\, e^{-ik\theta} d\theta$ и определим следующие два числа: $\alpha_* = \inf\limits_{\theta,t} \alpha$, $\delta = \inf\limits_t \alpha_0 - 2\sup\limits_t \sum\limits_{|k|\neq 0} |\alpha_k|$ (очевидно, что $\delta \leqslant \alpha_*$). Тогда справедливы оценки

$$\|\eta\|_0 \leqslant \|\eta_0\|_0\, e^{-2\alpha_* t}, \quad \|\eta\|_s \leqslant \|\eta_0\|_s\, e^{-2\delta t}, \quad s \geqslant 0 \tag{4.2}$$

(η_0 — начальное возмущение). В частности, при $\delta > 0$ и $s > 1/2$ имеется асимптотическая устойчивость нулевого решения в норме непрерывных функций.

Первая оценка легко получается умножением (4.1) на η и интегрированием по периоду, что приводит к тождеству $(\|\eta\|_0^2/2)^{\cdot} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \alpha(\xi) \times \times \left(\frac{\eta(\theta)-\eta(\xi)}{2\sin\frac{\theta-\xi}{2}}\right)^2 d\xi d\theta = 0$. Так как второе слагаемое при $\alpha = 1$ совпадает с $\|\eta\|_{1/2}^2$, то по лемме Гроноулла справедливо первое утверждение. Второе неравенство основано на оценке коммутатора $\|H(\alpha\eta) - \eta H\alpha\|_s \leqslant \leqslant 2\Sigma|\alpha_k|\, \|\eta\|_s$, $s \geqslant 0$. В самом деле

$$\|H(\alpha\eta) - \eta H\alpha\|_s^2 = \sum_k \left| |k|^s \sum_l (\operatorname{sgn} k - \operatorname{sgn} l)\, \eta_{k-l}\alpha_l \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \left(2\sum_l |k-l|^s |\eta_{k-l}|\,|\alpha_l|\right)^2 \leqslant 4\sum_k\sum_l |k-l|^{2s} |\eta_{k-l}|^2 |\alpha_l| \sum_m |\alpha_m| =$$

$$= \left(2\sum |\alpha_k|\right)^2 \|\eta\|_s^2.$$

Умножая (4.1) скалярно на функцию $\sum\limits_k |k|^{2s}\eta_k e^{ik\theta}$, получим неравенство $(\|\eta\|_s^2/2)^{\cdot} + \alpha_0\|\eta\|_{s+1/2}^2 \leqslant 2\sum\limits_{k\neq 0}|\alpha_k|\,\|\eta\|_{s+1/2}^2$, из которого следует (4.2). При применении леммы Гроноулла необходимо воспользоваться оценкой $\|\eta\|_{s+1/2} \geqslant \sqrt{2}\|\eta\|_s$, справедливой для $\eta \in T_0M$.

Условие устойчивости $\delta > 0$ можно обеспечить требованием принадлежности аналога числа Марангони $\mathrm{Ma} = r\sup|\partial\sigma|/\inf\sigma$ промежутку $[0, \mathrm{Ma}^*)$. Из общих соображений Ма определяет отношение скорости дрейфа центра масс a (см. (3.1)) к скорости «округления» γ, а так как в реальных ситуациях Ма крайне мало, то очевидно, что динамика межфазной границы, близкой к окружности, фактически описывается одним уравнением (3.1).

Замечания. 1. Представления Колосова — Мусхелишвили и уравнения Шермана — Лауричелла [1] из теории упругости почти без изменения переносятся на гидродинамику вязкой жидкости (см. [2, 3] и цитируемую там литературу). Методы теории функций комплексного переменного к стационарным задачам со свободной границей для уравнений Навье — Стокса впервые применены автором [4—8]. Найденные здесь точные решения фактически получены в [5], в [6, 7] установлена изолированность некоторых их них. 2. При доказательстве оценки (4.2) автор привел неравенство для коммутатора [9]. Интересно отметить, что в линеаризованное уравнение (4.1) не входят производные коэффициента поверхностного натяжения, а, наоборот, α сглаживается коммутатором. Тем самым (4.1) дает пример уравнения с довольно нерегулярным коэффициентом (абсолютно сходящийся ряд Фурье определяет непрерывную, но, вообще говоря, недифференцируемую функцию), но обладающего сколь угодно гладким решением, если гладкие начальные данные. 3. Реализацию оператора N можно осуществлять и в пространственном случае. Поле скорости нужно представить потенциалом простого слоя [3], получить аналог уравнения (1.3), из которого векторная плотность однозначно определяется, и записать динамическую систему (0.1). Оказывается, что многие свойства оператора «нормальная скорость» сохранятся. Таким образом, на плоскую постановку задачи можно смотреть как на модель-лоцман. 4. При постоянном σ задача об эволюции ограниченного объема жидкости в точной постановке изучена в [10] (см. цитируемую там литературу). В [11] при малом числе Марангони найдено асимптотически точное решение задачи о термокапиллярном разгоне сферической капли вязкой жидкости в другой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Изд-во АН СССР, 1954.
2. **Jonescu D. G.** La théorie des fonctions analytiques et l'hydrodynamique de liquides visqueux // Тр. междунар. симпоз. «Приложения теории функций в механике сплошной среды» (17—23 сент. 1963 г., Тбилиси)/Т. 2. Механика жидкости и газа, математические методы.— М.: Наука, 1965.
3. **Белоносов С. М., Черноус К. А.** Краевые задачи для уравнений Навье — Стокса.— М.: Наука, 1985.
4. **Антановский Л. К.** Комплексное представление решений уравнений Навье — Стокса // ДАН СССР.— 1981.— Т. 261, № 4.
5. **Антановский Л. К.** Точные решения задачи со свободной границей для системы Стокса // ДАН СССР.— 1983.— Т. 270, № 5.
6. **Антановский Л. К.** Изолированность решений одной задачи со свободной границей для системы Стокса // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1983.— Вып. 60.
7. **Антановский Л. К.** Методы теории функций комплексного переменного в гидромеханике вязкой жидкости со свободными границами.— Новосибирск, 1986.— Деп. в ВИНИТИ 28.03.86, № 2161—В.
8. **Антановский Л. К.** Краевые задачи со свободными границами для системы Стокса на плоскости // ДАН СССР.— 1986.— Т. 290, № 3.
9. **Налимов В. И.** Новая модель задачи Коши — Пуассона // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1972.— Вып. 12.
10. **Солонников В. А.** О неустановившемся движении конечной массы жидкости, ограниченной свободной поверхностью // Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР.— Л., 1986.— Т. 152.
11. **Антановский Л. К., Копбосынов Б. К.** Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 2.

Поступила 18/II 1987 г.

УДК 532.526

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ЛАМИНАРНЫХ СТРУЯХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

Г. И. Бурдэ

(*Пермь*)

Рассматривается истечение ламинарных струй не смешивающихся с окружающей средой жидкостей. Предполагается, что существует гладкая поверхность раздела истекающей и внешней жидкостей, обе жидкости считаются несжимаемыми, течение в струе и во внешней жидкости рассматривается в приближении пограничного слоя. В такой постановке эта задача решалась ранее с помощью приближенных методов: в [1—4] — с применением интегрального метода, в [5—7] — асимптотического метода, основанного на разложении по степеням $1/x$.

В настоящей работе для плоских и веерных свободных и полуограниченных струй указан класс точных решений, соответствующих случаю, когда отношение динамических вязкостей жидкостей обратно отношению их плотностей. Указанный класс решений распространяется и на слабозакрученные веерные струи.

1. Движение в истекающей и внешней жидкостях описывается уравнениями в приближении пограничного слоя (величины, относящиеся к истекающей жидкости, обозначаются индексом 1, к внешней жидкости — 2):

$$u_i\partial u_i/\partial x + v_i\partial u_i/\partial y = \nu_i\partial^2 u_i/\partial y^2, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^j u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(x^j v_i) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Здесь и далее $j = 0$ для плоских струй, $j = 1$ для веерных.