ПМТФ, № 2, 1975

УДК 539.376

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ НАГРЕВЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЛЕГКИМ УПРУГИМ НАПОЛНИТЕЛЕМ

Э. И. Григолюк, Б. Л. Пелех, Я. С. Подстригач

(*Москва, Львов*)

Рассматривается задача об определении экстремальных температурных полей в трехслойных цилиндрических оболочках, которые обеспечивают сравнительно низкий уровень температурных напряжений. Показано, что оптимальные температурные поля и возникающие температурные напряжения существенно зависят от механических характеристик оболочки. Ранее решение такого класса задач для однослойных изотропных оболочек в рамках классической теории Кирхгофа — Лява дано в работах [1, 2].

1. Исходные уравнения. Пусть бесконечная трехслойная цилиндрическая оболочка находится под воздействием осесимметричного постоянного по толщине температурного поля $T(x)$ (x — координата вдоль образующей; R, h — радиус оболочки, ее толщина; t, c — соответственно толщины несущих слоев и заполнителя). В этом случае, считая распределение тангенциальных перемещений несущих слоев постоянным по их толщине, исходные уравнения осесимметричной задачи термоупругости трехслойных оболочек с легким упругим заполнителем, воспринимающим лишь поперечный сдвиг, запишем в виде [3]

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \frac{2G_3}{cB}\left(\alpha - \frac{dw}{dx}\right) = 0; \tag{1.1}$$

$$C'\frac{d^3\alpha}{dx^3} + \frac{B(1-\mu^2)}{R}\left(\frac{w}{R} + \omega T\right) = 0,$$

где $B = \frac{Et}{1-\mu^2}$; $C' = \frac{Et(c+t)^2}{2(1-\mu^2)}$; E, μ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона несущих слоев; G_3 — модуль сдвига заполнителя; ω — коэффициент температурного расширения; $\alpha = \frac{u_1 - u_2}{c+t}$; u_1, u_2 — перемещения точек срединной поверхности верхнего и нижнего слоев.

Исключая из уравнений (1.1) прогиб w, придем к разрешающему уравнению относительно угла поворота

$$\frac{d^4\alpha}{d\xi^3} - 4\varkappa a^2\frac{d^2\alpha}{d\xi^2} + 4\alpha = -4a\omega R\frac{dT}{d\xi}, \tag{1.2}$$

где

$$\xi = ax;\ 4a^4 = B(1-\mu^2)/C'R^2;\ \varkappa = cB/2G_3.$$

По известной функции α прогиб находится из следующего выражения:

$$\frac{dw}{d\xi} = \frac{\alpha}{a} - \varkappa a\frac{d^2\alpha}{d\xi^2},$$

а суммарные кольцевое усилие и изгибающий момент трехслойной оболочки будут

$$N = -2B(1-\mu^2)\left(\frac{w}{R} + \omega T\right); \; M = -C'a\frac{d\alpha}{d\xi}. \tag{1.3}$$

2. Постановка задачи. Рассмотрим упругую энергию трехслойной оболочки [3]:

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left\{\int_{-1/2c}^{1/2c}\tau_{xz}\gamma_{xz}dz + \int_{1/2\,c}^{1/2\,c+t}[\sigma_x(e_x-\omega T) + \sigma_y(e_y-\omega T)]\,dz + \right. \tag{2.1}$$

$$\left. + \int_{-1/2c-t}^{-1/2c}[\sigma_x(e_x-\omega T) + \sigma_y(e_y-\omega T)]\,dz\right\}d\Omega,$$

где Ω — область изменения координат, соответствующая срединной поверхности.

Производя в (2.1) интегрирование с учетом распределения перемещений и напряжений по толщине слоев [3], получим

$$\Pi = \pi Ra\int_{-\infty}^{\infty}\left[G_2\frac{(c+t)^2}{c}\left(\alpha - a\frac{dw}{d\xi}\right)^2 + a^2C'\left(\frac{d\alpha}{d\xi}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + B(1-\mu^2)\left(\frac{w}{R} + \omega T\right)^2\right]d\xi.$$

Исключая с помощью уравнений (1.1) функции w и T, запишем выражение упругой энергии трехслойной оболочки в следующем окончательном виде:

$$\Pi = \pi RC'a^3\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^3\alpha}{d\xi^3}\right)^2 + a^2\varkappa\left(\frac{d^2\alpha}{d\xi^2}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{d\xi}\right)^2\right]d\xi. \tag{2.2}$$

Отметим, что упругая энергия оболочки является положительно определенной квадратичной формой от своих аргументов и обращается в нуль лишь в том случае, когда равны нулю температурные напряжения. В качестве критерия выделения оптимальных температурных полей, обеспечивающих сравнительно низкий уровень температурных напряжений, естественно принять условие стационарности упругой энергии оболочки (2.2).

Рассматриваем упругую энергию (2.2) как функционал, заданный на множестве функций α. Ставится задача отыскания функций $\alpha(x)$, обеспечивающих экстремум функционала (2.2) и удовлетворяющих уравнению (1.2), условиям затухания на бесконечности и некоторым дополнительным ограничениям на функции прогибов w, углов поворота α, перерезывающих усилий и моментов. Эти условия могут быть сведены к следующим условиям для функции в фиксированных сечениях оболочки $\xi = \xi_j (j=1, 2, \ldots, n)$:

$$a\frac{d^{(i)}\alpha(\xi_j)}{d\xi^i} = \alpha_{ij}, \quad a\int\left[\alpha\xi_j - \varkappa a^2\frac{d^2\alpha(\xi_j)}{d\xi^2}\right]d\xi = w_{ij}, \qquad (i=0, 1, 2). \tag{2.3}$$

Поставленная вариационная задача эквивалентна следующей изопериметрической задаче: найти экстремум функционала $\Pi(\alpha)$ на множестве функций $\alpha(x)$, на которых функционалы

$$\Pi_{ij}(\alpha) = (-1)^i a \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta^{(i)}(\xi - \xi_j)\,\alpha(\xi)\,d\xi;$$

$$\Pi_j(\alpha) = a \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha - \varkappa a^2 \frac{d^2\alpha}{d\xi^2}\right] S_+(\xi_j - \xi)\,dx$$

принимают заданные значения

$$\Pi_{ij}(\xi_j) = \alpha_{ij};\quad \Pi_j(\xi_j) = w_j.$$

Здесь $\delta^{(i)}(\xi)$ — i — производная от дельта-функции; $S_+(\xi)$ — функция скачка.

Сформулированная задача сводится к нахождению абсолютного экстремума функционала [1, 4]:

$$\Pi_*(\alpha) = \frac{\pi RC'a}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{\left(\frac{d^3\alpha}{d\xi^3}\right)^2 + 4\varkappa a^2 \left(\frac{d^2\alpha}{d\xi^2}\right)^2 + 4\left(\frac{d\alpha}{d\xi}\right)^2 - \right.$$
$$- 2a'\left[\alpha \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{2} \lambda_{ij}\delta^{(i)}(\xi - \xi_j) + \left(\alpha - \varkappa a^2 \frac{d^2\alpha}{d\xi^2}\right) \times \right.$$
$$\left.\left. \times \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_+(\xi_j - \xi)\right]\right\} d\xi, \tag{2.4}$$

где $a' = aR$; λ_{ij}, λ_j — произвольные постоянные, подлежащие определению.

Составляя для функционала (2.4) уравнение Эйлера

$$\frac{d^6\alpha}{d\xi^6} - 4\varkappa a^2 \frac{d^4\alpha}{d\xi^4} + 4\frac{d^2\alpha}{d\xi^2} = -a' \sum_{j=1}^{n} \left\{\sum_{i=0}^{2} \lambda_{ij}\delta^{(i)}(\xi - \xi_j) + \right.$$
$$\left. + [\lambda_j S_+(\xi_j - \xi) - \varkappa a^2 \lambda_j \delta'(\xi - \xi_j)]\right\}, \tag{2.5}$$

получим совместно с разрешающим уравнением (1.2) и условиями (2.3) полную систему уравнений для определения функций $\alpha(\xi)$, $T(\xi)$, следовательно, интересующих нас величин кольцевого усилия, изгибающего момента и множителей Лагранжа λ_{ij}, λ_j.

3. Решение экстремальной задачи. В силу (1.2) из (2.6) получим следующее уравнение для определения экстремального температурного поля:

$$\frac{d^3T}{d\xi^3} = \frac{1}{4\omega} \sum_{j=1}^{n} \left\{\sum_{i=0}^{2} \lambda_{ij}\delta^{(i)}(\xi - \xi_j) + \lambda_j [S_+(\xi_j - \xi) - \varkappa a^2 \delta'(\xi - \xi_j)]\right\}. \tag{3.1}$$

Решения уравнений (1.2) и (3.1), исчезающие на бесконечности, найдем, применяя преобразование Фурье. При этом для температуры получим выражение

$$T(\xi) = \frac{1}{8\omega} \sum_{j=1}^{n} \left\{\lambda_j \frac{(\xi - \xi_j)^3}{6} - \varkappa a^2 (\xi - \xi_j) + \lambda_{0j} \frac{(\xi - \xi_j)^2}{2} + \right.$$
$$\left. + \lambda_{1j}(\xi - \xi_j) + \lambda_{2j}\right\} \operatorname{sgn}(\xi - \xi_j).$$

В зависимости от корней характеристического уравнения

$$k^4 + 4\varkappa a^2 k^2 + 4 = 0$$

решение для функции $\alpha(\xi)$ может быть разным. В случае комплексных корней

$$k_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-2\varkappa a^2 \pm \sqrt{(2\varkappa a^2)^2 - 4}} = \pm (r \pm is)$$

$$\left(r = \sqrt{1 - \varkappa a^2}; \quad s = \sqrt{1 + \varkappa a^2}\right)$$

это решение будет следующим:

$$\alpha(\xi) = -\frac{a'}{8} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left[\frac{\lambda_j}{2} ((\xi - \xi_j)^2 - 2\varkappa a^2) + \lambda_{0j} (\xi - \xi_j) + \right.\right.$$

$$\left. + \lambda_{1j} \right] \operatorname{sgn}(\xi - \xi_j) + \frac{e^{-s|\xi - \xi_j|}}{rs} \left[\frac{\lambda_j}{2} (2\varkappa a^2 rs \cos r(\xi - \xi_j) + \right.$$

$$+ (1 - 2\varkappa^2 a^4) \sin r|\xi - \xi_j|) + \frac{\lambda_{0j}}{2} ((1 + 2\varkappa a^2) r \cos r(\xi - \xi_j) -$$

$$- (1 - 2\varkappa a^2) s \sin r|\xi - \xi_j|) - \lambda_{1j} (rs \cos r(\xi - \xi_j) +$$

$$+ \varkappa a^2 \sin r|\xi - \xi_j|) \operatorname{sgn}(\xi - \xi_j) + \lambda_{2j} (r \cos r(\xi - \xi_j) +$$

$$\left.\left. + s \sin r|\xi - \xi_j|) \right] \right\}.$$

По известным функциям $T(\xi)$ и $\alpha(\xi)$, согласно (1.3), находятся усилия и моменты в оболочке. При этом из условий на бесконечности и условий непрерывности определены ограничения, накладываемые на множители Лагранжа:

$$\sum_{j=1}^{n} [\lambda_j (\xi_j^3 - 6\varkappa a^2 \xi_j) - 3\lambda_{0j} \xi_j^2 - 6\lambda_{1j} \xi_j - 6\lambda_{2j}] = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{n} [\lambda_j (\xi_j^2 - 2\varkappa a^2) - 2\lambda_{0j} \xi_j + 2\lambda_{1j}] = 0;$$

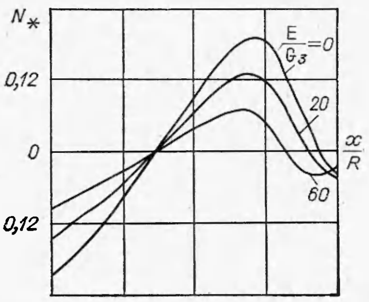
$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j \xi_j - \lambda_{0j}) = 0; \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0.$$

4. Локальный нагрев трехслойной цилиндрической оболочки. В качестве примера рассмотрим задачу о локальном нагреве трехслойной цилиндрической оболочки с легким упругим заполнителем. Пусть температура нагрева в сечении $\xi = 0$ достигает максимального значения T_0, а в сечениях $\xi = \xi_0$ равна нулю. Тогда семейство симметричных относительно сечения $\xi = 0$ экстремальных температурных полей будет таким:

$$T(\xi) = \frac{T_0}{1 + 12 \frac{\varkappa a^2}{\xi_0^2}} \left\{ 2 \left| \frac{\xi}{\xi_0} \right|^3 - 3 \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 + 1 + 12 \frac{\varkappa a^2}{\xi_0^2} (|\xi| - \xi_0) \right\} \tag{4.1}$$

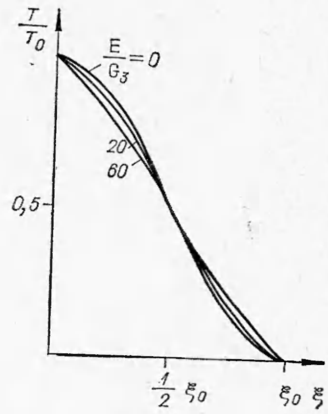
при $|\xi| \leqslant \xi_0$; $T(\xi) = 0$ при $|\xi| \geqslant \xi_0$.

Видно, что распределение (4.1) зависит от отношения модуля Юнга несущих слоев E к модулю сдвига заполнителя G_3, соотношения между толщинами слоев t/c и относительной толщины пакета h/R.



Фиг. 1

Фиг. 2



В пределе при $E/G_3 \to 0$ (заполнитель абсолютно жесткий на сдвиг)

$$\lim_{\varkappa \to 0} T(\xi) = T_0 \left[2 \left| \frac{\xi}{\xi_0} \right|^3 - 3 \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 + 1 \right],$$

что совпадает с соответствующим результатом [1] в теории тонких изотропных оболочек, полученным на основе классической теории Кирхгофа — Лява.

На фиг. 1 изображены профили оптимальных температурных полей $T_* = T/T_0$ для трехслойной цилиндрической оболочки со следующими характеристиками:

$$h/R = 1/20;\ t/c = 1/25;\ \mu = 0{,}3$$

в зависимости от соотношения жесткостей E/G_3. Случай $E/G_3 = 0$ отвечает решению [1].

На фиг. 2 представлены графики безразмерных величин кольцевых сил $N_* = N/B(1 - \mu^2)\omega T_0$, вычисленных по найденному распределению температуры (4.1). Из приведенных расчетов видно, что с увеличением отношения E/G_3 профили температурных полей изменяются незначительно, однако расчетные усилия существенно уменьшаются.

Поступила 25 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. **Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С.** Об одной экстремальной задаче термоупругости для бесконечной цилиндрической оболочки.— «Докл. АН СССР», 1967, т. 174, № 3.
2. **Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С.** Постановка и решение некоторых вариационных задач термоупругости тонких оболочек применительно к выбору оптимальных режимов местной термообработки.— ПМТФ, 1968, № 4.
3. **Григолюк Э. И.** Уравнения трехслойных оболочек с легким упругим заполнителем.— «Изв. АН СССР. Мех. и машиностр.», 1957, № 3.
4. **Гельфанд И. М., Фомин С. В.** Вариационное псчисление. М., Физматгиз, 1961.