

Значения E , вычисленные по этой формуле, практически совпадают с результатами, представленными на фиг. 2, 3. В частности, для течения разрезания из (3.3) следует, что при $\gamma = 1/2$ $E = 0$.

4. Пусть $x < 0$, тогда, как следует из (1.5), величины β и γ должны иметь противоположные знаки. Так как при $x \rightarrow -\infty$ толщина неровности $f(x) \rightarrow 0$, то $|d(x)| > 0$ и, следовательно, $\beta > 0$ и $\gamma < 0$.

Здесь, как и в п. 3, исходная краевая задача (1.2) может принимать автомодельный вид только при $-x \gg 1$:

$$(4.1) \quad \varphi''' = -1 + \gamma n^2 \varphi'' - n \varphi' + \varphi, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = E, \\ \varphi''(\infty) = 0, \quad \varphi(\infty) = 1.$$

Необходимо отметить, что эта краевая задача отличается от (3.1) только знаком перед членом $\gamma n^2 \varphi''$.

Для функции $z(n) = \varphi''(n) \exp(-\gamma n^3/6)$ при $n \rightarrow \infty$ можно получить уравнение $z'' - \gamma^2 n^4 z/4 = 0$, решение которого выражается через модифицированные функции Бесселя [6]. Учитывая, что при $n \rightarrow \infty$ функция $z(n)$ должна убывать, можно получить

$$z(n) \sim n^{1/2} K_{1/6}(\gamma n^3/6).$$

Тогда из асимптотического представления функции $K_{1/6}(\gamma n^3/6)$ при $n \rightarrow \infty$ следует, что $\varphi''(n) \rightarrow \text{const}$. Краевое условие $\varphi''(\infty) = 0$ дает тогда решение вида $\varphi''(n) \equiv 0$, которое не удовлетворяет остальным краевым условиям задачи (4.1), и, значит, краевая задача (4.1) решения не имеет. Это доказывает, что исходная краевая задача (1.2) не имеет автомодельных решений для неровностей, простирающихся неограниченно далеко вверх по потоку.

Поступила 21 VII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголепов В. В., Нейланд В. Я. Обтекание малых неровностей на поверхности тела сверхзвуковым потоком вязкого газа. — Труды ЦАГИ, 1971, вып. 1363.
2. Hunt J. C. V. A theory for the laminar wake of two-dimensional body in boundary layer. — J. Fluid Mech., 1971, vol. 49, pt 1.
3. Боголепов В. В. Расчет взаимодействия сверхзвукового пограничного слоя с тонким препятствием. — Учен. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 6.
4. Боголепов В. В., Нейланд В. Я. Исследование локальных возмущений вязких сверхзвуковых течений. — В сб.: Аэромеханика. М.: Наука, 1976.
5. Боголепов В. В. Исследование предельных решений для случая обтекания малых неровностей на поверхности тела сверхзвуковым потоком вязкого газа. — Труды ЦАГИ, 1977, вып. 1812.
6. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.

УДК 533.6.12

О ВОЗМУЩЕНИЯХ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ЗАКРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТАХ

Е. В. Богданова, О. С. Рыжов
(Москва)

1. Следуя [1, 2], воспользуемся теорией свободного взаимодействия [3—5] для изучения длинноволновых возмущений на входе в плоский полубесконечный канал. Источником возмущений будем считать два гармонических осциллятора, расположенных на противоположных стенках. Чтобы задать характерную частоту генерируемых ими колебаний, введем малый параметр $\varepsilon = R^{-1/5}$, где число Рейнольдса R вычислено по ширине канала b^* , скорости U_∞^* потока на его входе и кинематической вязкости

v^* . Согласно основным концепциям теории свободного взаимодействия, частота $\omega^* = O(\varepsilon U_\infty^*/b^*)$. Что касается места установки осцилляторов длиной $l^* = O(b^*)$, то зададим его на расстоянии $L^* = O(\varepsilon^{-3}b^*)$ от входного отверстия.

Поле скоростей по обе стороны от центральной оси сосуда, которую совместим с осью x^* декартовой системы координат x^*, y^* , разобьем на три области. В областях 1 и 2, образующих ядро потока, возмущения имеют потенциальный характер. Области 3 и 4 составляют основную толщину пограничных слоев у стенок канала, в них возмущения остаются локально невязкими, по содержат вихри. Природа возмущенного движения в узких пристеночных слоях 5 и 6 существенно зависит от вязкости жидкости, здесь уже нельзя пренебречь касательными напряжениями.

Обозначим через t^* время, u^* и v^* — компоненты вектора скорости, ρ^* — плотность, p^* — давление, в котором выделим постоянную часть p_∞^* . В дальнейшем области 1 и 2 целесообразно объединить в одну область 0, полагая в ней

$$(1.1) \quad t^* = \varepsilon^{-1} \frac{b^*}{U_\infty^*} t, \quad x^* = b^* (\varepsilon^{-3} x_e + x), \quad y^* = b^* y_0,$$

$$u^* = U_\infty^* [1 + \varepsilon^2 u_0(t, x, y_0) + \dots],$$

$$v^* = U_\infty^* [\varepsilon^2 v_0(t, x, y_0) + \dots],$$

$$p^* = p_\infty^* + \rho^* U_\infty^{*2} [\varepsilon^2 p_0(t, x, y_0) + \dots].$$

Подстановка написанных формул в уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости дает

$$(1.2) \quad \partial p_0 / \partial x - \partial v_0 / \partial y_0 = 0, \quad \partial p_0 / \partial y_0 + \partial v_0 / \partial x = 0,$$

$$u_0 = -p_0,$$

откуда заключаем, что функции p_0 и v_0 являются гармонически сопряженными.

Как обычно в теории свободного взаимодействия, асимптотические уравнения для избыточных параметров жидкости в областях 3 и 4 интегрируются в явном виде [3—5]. Опустим соответствующие соотношения, так как в дальнейшем их знать не требуется.

Независимые переменные и искомые функции в прилегающих к стенкам слоях 5 и 6 введем следующим образом:

$$(1.3) \quad t^* = \varepsilon^{-1} \frac{b^*}{U_\infty^*} t, \quad x^* = b^* (\varepsilon^{-3} x_e + x), \quad y^* = b^* \left(\mp \frac{1}{2} + \varepsilon^2 y_{5,6} \right),$$

$$u^* = U_\infty^* [\varepsilon u_{5,6}(t, x, y_{5,6}) + \dots], \quad v^* = U_\infty^* [\varepsilon^3 v_{5,6}(t, x, y_{5,6}) + \dots],$$

$$p^* = p_\infty^* + \rho^* U_\infty^{*2} [\varepsilon^2 p_{5,6}(t, x, y_{5,6}) + \dots].$$

Безразмерные функции здесь удовлетворяют уравнениям Прандтля

$$(1.4) \quad \partial u_{5,6} / \partial x + \partial v_{5,6} / \partial y_{5,6} = 0, \quad \partial p_{5,6} / \partial y_{5,6} = 0,$$

$$\partial u_{5,6} / \partial t + u_{5,6} \partial u_{5,6} / \partial x + v_{5,6} \partial u_{5,6} / \partial y_{5,6} = -\partial p_{5,6} / \partial x + \partial^2 u_{5,6} / \partial y_{5,6}^2,$$

в которых градиент $\partial p_{5,6} / \partial x$ самоиндуцированного давления находится из условий срачивания разложений (1.1), (1.3) через промежуточные области 3 и 4.

Пусть $\lambda = 0,3321$ — постоянная, задающая поверхностное трение в решении Блазиуса для пограничного слоя на плоской пластинке [6], а $A_3(t, x)$ и $A_4(t, x)$ — произвольные функции, пропорциональные отклонениям линий тока от горизонтальных прямых в соответствующих областях. Получающиеся в процессе срачивания граничные условия при $y_0 = \mp 1/2$ дают

$$(1.5) \quad \partial p_{5,6} / \partial x = \partial v_0 / \partial y_0, \quad v_0 = -\partial A_{3,4} / \partial x.$$

Кроме того, при $y_{5,6} \rightarrow \pm \infty$ имеем

$$(1.6) \quad u_{5,6} \mp (\lambda/\sqrt{x_2})y_{5,6} \rightarrow \pm (\lambda/\sqrt{x_2})A_{3,4}(t, x).$$

Во всех трех рассматриваемых областях 0, 5 и 6 возмущения должны затухать на бесконечности вверх по потоку.

Остается записать условие прилипания жидкости к обтекаемым ею поверхностям. Обозначив амплитуду колебаний осцилляторов посредством $\varepsilon^2 ab^*$, зададим их форму в виде

$$y^* \pm \frac{1}{2} b^* = \varepsilon^2 ab^* e^{i\omega t} h_{5,6} \left(\frac{x^* - \varepsilon^{-3} x_e b^*}{b^*} \right).$$

Так как безразмерная частота $\omega = \varepsilon^{-1} b^* \omega^*/U_\infty^*$, то

$$(1.7) \quad u_{5,6} = 0, \quad v_{5,6} = ia\omega e^{i\omega t} h_{5,6}(x) \text{ при } y_{5,6} = ae^{i\omega t} h_{5,6}(x).$$

2. Положим амплитудный фактор $a \ll 1$. Пропорциональными ему можно считать смещения линий тока и избыточное давление, т. е.

$$(2.1) \quad (A_{3,4}, p_{5,6}) = ae^{i\omega t} [A'_{3,4}(x), p'_{5,6}(x)].$$

Аналогичный вид имеет вертикальная составляющая $v_0 = ae^{i\omega t} v'_0(x, y_0)$ скорости в центральной области 0, где она в силу (1.2) удовлетворяет уравнению Лапласа. Разложим отмеченные штрихом функции в интегралы Фурье по продольной координате:

$$(2.2) \quad [\bar{A}_{3,4}(k), \bar{p}_{5,6}(k), \bar{v}_0(k, y_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} [A'_{3,4}(x), p'_{5,6}(x), v'_0(x, y_0)] dx.$$

Обозначив через b и d произвольные постоянные, находим $\bar{v}_0 = be^{ky_0} + de^{-ky_0}$. Из краевых условий (1.5) при $y_0 = \mp 1/2$ следует

$$(2.3) \quad ik\bar{A}_{3,4} = -(be^{\mp(1/2)k} + de^{\pm(1/2)k}), \quad i\bar{p}_{5,6} = be^{\mp(1/2)k} - de^{\pm(1/2)k}.$$

Поле скоростей в пристеночных слоях 5 и 6 представим как

$$(2.4) \quad (u_{5,6} \mp \mu_e y_{5,6}, v_{5,6}) = ae^{i\omega t} [u'_{5,6}(x, y_{5,6}), v'_{5,6}(x, y_{5,6})],$$

где постоянная $\mu_e = \lambda x_e^{-1/2}$. Подстановка формул (2.4) в уравнения Прандтля позволяет линеаризовать последние по амплитуде возмущений a . Определяемые линейными уравнениями функции $u'_{5,6}$ и $v'_{5,6}$ разложим в интегралы Фурье вида (2.2), а их образы $\bar{u}_{5,6}(k, y_{5,6})$ и $\bar{v}_{5,6}(k, y_{5,6})$ выразим при помощи соотношений

$$\bar{u}_{5,6} = -df_{5,6}/dy_{5,6}, \quad \bar{v}_{5,6} = ikf_{5,6}(k, y_{5,6}).$$

Линеаризация уравнений (1.4), вывод обыкновенных дифференциальных уравнений для функций f_5 и f_6 и интегрирование последних следует канве, намеченной в [7]. Граничные условия прилипания

$$(2.5) \quad f_{5,6} = (\omega/k)\bar{h}_{5,6}, \quad df_{5,6}/dy_{5,6} = \pm \mu_e \bar{h}_{5,6} \text{ при } y_{5,6} = 0$$

вытекают из (1.7), причем $\bar{h}_{5,6}(k)$ означают фурье-образы осцилляторов $h_{5,6}(x)$ на нижней и верхней стенках. Введем комплексные переменные

$$z_{5,6} = \zeta \pm i^{1/3}(\mu_e k)^{1/3} y_{5,6}, \quad \zeta = i^{1/3} \omega (\mu_e k)^{-2/3}.$$

В результате имеем производные

$$(2.6) \quad \frac{df_5}{dz_5} = i^{-1/3} k^{-1/3} \mu_e^{2/3} \bar{h}_5 - \mu_e^{-1} \bar{p}_5 \left[\frac{dAi(\zeta)}{dz_5} \right]^{-1} \int_{\zeta}^{z_5} Ai(z) dz,$$

$$\frac{df_6}{dz_6} = i^{-1/3} k^{-1/3} \mu_e^{2/3} \bar{h}_6 - \mu_e^{-1} \bar{p}_6 \left[\frac{dAi(\zeta)}{dz_6} \right]^{-1} \int_{\zeta}^{z_6} Ai(z) dz,$$

удовлетворяющие вторым условиям (2.5). Интегрирование формул (2.6) дает функции f_5 и f_6 , которые подчиняются первым из названных условий.

Остается учесть требования (1.6) на внешних краях пограничных слоев. В новых переменных

$$df_{5,6}/dz_{5,6} = -i^{1/3}k^{-1/3}\mu_e^{2/3}\bar{A}_{5,6} \text{ при } |z_{5,6}| \rightarrow \infty,$$

откуда выводим связи

$$\bar{A}_3 = -\bar{h}_5 + i^{1/3}k^{1/3}\mu_e^{-5/3}\Phi^{-1}(\zeta)\bar{p}_5,$$

$$\bar{A}_4 = -\bar{h}_6 - i^{1/3}k^{1/3}\mu_e^{-5/3}\Phi^{-1}(\zeta)\bar{p}_6, \quad \Phi(\zeta) = \frac{dAi(\zeta)}{dz} \left[\int_{\zeta}^{\infty} Ai(z) dz \right]^{-1}$$

между величинами $\bar{A}_{3,4}$ и $\bar{p}_{5,6}$. Подставляя в них соотношения (2.3), получим неоднородные линейные уравнения, определяющие постоянные b и d :

$$(2.7) \quad b = -\frac{1}{4} ik\Phi(\zeta) \times \\ \times \frac{[\Phi(\zeta)\bar{h}_- + i^{1/3}k^{4/3}\mu_e^{5/3}\bar{h}_+] \operatorname{ch} \frac{k}{2} - [\Phi(\zeta)\bar{h}_+ + i^{1/3}k^{4/3}\mu_e^{5/3}\bar{h}_-] \operatorname{sh} \frac{k}{2}}{[\Phi(\zeta) \operatorname{ch} \frac{k}{2} - i^{1/3}k^{4/3}\mu_e^{5/3} \operatorname{sh} \frac{k}{2}] [\Phi(\zeta) \operatorname{sh} \frac{k}{2} - i^{1/3}k^{4/3}\mu_e^{5/3} \operatorname{ch} \frac{k}{2}]}, \\ d = \frac{1}{4} ik\Phi(\zeta) \frac{[\Phi(\zeta)\bar{h}_- - i^{1/3}k^{4/3}\mu_e^{5/3}\bar{h}_+] \operatorname{ch} \frac{k}{2} + [\Phi(\zeta)\bar{h}_+ - i^{1/3}k^{4/3}\mu_e^{5/3}\bar{h}_-] \operatorname{sh} \frac{k}{2}}{[\Phi(\zeta) \operatorname{ch} \frac{k}{2} - i^{1/3}k^{4/3}\mu_e^{5/3} \operatorname{sh} \frac{k}{2}] [\Phi(\zeta) \operatorname{sh} \frac{k}{2} - i^{1/3}k^{4/3}\mu_e^{5/3} \operatorname{ch} \frac{k}{2}]}, \\ \bar{h}_+ = \bar{h}_5 + \bar{h}_6, \quad \bar{h}_- = \bar{h}_5 - \bar{h}_6.$$

3. Если приравнять нулю знаменатель правых частей в (2.7), то получатся два дисперсионных соотношения

$$(3.1) \quad \mu_e^{5/3}\Phi(\zeta) = k(ik)^{1/3} \operatorname{cth}(k/2), \quad \mu_e^{5/3}\Phi(\zeta) = k(ik)^{1/3} \operatorname{th}(k/2)$$

для частот и волновых чисел свободных симметричных и антисимметричных колебаний соответственно. Приведем вкратце свойства корней (3.1) на плоскости комплексного переменного k с вырезанной положительной мнимой полуосью, считая регулярную ветвь трехзначной функции $k^{1/3}$ заданной условиями $-\pi/2 \leq \arg k \leq \pi/2$.

Если фиксировать ω , то как для симметричных, так и для антисимметричных колебаний существуют четыре бесконечные последовательности собственных волновых чисел. Первая из них проще всего находится по результатам [8] для пограничного слоя на изолированной пластинке сначала на плоскости ζ . Обозначим $\arg \zeta = \vartheta = \pi + \vartheta'$ и положим $|\zeta| \rightarrow \infty$, в то время как $\vartheta'|\zeta|^{3/2} \rightarrow 0$. Для любого корня с номером $j \rightarrow \infty$ имеем

$$(3.2) \quad |\zeta_j| = [(3\pi/2)(j + 1/4)]^{2/3}.$$

Симметричные колебания характеризуются равенством

$$(3.3) \quad \vartheta'_{sj} = (-1)^j \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \mu_e^{-5/3} \left[\frac{3\pi}{2} \left(j + \frac{1}{4} \right) \right]^{-7/6} k^{1/3},$$

а для антисимметричных волн справедлива формула

$$(3.4) \quad \vartheta'_{aj} = (-1)^{j+1} \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \mu_e^{-5/3} \left[\frac{3\pi}{2} \left(j + \frac{1}{4} \right) \right]^{-7/6} k^{7/3}.$$

Таким образом, каждое из дисперсионных соотношений (3.1) обладает бесконечной последовательностью корней k_j в окрестности луча $\arg k = -5\pi/4$ с точкой сгущения в начале координат.

Наличие еще трех бесконечных последовательностей корней в комплексной плоскости k обусловлено вхождением гиперболических функций

в правые части (3.1). Две из этих последовательностей расположены вдоль берегов разреза $\arg k = \pi/2$ и $\arg k = -3\pi/2$, а одна — в окрестности отрицательной мнимой полуоси. Пусть $l = -1, 0, 1$, тогда собственное волновое число с номером $n \rightarrow \infty$ в симметричных колебаниях устанавливается равенством

$$(3.5) \quad k_{sn}^{(l)} = 2(n+1)\pi e^{i\pi(l-1/2)} + \Delta k_{sn}^{(l)},$$

$$\Delta k_{sn}^{(l)} = -2 \cdot 3^{2/3} \pi^{-4/3} \Gamma^{-1}(1/3) \mu_e^{5/3} (2n+1)^{-4/3} e^{i\pi(1/2-(4/3)l)},$$

а в антисимметричных возмущениях задается формулой

$$(3.6) \quad k_{an}^{(l)} = 2n\pi e^{i\pi(l-1/2)} + \Delta k_{an}^{(l)},$$

$$\Delta k_{an}^{(l)} = -2 \cdot 3^{2/3} \pi^{-4/3} \Gamma^{-1}(1/3) \mu_e^{5/3} (2n)^{-4/3} e^{i\pi(1/2-(4/3)l)}.$$

Обратимся теперь к основным представлениям линейной теории устойчивости, результаты которой для длинноволновых возмущений при $R \rightarrow \infty$ совпадают с таковыми из теории свободного взаимодействия [9, 10]. С этой целью будем считать k действительной отрицательной величиной и рассмотрим корни дисперсионных соотношений (3.1) на комплексной плоскости. Вычисления показывают, что при любом μ_e мнимая часть у первого корня ω_1 из последовательностей, асимптотика «хвостов» которых описывается формулами (3.2), (3.3) и (3.2), (3.4), меняет знак, когда k переходит через некоторое критическое значение k_* . Как упомянуто в [2], сами критические значения $\omega_* < 0$ и $k_* < 0$ можно найти простым пересчетом по имеющимся данным для несжимаемого пограничного слоя на изолированной пластинке. Так, для симметричных собственных колебаний $\omega_{s*} = 0,5736$, $k_{s*} = -0,1248$, а для антисимметричных возмущений $\omega_{a*} = 2,9270$, $k_{a*} = -1,4382$ при $\mu_e = 1$. Существование, что $\omega_{s*} < \omega_{a*}$ при любом $\mu_e = O(1)$. Из пересечения кривыми $\omega_1(k)$ оси абсцисс вытекает, что амплитуда первой моды как симметричных, так и антисимметричных волн может и вырождаться со временем, и экспоненциально нарастать. Все остальные моды оказываются устойчивыми. Что касается корней из последовательностей с асимптотиками (3.5), (3.6), то они аналогов в плоскости ω не имеют.

Рассмотрим обратные преобразования Фурье

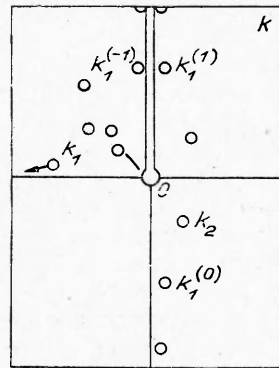
$$(3.7) \quad [A'_{3,4}(x), p'_{5,6}(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} [\bar{A}_{3,4}(k), \bar{p}_{5,6}(k)] dk$$

на плоскости комплексного переменного k с вырезанной положительной мнимой полуосью. Формулы (2.1) вместе с (2.3), (2.7) завершают построение линий тока и избыточного давления с учетом их изменения во времени.

Схематически расположение корней каждого из дисперсионных соотношений (3.1) для $\mu_e = O(1)$ изображено на фиг. 1. Варьирование ω влечет за собой качественное изменение демонстрируемой картины лишь в одном отношении: корень $k_1(\omega)$ перемещается из одной полуплоскости в другую. Направление его движения с возрастанием ω следует стрелке. Очевидно, $\text{Re } k_1 = k_*$, $\text{Im } k_1 = 0$ при $\omega = \omega_*$. Корень $k_2(\omega)$ всегда находится в нижней полуплоскости, причем $\text{Re } k_1 = 0$ при $\omega = 0$.

4. Поскольку $\omega_{s*} < \omega_{a*}$, будем сначала считать, что частота осцилляторов $\omega < \omega_{s*}$. Поле возмущений в области $x < 0$, простирающейся вверх по потоку от источников, проще всего получить, если воспользоваться замкнутым контуром, который включает дугу полуокружности в нижней полуплоскости k со стремящимся к бесконечности радиусом. Обозначим подынтегральную функцию из (3.7) посредством

$$(4.1) \quad \Psi(k) = (1/2\pi) e^{ikx} [\bar{A}_{3,4}(k), \bar{p}_{5,6}(k)].$$



Ф и г. 1

На основании леммы Жордана и теоремы Коши о вычетах имеем

$$(4.2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k) dk = -2\pi i [\operatorname{res} \Psi(k_{s2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res} \Psi(k_{sn}^{(0)}) + \\ + \operatorname{res} \Psi(k_{a2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res} \Psi(k_{cn}^{(0)})].$$

Полученный результат допускает наглядную интерпретацию: вверх по потоку от осцилляторов возмущения распространяются в виде симметричной и антисимметричной волн Толлмина — Шлихтинга, обусловленных корнями k_{s2} и k_{a2} из последовательностей (3.2), (3.3) и (3.2), (3.4), и двух бесконечных дуг таких волн, которые связаны с корнями, принадлежащими последовательностям (3.5), (3.6).

Чтобы изучить возмущения в области $x > 0$, уходящей вниз по потоку за источники звука, применим замкнутый контур, включающий дугу полуокружности в верхней полуплоскости k со стремящимся к бесконечности радиусом. Берега разреза вдоль положительной мнимой полуоси с $\arg k = \pi/2$ и $\arg k = -3\pi/2$ обозначим через L_1 и L_2 соответственно. В результате

$$(4.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k) dk = -I_1 + I_2 + 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{res} \Psi(k_{sj}) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res} \Psi(k_{sn}^{(-1)}) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res} \Psi(k_{sn}^{(1)}) + \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{res} \Psi(k_{aj}) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res} \Psi(k_{an}^{(-1)}) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res} \Psi(k_{an}^{(1)}) \right], \\ I_1 = \int_{L_1} \Psi(k) dk, \quad I_2 = \int_{L_2} \Psi(k) dk,$$

где штрих указывает на пропуск в суммировании индекса $j = 2$.

Таким образом, природа сносимых вниз по потоку возмущений двойка. Обусловленная вычетами часть состоит из шести бесконечных последовательностей симметричных и антисимметричных волн Толлмина — Шлихтинга, параметры которых определяются собственными функциями задачи о свободных колебаниях. Спектр волновых чисел каждой из последовательностей дискретен. Наоборот, другая часть возмущений с параметрами, задаваемыми интегралами I_1 и I_2 по берегам разреза, характеризуется непрерывным спектром.

При $\omega \rightarrow \omega_{s*}$ декремент затухания в $\exp(ik_{s1}x)$, входящей в $\operatorname{res} \Psi(k_{s1})$, становится как угодно малым, в связи с чем амплитуда возмущений чрезвычайно медленно падает вниз по потоку от осцилляторов. Когда $\omega = \omega_{s1}$, корень $k_{s2} = k_{c*}$ совпадает с одной из точек отрицательной полуоси абсцисс. В этом случае формальное применение аппарата интегральных преобразований ведет к заключению, что из правой части (4.3) необходимо вычесть $\pi i \operatorname{res} \Psi(k_{c*})$ и перенести эту величину с обратным знаком в правую часть (4.2). Амплитуда колебаний получается постоянной вдоль всей длины канала, за исключением небольшой окрестности источников звука. Если $\omega_{a*} > \omega > \omega_{s*}$, то корень k_{s1} перемещается в нижнюю полуплоскость, в связи с чем из выражения (4.3) целиком исчезает член $2\pi i \operatorname{res} \Psi(k_{s1})$, который необходимо добавить с отрицательным знаком к выражению (4.2). Пока ω не слишком превосходит ω_{s*} , амплитуда генерируемых волн увеличивается весьма умеренно в области вверх по потоку от осцилляторов.

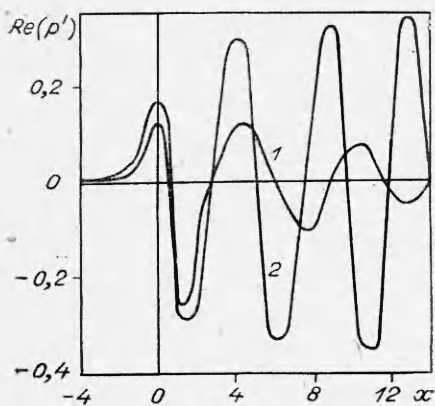
Аналогичная картина имеет место при дальнейшем увеличении частоты. Действительно, при $\omega \rightarrow \omega_{a*}$ неограниченно уменьшается декремент затухания в $\exp(ik_{a1}x)$ из $\operatorname{res} \Psi(k_{a1})$. Когда $\omega = \omega_{a*}$, на отрицательную полуось абсцисс попадает корень $k_{a1} = k_{a*}$. Кроме члена

$2\pi i \operatorname{res} \Psi(k_{s1})$, из правой части (4.3) следует вычесть $\pi i \operatorname{res} \Psi(k_{a1})$, причем обе эти величины надлежит перенести в правую часть (4.2) с обратным знаком. Амплитуда колебаний остается постоянной по длине сосуда вверх по потоку от осцилляторов и экспоненциально нарастает вниз по потоку от них. Если $\omega > \omega_{a*}$, то в нижнюю полуплоскость переходит также корень k_{a1} . В этом случае из выражения (4.3) вместе с $2\pi i \operatorname{res} \Psi(k_{s1})$ выпадает еще целиком $2\pi i \operatorname{res} \Psi(k_{a1})$, оба члена следует добавить к выражению (4.2) с отрицательным знаком. Таким образом, при $\omega > \omega_{a*}$ ростом амплитуды излучаемых волн управляют уже обе экспоненты $\exp(ik_{s1}x)$ и $\exp(ik_{a1}x)$.

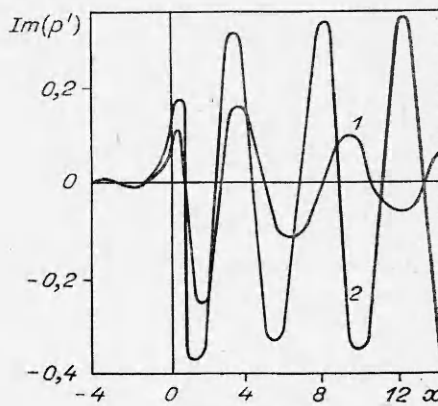
По поводу даваемой аппаратом интегральных преобразований картины возмущений необходимо сделать два замечания. Во-первых, ни в одном из проведенных до сих пор экспериментов не было обнаружено резкого увеличения интенсивности передаваемых вверх по потоку сигналов, когда частота колебаний переходит через одно из критических значений ω_{s*} или ω_{a*} . Таковые данные отсутствуют также для вынужденных колебаний в пограничном слое и развитом вязком течении в канале или трубе. Во-вторых, при $\omega > \omega_{s*}$ и тем более $\omega > \omega_{a*}$ решение рассматриваемой линейной задачи необходимо искать в классе функций с экспоненциальным ростом по продольной координате x , чтобы получить наблюдаемое нарастание амплитуды возмущений вниз по потоку, которое вызывает возникновение турбулентных пульсаций. Естественно, в названном классе теоремы, гарантирующие единственность решения, отсутствуют. Однако, как обращалось внимание в [11], классическое решение с вырождающимся при $x \rightarrow +\infty$ полем возмущений с физической точки зрения неприемлемо.

Чтобы обеспечить единственный выбор решения при закритических частотах осцилляторов, необходим дополнительный постулат. Как подсказывают опыты, никаких внезапных изменений (по крайней мере на умеренных расстояниях от источников) в полях возмущений не происходит при достижении ω одного из критических значений ω_{s*} и ω_{a*} . Потребуем поэтому непрерывность по ω даваемого формулами (4.1)–(4.3) решения линейной задачи при любых конечных x . Сформулированное требование означает, что соотношения (4.2), (4.3) сохраняют силу при любых $\omega_{a*} \geq \omega \geq \omega_{s*}$ и $\omega > \omega_{a*}$. Все граничные условия задачи будут удовлетворены, так как использование формул (4.2), (4.3) при закритических частотах обеспечивается возможностью добавить к построенному при помощи интегральных преобразований решению собственные функции с экспоненциальным ростом при $x \rightarrow \infty$. Вычеты $\operatorname{res} \Psi(k_{s1})$ и $\operatorname{res} \Psi(k_{a1})$ дают искомые собственные функции, представляющие первую моду симметричных и антисимметричных волн Толлмина — Шлихтинга.

Изложенное правило задает непрерывную эволюцию линейных возмущений по ω в области, где отсутствуют турбулентные пульсации, развивающиеся на некотором расстоянии от источников. Разумеется, оно



Ф и г. 2



Ф и г. 3

имеет универсальный характер и в одинаковой мере приложимо к пограничному слою на пластинке и развитому вязкому течению в канале или трубе.

Расчеты реальной и мнимой частей избыточного давления для колеблющихся в фазе осцилляторов одинаковой формы представлены на фиг. 2, 3 соответственно. Было принято, что параметр $\mu_e = 0,97$, а $h_s(x) = h_s(x) = h(x)$, причем

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & 2 \leq x, \end{cases}$$

откуда фурье-образ $h(k) = -(1 - e^{ik})^2/k^2$. В этом случае возбуждаются только антисимметричные возмущения, для которых формулы (2.7) сводятся к

$$b = d = \frac{1}{2} ik \Phi(\zeta) \frac{h(k)}{\Phi(\zeta) \operatorname{ch} \frac{k}{2} - i^{1/3} k^{4/3} \mu_e^{5/3} \operatorname{sh} \frac{k}{2}}.$$

Цифра 1 относится к колебаниям с докритической частотой $\omega = 2 < \omega_{a*}$, 2 — к колебаниям с закритической частотой $\omega = 2,92 > \omega_{a*}$. Напомним, что при $\mu_e = 0,97$ критическая частота свободных антисимметричных возмущений $\omega_{a*} = 2,81$. В расчетах формулы (4.1)—(4.3) использовались как для докритического, так и для закритического режима. Вверх по потоку от осцилляторов излучаемые сигналы затухают чрезвычайно быстро, небольшая раскочка волнового процесса вниз по потоку от источников происходит на частоте $\omega = 2,92$.

Авторы искренне признательны В. И. Жуку и Е. Д. Терентьеву за плодотворные дискуссии.

Поступила 14 VIII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Smith F. T. On entry-flow effects in bifurcating, blocked or constricted tubes.— J. Fluid Mech., 1976, vol. 78, pt 4.
2. Smith F. T., Bodonyi R. J. On the stability of the developing flow in a channel or circular pipe.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1980, vol. 33, pt 3.
3. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений.— Труды ЦАГИ, 1974, вып. 1529.
4. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies.— In: Advances in Appl. Mech. Vol. 14. N. Y.— San Francisco — L., 1974.
5. Рубан А. И., Сычев В. В. Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— Усп. механ., 1979, т. 2, вып. 4.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: ИЛ, 1956.
7. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
8. Ryzhov O. S., Zhuk V. I. Internal waves in the boundary layer with the self-induced pressure.— J. de Mécanique, 1980, vol. 19, N 3.
9. Smith F. T. On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer.— Proc. Roy. Soc., ser. A, 1979, vol. 366, N 1724.
10. Жук В. И., Рыжов О. С. О свободном взаимодействии пристеночных слоев с ядром течения Пуазейля.— ДАН СССР, 1981, т. 257, № 1.
11. Богданова Е. В., Рыжов О. С. О колебаниях, возбуждаемых гармоническим осциллятором в течении Пуазейля. Там же.