

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПОД ШТАМПОМ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОДОШВОЙ ПРИ ПЕРЕКУСЫВАНИИ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ

Б. А. Друянов

(Москва)

Для решения статически неопределимых задач плоского течения идеально пластических тел применяется подбор сеток характеристик в пластических областях, имеющей целью согласование поля скоростей и поля напряжений.

Этим методом удалось решить ряд задач, в которых граничные условия для напряжений заданы на прямых линиях, так как в этом случае можно использовать интегралы уравнений пластичности. В случае, когда граничные условия для напряжений задаются на кривых линиях, метод подбора неприменим. Однако и в этом случае статически неопределимые задачи могут быть решены, если только можно сделать разумную гипотезу о расположении пластических областей. Действительно, распределение скоростей на плоскости характеристик может быть найдено до определения сетки характеристик на физической плоскости. Так как в статически неопределимых задачах число граничных условий для скоростей является избыточным, то можно получить уравнения, позволяющие найти недостающие граничные условия для напряжений.

Этот способ можно применить, например, к задачам о волочении листа через матрицу с криволинейными стенками, о прокатке листа и т. п. Здесь он применяется к решению задачи о перекусывании листа штампом, имеющим цилиндрическую подошву. Перекусывание листа штампом с плоской подошвой рассматривалось Л. Прандтлем [1], В. Соколовским [2] и Р. Хиллом [3].

Рассмотрим лист из идеально пластического материала, покоящийся на жестком основании (фигура). В лист вдавливаются штамп с цилиндрической подошвой. Предположим, что отношение толщины листа H к половине ширины штампа a невелико, так что при начальном течении материал, перешедший в пластическое состояние, вдавливается внутри полосы, разжимая ее на две части.

Рассмотрим случай, когда максимальная величина сил трения на поверхности контакта постоянна и равна t . На тех частях поверхности контакта, где силы трения достигли максимальной величины, материал листа скользит вдоль поверхности штампа, в остальной части поверхности контакта имеет место прилипание материала к штампу. Зона прилипания располагается в центральной части штампа, так как на оси симметрии касательные напряжения равны нулю.

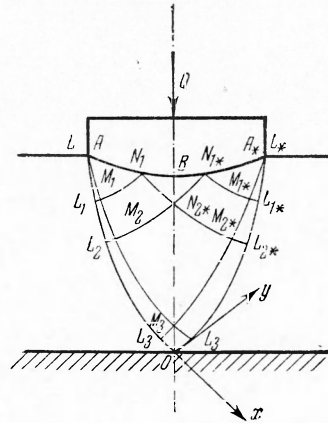
Расположение пластических областей показано на фигуре В силу симметрии достаточно рассмотреть левую половину штампа. В областях $AN_1M_1, ALL_1M_1, L_2M_2M_3L_3, N_2M_2M_3$ и L_3M_3O характеристики криволинейны. На дуге AN_1 касательные напряжения достигают максимальной величины. В области $N_1N_2M_3$ оба семейства характеристик прямолинейны, вдоль N_1B имеет место условие прилипания. В областях $N_1N_2M_2M_1$ и $L_1M_1M_2L_2$ характеристики первого семейства являются прямолинейными.

Пусть θ — отсчитываемый против часовой стрелки угол между осью ox и касательной к линии контакта. Тогда вдоль AN_1 имеет место соотношение

$$\theta - \varphi = \delta \quad \left(\varphi = \frac{1}{2} \text{Arc tg } \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}, \quad \delta = \frac{1}{2} \text{Arc cos } \frac{t}{k} \right) \quad (1)$$

Обозначим значения θ в точках A и N_1 через θ_0 и θ_1 соответственно. Величина θ_1 определяется формулой $\theta_1 = \delta$. Так как $\theta_1 > \theta_0$, то рассматриваемое решение имеет место при условии $\theta_0 < \delta$. Если $\theta_0 \geq \delta$, то прилипание имеет место вдоль всей дуги контакта. В этом случае сетка характеристик совпадает с сеткой, предложенной Л. Прандтлем [1].

В дальнейшем будем рассматривать безразмерные скорости, представляющие собой отношения размерных скоростей к скорости движения жестких частей листа. Тогда скорость вдавливания штампа в силу несжимаемости будет равна H/a . Вдоль характеристик LO, OL_* и вдоль линии контакта ABA_* заданы нормальные составляющие скорости. При этом вдоль прямых характеристик L_1L_2 и $L_{1*}L_{2*}$ нормальные составляющие скорости будут постоянными. Отсюда и из уравнений Гейрингер следует, что область $N_1N_2N_{1*}$ будет двигаться как жесткое целое со скоростью штампа.



Введем криволинейные координаты α, β по формулам

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[\left(\varphi - \frac{p}{2k} \right) + \frac{p_0}{2k} \right], \quad \beta = \frac{1}{2} \left[\left(\varphi + \frac{p}{2k} \right) - \frac{p_0}{2k} \right] \quad (2)$$

Здесь $p = -(\sigma_x + \sigma_y) / 2$, p_0 — значение p в точке O . За начальные характеристики α, β примем характеристики LO и OL_* соответственно.

Проекции скорости на направления характеристик (v_α, v_β) являются однозначными функциями величин α, β во всех областях, где характеристики криволинейны. В рассматриваемой задаче этот вывод имеет силу и для областей с прямолинейными характеристиками. Величины v_α, v_β удовлетворяют уравнению $\partial^2 f / \partial \alpha \partial \beta + f = 0$ в областях, где оба семейства характеристик состоят из кривых линий, и граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} &= -\cos\left(\alpha + \frac{1}{4}\pi\right), & \frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha} &= \sin\left(\alpha + \frac{1}{4}\pi\right) & \text{при } \beta = 0 & \quad (\text{на } LO) \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta} &= \cos\left(\beta + \frac{1}{4}\pi\right), & \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} &= -\sin\left(\beta + \frac{1}{4}\pi\right) & \text{при } \alpha = 0 & \quad (\text{на } OL_*) \\ v_\alpha &= 1/\sqrt{2}, & v_\beta &= -1/\sqrt{2} & \text{при } \alpha = 0, \beta = 0 & \quad (\text{в точке } O) \end{aligned}$$

Применяя формулу Римана, получаем

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{\alpha\beta}) - \int_0^\alpha J_0[2\sqrt{(\alpha-\lambda)\beta}] \cos\left(\lambda + \frac{1}{4}\pi\right) d\lambda + \\ &+ \int_0^\beta J_0[2\sqrt{\alpha(\beta-\lambda)}] \cos\left(\lambda + \frac{1}{4}\pi\right) d\lambda \quad (3) \\ v_\beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{\alpha\beta}) + \int_0^\alpha J_0[2\sqrt{(\alpha-\lambda)\beta}] \sin\left(\lambda + \frac{1}{4}\pi\right) d\lambda - \\ &- \int_0^\beta J_0[2\sqrt{\alpha(\beta-\lambda)}] \sin\left(\lambda + \frac{1}{4}\pi\right) d\lambda \end{aligned}$$

Здесь J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Равенства (3) имеют силу во всех пластических областях, включая области с прямолинейными характеристиками. На дуге N_1BN_{1*} имеем условия

$$v_\alpha = h \cos\left(\frac{1}{4}\pi + \varphi\right), \quad v_\beta = -h \sin\left(\frac{1}{4}\pi + \varphi\right) \quad (h = \frac{H}{a})$$

Удовлетворяя этим условиям, получим уравнения, определяющие величины α, β в области $N_1N_2N_{1*}$

$$\begin{aligned} h \cos\left(\varphi + \frac{1}{4}\pi\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{\alpha\beta}) - \int_0^\alpha J_0[2\sqrt{(\alpha-\lambda)\beta}] \cos\left(\lambda + \frac{1}{4}\pi\right) d\lambda + \\ &+ \int_0^\beta J_0[2\sqrt{\alpha(\beta-\lambda)}] \cos\left(\lambda + \frac{1}{4}\pi\right) d\lambda \quad (4) \\ -h \sin\left(\varphi + \frac{1}{4}\pi\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{\alpha\beta}) + \int_0^\alpha J_0[2\sqrt{(\alpha-\lambda)\beta}] \sin\left(\lambda + \frac{1}{4}\pi\right) d\lambda - \\ &- \int_0^\beta J_0[2\sqrt{\alpha(\beta-\lambda)}] \sin\left(\lambda + \frac{1}{4}\pi\right) d\lambda \end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что система уравнений (4) эквивалентна системе

$$h = J_0(2\sqrt{-\beta^2}) + 2 \int_0^\beta J_0[2\sqrt{(\beta-\lambda)\beta}] \cos \lambda d\lambda, \quad \alpha + \beta = 0 \quad (5)$$

Пусть γ — угол (фиг.) раствора сектора L_1LAM_1 .

Если $\theta_0 \geq \delta$, то первое уравнение системы (5) определяет h , как функцию угла γ . Эту формулу легко получить при помощи формул для радиусов кривизны, предложенных Хиллом [3].

На дуге AN_1 имеем условие

$$v_n = h \sin\left(\frac{1}{4}\pi + \theta\right)$$

Удовлетворяя ему и учитывая (1), получим

$$h \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = J_0(2\sqrt{\alpha\beta}) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) - \int_0^\alpha J_0[2\sqrt{(\alpha-\lambda)\beta}] \sin\left(\lambda + \delta + \frac{\pi}{4}\right) d\lambda + \int_0^\beta J_0[2\sqrt{\alpha(\beta-\lambda)}] \sin\left(\lambda + \delta + \frac{\pi}{4}\right) d\lambda \quad (6)$$

Чтобы упростить уравнение (6), воспользуемся тождеством

$$\cos\left(\alpha + \beta + \delta + \frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\delta + \frac{1}{4}\pi\right) J_0(2\sqrt{\alpha\beta}) - \quad (7)$$

$$- \int_0^\alpha J_0[2\sqrt{(\alpha-\lambda)\beta}] \sin\left(\lambda + \delta + \frac{1}{4}\pi\right) d\lambda - \int_0^\beta J_0[2\sqrt{(\beta-\lambda)\alpha}] \sin\left(\lambda + \delta + \frac{1}{4}\pi\right) d\lambda$$

Вычитая (7) из (6), производя подстановку $\lambda = \beta - u$ и учитывая, что согласно (2) $\varphi = \alpha + \beta$, получим

$$h \sin\left(\theta + \frac{1}{4}\pi\right) - \cos\left(\theta + \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2} J_0(2\sqrt{\alpha\beta}) \sin \delta + 2 \int_0^\beta J_0(2\sqrt{\alpha u}) \sin\left(\beta + \delta + \frac{1}{4}\pi - u\right) du \quad (8)$$

Из (1) и (2) имеем

$$\alpha + \beta = \theta + \delta \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) определяют α и β как функции θ на дуге AN_1 . Тем самым на AN_1 определяется p как функция от θ . Если h и δ заданы, то уравнения (8), (9) легко могут быть решены на электронной вычислительной машине. Нетрудно получить аналитические выражения для этих функций, если воспользоваться разложением Тейлора. Заметим, что уравнения (8), (9) имеют решение

$$\theta_* = \frac{3}{4}\pi - \eta - \arccos(\sqrt{2} \sin \delta \cos \eta), \quad \alpha_* = \theta_* - \delta, \quad \beta_* = 0, \quad \eta = \arctg h.$$

Дифференцируя (8), (9) по θ и полагая $\theta = \theta_*$, получим значения производных от α и β по θ в точке $\theta = \theta_*$

$$\beta_*' = \Delta \sec \eta \sin\left(\theta_* + \frac{1}{4}\pi + h\right), \quad \alpha_*' = 1 - \beta_*'$$

$$\beta_*'' = \Delta \left\{ \sec \eta \cos\left(\theta_* + \frac{1}{4}\pi + \eta\right) + 2\sqrt{2} \sin \delta \alpha_*' \beta_*' - \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_*^2 \sin \delta - 2\alpha_* \sin\left(\delta + \frac{1}{4}\pi\right) + 2 \cos\left(\delta + \frac{1}{4}\pi\right) \right] \beta_*'^2 \right\}, \quad \alpha_*'' = -\beta_*''$$

$$\beta_*''' = \Delta \left\{ -\sec \eta \sin\left(\theta_* + \frac{1}{4}\pi + \eta\right) + 3\sqrt{2} \sin \delta (\alpha_*'' \beta_*' + \alpha_*' \beta_*'') - 3 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_*^2 \sin \delta - 2\alpha_* \sin\left(\delta + \frac{1}{4}\pi\right) + 2 \cos\left(\delta + \frac{1}{4}\pi\right) \right] \beta_*' \beta_*'' - 3 \left[\sqrt{2} \alpha_* \sin \delta - 2 \sin\left(\delta + \frac{1}{4}\pi\right) \right] \alpha_*' \beta_*'^2 - \left[-\frac{\sqrt{2}}{6} \alpha_*^3 \sin \delta + \alpha_*^2 \sin\left(\delta + \frac{1}{4}\pi\right) - 2\alpha_* \cos\left(\delta + \frac{1}{4}\pi\right) - 2 \sin\left(\delta + \frac{1}{4}\pi\right) \right] \beta_*'^3 \right\}, \quad \alpha_*''' = -\beta_*'''$$

Здесь

$$\Delta = \left\{ \sqrt{2} [(1 - \alpha_*) \sin \delta + \cos \delta] \right\}^{-1}$$

Так как $\beta_*' > 0$, то $\beta > 0$ при $\theta > \theta_*$ и так как в точке A $\beta = \gamma$, а $\gamma \geq 0$, то $\theta_0 \geq \theta_*$. С другой стороны, $\theta_0 < \delta$. Таким образом, должно быть $\theta_* < \delta$, что возможно при $h > 1$. Если $h = 1$, то $\theta_* = \delta$. Следовательно, полученное решение имеет силу при $\theta_* \leq \theta_0 < \delta$ и $h > 1$.

Поступила 26 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. П р а н д т л ь Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел. Теория пластичности. Сб. статей под ред. Ю. Н. Работнова. ИИЛ, 1948.
2. С о к о л о в с к и й В. Теория пластичности. ГИТТЛ, 1950.
3. Х и л л Р. Математическая теория пластичности. ГИТТЛ, 1956.