

**РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
ДЛЯ ОПЛАВЛЯЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЫ С УНОСОМ**

В. И. Антипов, В. В. Лебедев

(Москва)

Предлагается приближенное решение обратной однофазной задачи типа Стефана для ограниченной области с произвольными граничными и начальными условиями. Проводится численное сравнение с точными решениями.

Обратная задача теплопроводности для области с подвижной границей состоит в нахождении закона движения границы оплавливающегося твердого тела $s(\tau)$ и тепловых потоков $q_1(\tau)$ и $q_2(\tau)$ на основе известного изменения температуры в двух внутренних точках x_1 и x_2 пластины — $t_1(x, \tau)$ и $t_2(x, \tau)$. Будем считать, что эти температуры измеряются экспериментально без систематических погрешностей. Общего метода решения задач подобного типа не существует. Известны работы [1, 2], в которых обратная задача теплопроводности решена при заданном законе движения границы раздела фаз. На практике приходится сталкиваться с необходимостью решения обратной задачи теплопроводности при неизвестном законе движения границы раздела.

В данной работе однофазная обратная задача типа Стефана решена для конечной области с произвольными граничными и начальными условиями при помощи метода последовательных интервалов [3]. Температура $t(x, \tau)$ в любой точке пластины удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} \quad (0 \leq x \leq s(\tau)) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\lambda \partial t(s, \tau) / \partial x = q_1(\tau) + \rho L ds/d\tau \quad (2)$$

$$\lambda \partial t(0, \tau) / \partial x = q_2(\tau) \quad (3)$$

$$t(s, \tau) = T \quad (4)$$

$$s(\tau_m) = R \quad (5)$$

Здесь λ и a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности вещества пластины, ρ — его плотность, T — температура плавления, L — удельная теплота плавления или эффективная теплота плавления, учитывающая и теплоту химических реакций, которые протекают при постоянной температуре T ; R — первоначальная толщина пластины; τ_m — момент начала плавления; $q_1(\tau)$ и $q_2(\tau)$ — тепловые потоки на границах области $x = s(\tau)$ и $x = 0$ соответственно. Предполагается, что расплав мгновенно уносится за счет механического воздействия.

Если начальное распределение температуры аппроксимировать полиномом четвертой степени

$$t(x, 0) = \varphi(x) = A + Bx/R + C(x/R)^2 + D(x/R)^3 + E(x/R)^4 \quad (6)$$

то решение прямой задачи (1) — (6) можно представить в виде [3]

$$t(x, \omega) = t(x, 0) + BF\left(\frac{x}{R}, \omega\right) - (B + 2C + 3D + 4E)F\left(\frac{R-x}{R}, \omega\right) + \\ + 6D\Phi\left(\frac{x}{R}, \omega\right) - (6D + 24E)\Phi\left(\frac{R-x}{R}, \omega\right) + 12E\omega^2 + \\ + \left(2C + 6D\frac{x}{R} + 12E\frac{x^2}{R^2}\right)\omega + \\ + \frac{R}{\lambda} \left[\sum_{i=0}^N Q_{1,i+1} \Delta F\left(\frac{R-x}{R}, \omega - i\Delta\omega\right) - \sum_{i=0}^N q_{2,i+1} \Delta F\left(\frac{x}{R}, \omega - i\Delta\omega\right) \right] \quad (7)$$

$$\omega = \frac{\alpha\tau}{R^2}, \quad \Delta\omega = \frac{\alpha\Delta\tau}{R^2}, \quad N\Delta\omega \leq \omega \leq (N+1)\Delta\omega$$

$$Q_{1,i+1} \equiv q_{1,i+1}, \quad \tau < \tau_m, \quad Q_{1,i+1} \equiv q_{1,i+1} + q_{1f,i+1}, \quad \tau > \tau_m$$

где $q_{1,i+1}$ и $q_{1f,i+1}$ — значения квазипостоянных реального и фиктивного потоков тепла для $(i+1)$ -го интервала времени при ступенчатой аппроксимации тепловых потоков [3]; функции $F(y, \omega)$ и $\Phi(y, \omega)$ найдены в [3] и имеют вид

$$F(y, \omega) = 2\sqrt{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{ierfc}\left(\frac{2k+y}{2\sqrt{\omega}}\right) + \operatorname{ierfc}\left[\frac{2(k+1)-y}{2\sqrt{\omega}}\right] \right\} \quad (8)$$

$$\Phi(y, \omega) = 8\omega\sqrt{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ i^3 \operatorname{erfc}\left(\frac{2k+y}{2\sqrt{\omega}}\right) + i^3 \operatorname{erfc}\left[\frac{2(k+1)-y}{2\sqrt{\omega}}\right] \right\} \quad (9)$$

$$\Delta F(y, n\Delta\omega) = F(y, n\Delta\omega) - F[y, (n-1)\Delta\omega]$$

Решая систему двух уравнений типа (7) для $x = x_1$ и $x = x_2$ относительно $Q_{1,N+1}$ и $q_{2,N+1}$, получаем

$$Q_{1,N+1} = \|D\|^{-1} \left\{ \left[\frac{\lambda}{R} \Delta t_{\varphi}(x_1, (N+1)\Delta\omega) - \sum_{i=0}^{N-1} Q_{1,i+1} \Delta F\left(1 - \frac{x_1}{R}, (N+1-i)\Delta\omega\right) + \sum_{i=0}^{N-1} q_{2,i+1} \Delta F\left(\frac{x_1}{R}, (N+1-i)\Delta\omega\right) \right] \Delta F\left(\frac{x_2}{R}, \Delta\omega\right) - \right. \\ \left. - \left[\frac{\lambda}{R} \Delta t_{\varphi}(x_2, (N+1-i)\Delta\omega) - \sum_{i=0}^{N-1} Q_{1,i+1} \Delta F\left(1 - \frac{x_2}{R}, (N+1-i)\Delta\omega\right) + \sum_{i=0}^{N-1} q_{2,i+1} \Delta F\left(\frac{x_2}{R}, (N+1-i)\Delta\omega\right) \right] \Delta F\left(\frac{x_1}{R}, \Delta\omega\right) \right\} \quad (10)$$

$$q_{2,N+1} = \|D\|^{-1} \left\{ \left[\frac{\lambda}{R} \Delta t_{\varphi}(x_1, (N+1)\Delta\omega) - \sum_{i=0}^{N-1} Q_{1,i+1} \times \right. \right. \\ \left. \times \left[\Delta F\left(1 - \frac{x_1}{R}, (N+1-i)\Delta\omega\right) + \sum_{i=0}^{N-1} q_{2,i+1} \Delta F\left(\frac{x_1}{R}, (N+1-i)\Delta\omega\right) \right] \right] \times \\ \left. \times \Delta F\left(1 - \frac{x_2}{R}, (N+1-i)\Delta\omega\right) - \right. \\ \left. - \left[\frac{\lambda}{R} \Delta t_{\varphi}(x_2, (N+1)\Delta\omega) - \sum_{i=0}^{N-1} Q_{1,i+1} \Delta F\left(1 - \frac{x_2}{R}, (N+1-i)\Delta\omega\right) + \sum_{i=0}^{N-1} q_{2,i+1} \Delta F\left(\frac{x_2}{R}, (N+1-i)\Delta\omega\right) \right] \Delta F\left(1 - \frac{x_1}{R}, (N+1-i)\Delta\omega\right) \right\} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \|D\| = & \Delta F \left(1 - \frac{x_1}{R}, \Delta\omega \right) \Delta F \left(\frac{x_2}{R}, \Delta\omega \right) - \Delta F \left(1 - \frac{x_2}{R}, \Delta\omega \right) \Delta F \left(\frac{x_1}{R}, \Delta\omega \right) \\ & \Delta t_\varphi(x, \omega) = t(x, \omega) - t(x, 0) - BF \left(\frac{x}{R}, \omega \right) + \\ & + (B + 2C + 3D + 4E) F \left(1 - \frac{x}{R}, \omega \right) - 6D\Phi \left(\frac{x}{R}, \omega \right) + \\ & + (6D + 24E) \Phi \left(1 - \frac{x}{R}, \omega \right) - 12E\omega^2 - (2C + 6DxR^{-1} + 12Ex^2R^{-2}) \omega \quad (12) \end{aligned}$$

Если поверхность $x = 0$ теплоизолирована ($q_2(\tau) \equiv 0$), то выражение для $Q_1(\tau)$ упрощается

$$\begin{aligned} Q_{1,N+1} = & \left[\Delta F \left(1 - \frac{x_1}{R}, \Delta\omega \right) \right]^{-1} \left\{ -\frac{\lambda}{R} \Delta t_\varphi[x_1, (N+1)\Delta\omega] - \right. \\ & \left. - \sum_{i=0}^{N-1} Q_{1,i+1} \Delta F \left[1 - \frac{x_1}{R}, (N+1-i)\Delta\omega \right] \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

Соотношения (10), (11) позволяют определить неизвестный тепловой поток $q_2(\omega)$ по значениям $q_{2,N+1}$, соответствующим средней точке интервала $(N\Delta\omega, (N+1)\Delta\omega)$, т. е. точке $(N + 1/2)\Delta\omega$.

Для определения закона движения границы оплаваемого тела положим в соотношении (7) $x = R(1 - \xi_{N+1})$, где $1 - s(\omega)/R = \xi(\omega)$ — относительная глубина оплавления. Учитывая условие (4), получим

$$\begin{aligned} & A + B(1 - \xi_{N+1}) + C(1 - \xi_{N+1})^2 + D(1 - \xi_{N+1})^3 + E(1 - \xi_{N+1})^4 + \\ & + 2C(N+1)\Delta\omega + 6D(N+1)\Delta\omega(1 - \xi_{N+1}) + 12E(N+1)\Delta\omega(1 - \xi_{N+1})^2 = \\ & = T - BF[1 - \xi_{N+1}, (N+1)\Delta\omega] + (B + 2C + 3D + 4E) \times \\ & \times F[\xi_{N+1}, (N+1)\Delta\omega] - 6D\Phi[1 - \xi_{N+1}, (N+1)\Delta\omega] + \\ & + (6D + 24E)\Phi[\xi_{N+1}, (N+1)\Delta\omega] - 12E(N+1)^2\Delta\omega^2 - \\ & - \frac{R}{\lambda} \left\{ \sum_{i=0}^N Q_{1,i+1} \Delta F[\xi_{N+1}, (N+1-i)\Delta\omega] - \right. \\ & \left. - \sum_{i=0}^N q_{2,i+1} \Delta F[1 - \xi_{N+1}, (N+1-i)\Delta\omega] \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

Раскрывая скобки в правой стороне уравнения (14), заменяя члены ξ_{N+1}^3 и ξ_{N+1}^4 на $\xi_{N+1}^2\xi_N$ и $\xi_{N+1}^2\xi_N^2$ и аргументы ξ_{N+1} в функциях $F, \Delta F, \Phi$, в левой стороне (14) на ξ_N , получаем квадратное уравнение для ξ_{N+1}

$$\begin{aligned} & [C + 3D + 6E + 12E(N+1)\Delta\omega - D\xi_N - 4E\xi_N + E\xi_N^2] \xi_{N+1}^2 - \\ & - [B + 2C + 3D + 4E + 6(N+1)\Delta\omega + 24E(N+1)\Delta\omega] \xi_{N+1} - \\ & - \{T - (A + B + C + D + E) - (2C + 6D + 12E)(N+1)\Delta\omega - \\ & - 12E(N+1)^2\Delta\omega^2 - BF[1 - \xi_N, (N+1)\Delta\omega] + (B + 2C + 3D + 4E) \times \\ & \times F[\xi_N, (N+1)\Delta\omega] - 6DF[1 - \xi_N, (N+1)\Delta\omega] + \\ & + (6D + 24E)\Phi[\xi_N, (N+1)\Delta\omega] - \frac{R}{\lambda} \sum_{i=0}^N Q_{1,i+1} \Delta F[\xi_N, (N+1-i)\Delta\omega] + \\ & + \frac{R}{\lambda} \sum_{i=0}^N q_{2,i+1} \Delta F[1 - \xi_N, (N+1-i)\Delta\omega]\} = 0 \end{aligned}$$

Тепловой поток $q_1(\omega)$ определяется при помощи условия Стефана (2)

$$q_1(\omega) = \lambda \frac{\partial t}{\partial x} + \rho \frac{aL}{R} \frac{d\xi}{d\omega} = \lambda \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\lambda L}{cR} \frac{d\xi}{d\omega}, \quad x = R(1 - \xi) \quad (15)$$

Дифференцируя выражение (7) по x , подставляя затем $x = R(1 - \xi)$ и заменяя производную $d\xi/d\omega$ конечной разностью $(\xi_{N+1} - \xi_N)/\Delta\omega$, получаем из (15)

$$\begin{aligned} q_{1,N+1} = & \frac{\lambda L}{cR} \frac{\xi_{N+1} - \xi_N}{\Delta\omega} + \frac{\lambda}{R} \{B + 2C(1 - \xi_{N+1}) + 3D(1 - \xi_{N+1})^2 + \\ & + 4E(1 - \xi_{N+1})^3 - B\vartheta[1 - \xi_{N+1}, (N+1)\Delta\omega] - (B + 2C + 3D + 4E) \times \\ & \times \vartheta[\xi_{N+1}, (N+1)\Delta\omega] - 6D\vartheta_1[1 - \xi_{N+1}, (N+1)\Delta\omega] - \\ & - (6D + 24E)\vartheta_1[\xi_{N+1}, (N+1)\Delta\omega] + 6D(N+1)\Delta\omega + \\ & + 24E(N+1)\Delta\omega(1 - \xi_{N+1})\} + \sum_{i=0}^N Q_{1,N+1} \Delta\vartheta[\xi_{N+1}, (N+1-i)\Delta\omega] + \\ & + \sum_{i=0}^N q_{2,i+1} \Delta\vartheta[1 - \xi_{N+1}, (N+1-i)\Delta\omega] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\vartheta_1(y, \omega) = 4\omega \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{2k+y}{2\sqrt{\omega}} \right) - i^2 \operatorname{erfc} \left[\frac{2(k+1)-y}{2\sqrt{\omega}} \right] \right\}$$

$$\vartheta(y, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{2k+y}{2\sqrt{\omega}} \right) - \operatorname{erfc} \left[\frac{2(k+1)-y}{2\sqrt{\omega}} \right] \right\}$$

Для оценки точности изложенного метода приведем численные примеры, для которых известны также точные решения.

Точное частное решение Сандерса [4] имеет вид

$$q_2(\omega) = 0$$

$$t(x, \omega) = T(x^2 R^{-2} + 2\omega) \quad (17)$$

$$\xi(\omega) = 1 - \sqrt{1 - 2\omega} \quad (18)$$

$$q_1(\omega) = \frac{\lambda T}{R} \left(\frac{L}{cT} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\omega}} + 2\sqrt{1 - 2\omega} \right) \quad (19)$$

В этом случае начальное распределение температуры равно

$$t(x, 0) = Tx^2 R^{-2}$$

т. е. $A = B = D = E = 0, C = T$.

На основании значений температур, измеренных в точке $x_1 = 0.9R$, можно установить закон движения границы (18) и тепловой поток (19). В этом случае согласно (12)

$$\Delta t_\varphi(x_1, \omega) = 2TF(0,1; \omega)$$

Вычисление $Q_{1,N+1}$ по (13) при $x = s = R(1 - \xi)$ дает $Q_{1,N+1} = 2\lambda T/R$, и из (14) получаем уравнение для $\xi(\omega)$

$$[1 - \xi(\omega)]^2 + 2\omega = 1 + 2F[\xi(\omega), \omega] - 2 \sum_{i=0}^N \Delta F[\xi(\omega), (N+1-i)\Delta\omega] \quad (20)$$

По определению ΔF

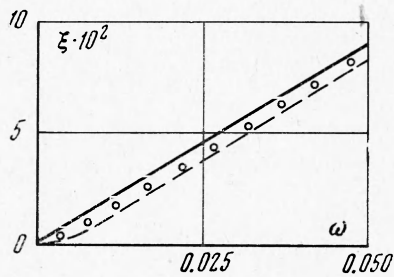
$$\sum_{i=0}^N \Delta F[\xi(\omega), (N+1-i)\Delta\omega] \equiv \sum_{k=1}^{N+1} \Delta F[\xi(\omega), k\Delta\omega] \equiv F[\xi(\omega), \omega] \quad (24)$$

Из (20) получаем уравнение

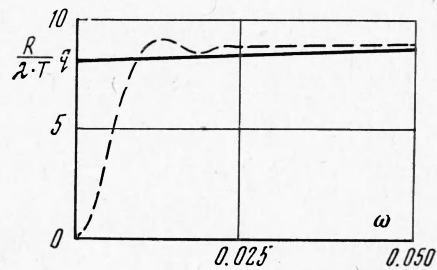
$$\xi^2(\omega) - 2\xi(\omega) + 2\omega = 0$$

решением которого является $\xi(\omega) = 1 - \sqrt{1-2\omega}$, что совпадает с (18). Из (16) находим выражение для теплового потока

$$q_1(\omega) = \frac{\lambda L}{cR} \frac{d\xi}{d\omega} + \frac{2\lambda T}{R} [1 - \xi(\omega)] - \frac{2\lambda T}{R} \theta[\xi(\omega), \omega] + \\ + \frac{2\lambda T}{R} \sum_{i=0}^N \Delta\theta[\xi(\omega), (N+1-i)\Delta\omega]$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Преобразуя сумму в последнем члене, подобно (21) получаем

$$q_1(\omega) = \frac{\lambda L}{cR} \frac{d\xi}{d\omega} + \frac{2\lambda T}{R} [1 - \xi(\omega)] = \frac{\lambda T}{R} \left(\frac{L}{cT} \frac{1}{\sqrt{1-2\omega}} + 2\sqrt{1-2\omega} \right)$$

что совпадает с (19). Решение обратной задачи в этом случае значительно упростилось из-за постоянства $Q_{1,N+1}$, что позволило проводить суммирование при помощи (21).

Другое точное решение Сандерса [4] имеет вид

$$\xi(\omega) = 1 - \sqrt{1 - 3.41612\omega} \quad (22)$$

$$t(x, \omega) = T \left\{ 1 - \sqrt{1 - 3.41612\omega} {}_1F_1 \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{0.85403x^2 R^{-2}}{1 - 3.41612\omega} \right) \right\} \quad (23)$$

где ${}_1F_1(\alpha; \beta; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Из условия (2) получаем выражение для теплового потока

$$q_1(\omega) = \frac{\lambda T}{R} \left(2.34909 + \frac{1.70806}{\sqrt{1 - 3.41612\omega}} \frac{L}{cT} \right)$$

или, полагая $L/cT = 10/3$ (как и в численном примере Сандерса)

$$q_1(\omega) = \frac{\lambda T}{R} \left(2.34909 + \frac{5.69353}{\sqrt{1 - 3.41612\omega}} \right) \quad (24)$$

Начальное распределение в этом случае имеет вид

$$t(x, 0) = T \left[0.85403 \frac{x^2}{R^2} + \frac{(0.85403)^2}{6} \frac{x^4}{R^4} + \dots \right]$$

а следовательно,

$$A = B = D = 0, \quad C = 0.85403T, \quad E = 0.12156T$$

