

**К ЗАДАЧЕ О КОНУСЕ ПОДОШВЕННОЙ ВОДЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ**

**В. А. Карнычев (Москва)**

Исследование задачи о возникновении водяных конусов в пластах с подошвенной водой с учетом различия физических свойств нефти и воды, неоднородности пласта, упругих свойств пористой среды и жидкостей и т. п. весьма затруднительно. Обычно для решения вводятся некоторые допущения [1-7]. Ниже приводится решение задачи о возникновении водяного конуса в двуслойном пласте

§ 1. Будем считать верхний слой пласта, имеющий непроницаемую кровлю, ограниченным по мощности, а нижний — простирающимся до бесконечности. Такая схема соответствует случаю так называемого плавающего месторождения, когда нефть находится на большой толще подошвенной воды, вследствие чего влиянием подошвы на приток к скважине, вскрывшей кровлю пласта, можно пренебречь. Скважину заменим стоком интенсивности  $q$ , который расположим в начале координат (фиг. 1 а).

Мощность верхнего слоя обозначим через  $h$ , коэффициенты пористости и проницаемости верхнего и нижнего слоев обозначим через  $m_1, k_1$  и  $m_2, k_2$ .

Различием в вязкостях и удельных весах нефти и воды пренебрежем, т. е. будем рассматривать движение однородной жидкости, подчиняющееся линейному закону.

Задача формулируется следующим образом: в слоях 1 и 2 найти функции давления  $p_1(r, z)$ , и  $p_2(r, z)$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla^2 p_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

$$\left( \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

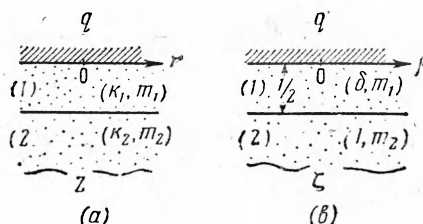
и граничным условиям

$$\left( \frac{\partial p_1}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad (1.2.1)$$

$$p_1(\infty, z) = p_2(\infty, z) = p_2(r, \infty) = p_\infty \quad (1.2.2)$$

$$(p_1 - p_2)_{z=h} = 0 \quad (1.2.3)$$

$$\left( \frac{\partial p_2}{\partial z} - \delta \frac{\partial p_1}{\partial z} \right)_{z=h} = 0 \quad \left( \delta = \frac{k_1}{k_2} \right) \quad (1.2.4)$$



Фиг. 1

где  $p_\infty$  — давление на большом удалении от скважины (пластовое давление).

Условие (1.2.1) означает непроницаемость кровли верхнего слоя, условия (1.2.3) и (1.2.4) — непрерывность давления и нормальных составляющих скорости фильтрации при переходе через плоскость  $z = h = 0$ .

Для удобства в дальнейших вычислениях введем безразмерные координаты

$$\rho = \frac{r}{2h}, \quad \zeta = \frac{z}{2h}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.3)$$

Область движения жидкости в координатах  $(\rho, \zeta)$  изображена на фиг. 1 в. Уравнения (1.1) и граничные условия (1.2) тогда примут вид

$$\nabla^2 p_i = 0 \quad \left( \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \quad (i = 1, 2) \quad (1.4)$$

$$(1) \quad \left( \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} = 0$$

$$(2) \quad p_1(\infty, \zeta) = p_2(\infty, \zeta) = p_2(\rho, \infty) = p_\infty$$

$$(3) \quad (p_1 - p_2)_{\zeta=0.5} = 0 \quad (1.5)$$

$$(4) \quad \left( \frac{\partial p_2}{\partial \zeta} - \delta \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0.5} = 0$$

Решения уравнений (1.4), удовлетворяющие условиям (1.5), будем находить методом разделения переменных, аналогично тому, как это сделано в [8].

Нетрудно видеть, что функции  $p_1(\rho, \zeta)$  и  $p_2(\rho, \zeta)$  представимы в виде

$$p_1(\rho, \zeta) = - \frac{\mu q}{4\pi h k_1} \int_0^\infty J_0(\rho\lambda) \{ [1 + A(\lambda)] e^{-\zeta\lambda} + B(\lambda) e^{\zeta\lambda} \} d\lambda + p_\infty \quad (1.6)$$

$$p_2(\rho, \zeta) = - \frac{\mu q}{4\pi h k_2} \int_0^\infty J_0(\rho\lambda) C(\lambda) e^{-\zeta\lambda} d\lambda + p_\infty$$

Здесь  $\mu$  — коэффициент вязкости жидкости,  $J_0$  — функция Бесселя первого рода, нулевого порядка;  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$  — функции действительного переменного  $\lambda$ , которые определяются из граничных условий (1.5.1), (1.5.3) и (1.5.4).

Замечая, что [9]

$$\int_0^{\infty} J_0(\rho\lambda) \lambda d\lambda = 0$$

для определения этих функций получим следующую систему:

$$\begin{aligned} A(\lambda) - B(\lambda) &= 0 \\ A(\lambda) + B(\lambda) e^\lambda - \delta C(\lambda) &= -1 \\ A(\lambda) - B(\lambda) e^\lambda - C(\lambda) &= -1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Из этой системы находим

$$A(\lambda) = B(\lambda) = \frac{\varepsilon}{e^\lambda - \varepsilon}, \quad C(\lambda) = \frac{(1 - \varepsilon) e^\lambda}{e^\lambda - \varepsilon} \quad \left( \varepsilon = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) \quad (1.8)$$

Определив  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$  и  $C(\lambda)$ , находим функции  $p_1(\rho, \zeta)$  и  $p_2(\rho, \zeta)$

$$\begin{aligned} p_1(\rho, \zeta) &= -\frac{\mu q}{4\pi h k_1} \int_0^{\infty} J_0(\rho\lambda) \left[ e^{-\zeta\lambda} + \frac{\varepsilon (e^{\zeta\lambda} + e^{-\zeta\lambda})}{e^\lambda - \varepsilon} \right] d\lambda + p_\infty \\ p_2(\rho, \zeta) &= -\frac{\mu q (1 - \varepsilon)}{4\pi h k_2} \int_0^{\infty} J_0(\rho\lambda) \frac{e^{(1-\zeta)\lambda}}{e^\lambda - \varepsilon} d\lambda + p_\infty \end{aligned} \quad (1.9)$$

Пользуясь соотношениями

$$v_{ir} = -\frac{k_i}{\mu} \frac{\partial p_i}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dr}, \quad v_{iz} = -\frac{k_i}{\mu} \frac{\partial p_i}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dz} \quad (i = 1, 2) \quad (1.10)$$

$$v_{ir} = m_i \frac{dr}{dt} = m_i \frac{d\rho}{dt} \frac{dr}{d\rho}, \quad v_{iz} = m_i \frac{dz}{dt} = m_i \frac{d\zeta}{dt} \frac{dz}{d\zeta} \quad (1.11)$$

уравнения движения жидкости в каждом из слоев можно представить в виде

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\rho}{d\tau} &= -\int_0^{\infty} J_1(\rho\lambda) \left[ e^{-\zeta\lambda} + \frac{\varepsilon (e^{\zeta\lambda} + e^{-\zeta\lambda})}{e^\lambda - \varepsilon} \right] \lambda d\lambda \\ m_1 \frac{d\zeta}{d\tau} &= -\int_0^{\infty} J_0(\rho\lambda) \left[ e^{-\zeta\lambda} + \frac{\varepsilon (e^{-\zeta\lambda} - e^{\zeta\lambda})}{e^\lambda - \varepsilon} \right] \lambda d\lambda \end{aligned} \quad (1.12.1)$$

$$m_2 \frac{d\rho}{d\tau} = -(1 - \varepsilon) \int_0^{\infty} J_1(\rho\lambda) \frac{e^{(1-\zeta)\lambda}}{e^\lambda - \varepsilon} \lambda d\lambda, \quad m_2 \frac{d\zeta}{d\tau} = -(1 - \varepsilon) \int_0^{\infty} J_0(\rho\lambda) \frac{e^{(1-\zeta)\lambda}}{e^\lambda - \varepsilon} \lambda d\lambda \quad (1.12.2)$$

Здесь

$$\tau = \frac{tq}{16\pi h^3}, \quad J_1(\rho\lambda) = -J_0'(\rho\lambda) \quad (1.13)$$

Уравнения (1.12.1) и (1.12.2) характеризуют движение жидкости соответственно в 1 и 2 слоях (фиг. 1). Правые части уравнений (1.12) преобразуем к виду, удобному для численного интегрирования. Из теории бesselевых функций известно, что [9]

$$\int_0^{\infty} e^{-a\lambda} J_1(b\lambda) \lambda d\lambda = b (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \int_0^{\infty} e^{-a\lambda} J_0(b\lambda) \lambda d\lambda = a (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (1.14)$$

Замечая, что

$$\frac{1}{1 - \varepsilon e^{-\lambda}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu e^{-\nu\lambda} \quad (1.15)$$

и опираясь на формулы (1.14), найдем (1.16.1)

$$m_1 \frac{d\rho}{d\tau} = -\rho \left\{ (\rho^2 + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n [\rho^2 + (n - \zeta)^2]^{-\frac{3}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n [\rho^2 + (n + \zeta)^2]^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

$$m_1 \frac{d\zeta}{d\tau} = - \left\{ \zeta (\rho^2 + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n (n + \zeta) [\rho^2 + (n + \zeta)^2]^{-\frac{3}{2}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^a \varepsilon^n (n - \zeta) [\rho^2 + (n - \zeta)^2]^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

$$m_2 \frac{d\rho}{d\tau} = -(1 - \varepsilon) \rho \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n [\rho^2 + (n + \zeta)^2]^{-\frac{3}{2}}$$

$$m_2 \frac{d\zeta}{d\tau} = -(1 - \varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (n + \zeta) [\rho^2 + (n + \zeta)^2]^{-\frac{3}{2}} \quad (1.16.2)$$

Укажем на некоторые предельные значения для  $\varepsilon$ , имеющие известный интерес.

1) Если  $\varepsilon = 0$  ( $k_1 = k_2$ ), то уравнения (1.16.1) упрощаются и принимают вид

$$m_1 \frac{d\rho}{d\tau} = -\rho (\rho^2 + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad m_1 \frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta (\rho^2 + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (1.17)$$

Уравнения (1.16.2) при этом выпадают из рассмотрения. При  $\varepsilon = 0$  задача об образовании конуса подошвенной воды имеет точное решение [2].

2) Если же  $\varepsilon = 1$  (при  $k_2 = 0$ ), то будем иметь случай однородного пласта конечной мощности. Уравнения (1.16.1) принимают вид

$$m_1 \frac{d\rho}{d\tau} = -\rho \left\{ (\rho^2 + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} [\rho^2 + (n - \zeta)^2]^{-\frac{3}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} [\rho^2 + (n + \zeta)^2]^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

$$m_1 \frac{d\zeta}{d\tau} = - \left\{ \zeta (\rho^2 + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (n + \zeta) [\rho^2 + (n + \zeta)^2]^{-\frac{3}{2}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} (n - \zeta) [\rho^2 + (n - \zeta)^2]^{-\frac{3}{2}} \right\} \quad (1.18)$$

а уравнения (1.16.2) также выпадают из рассмотрения. Задача об образовании конуса подошвенной воды при  $\varepsilon = 1$  ( $k_2 = 0$ ) рассмотрена в статье [7].

3) Наконец, если  $\varepsilon = -1$  ( $k_2 = \infty$ ,  $k_1 \neq \infty$ ), то отсюда следует, что  $p_2 = \text{const}$ , и линия раздела слоев является контуром питания. Ряды, входящие в уравнения (1.16.1), будут знакопеременными.

§ 2. Пусть  $\zeta = \zeta_0$  есть уравнение плоскости водонефтяного контакта при  $\tau = 0$ . Возможны случаи, когда  $\zeta_0 < 0.5$  и  $\zeta_0 > 0.5$ . При  $\zeta_0 < 0.5$  расчет перемещения точек водонефтяного контакта следует вести по уравнениям (1.16.1), характеризующим движение в слое I. При  $\zeta_0 > 0.5$  надо рассматривать как уравнения (1.16.1) (для значений  $\zeta \leq 0.5$ ), так и уравнения (1.16.2) (для  $\zeta > 0.5$ ).

Из уравнений (1.16) при  $\rho = 0$  можно определить время безводной добычи [10].

Для случая, когда  $\rho < 1$  и  $\zeta$  — конечная величина, систему уравнений (1.16) можно представить в виде, более удобном для расчетов.

Следуя М. Маскету [11], для небольших значений  $\rho$  и  $\zeta$  найдем

$$m_1 \frac{d\rho}{d\tau} = -\rho \left\{ (\rho^2 + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}} + \varepsilon [Z_3^+ + Z_3^- - 1.5\rho^2 (Z_5^+ + Z_5^-) + 1.875\rho^4 (Z_7^+ + Z_7^-)] \right\}$$

$$m_1 \frac{d\zeta}{d\tau} = - \left\{ \zeta (\rho^2 + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}} + \varepsilon [Z_2^+ - Z_2^- - 1.5\rho^2 (Z_4^+ - Z_4^-) + 1.875\rho^4 (Z_6^+ - Z_6^-)] \right\}$$

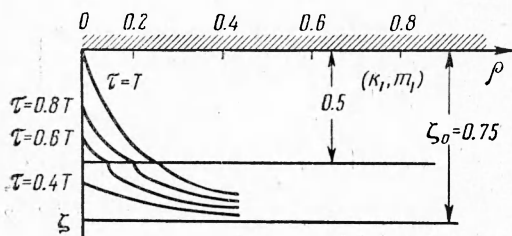
$$m_2 \frac{d\rho}{d\tau} = -(1 - \varepsilon) \rho (Z_3 - 1.5\rho^2 Z_5 + 1.875\rho^4 Z_7) \quad (2.1.2)$$

$$m_2 \frac{d\zeta}{d\tau} = -(1 - \varepsilon) (Z_2 - 1.5\rho^2 Z_4 + 1.875\rho^4 Z_6)$$

Здесь

$$Z(y, s, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{(m+y)^s}, \quad Z_{\sigma}^{+} = Z(1+\zeta, \sigma, \varepsilon), \quad Z_{\sigma}^{-} = Z(1-\zeta, \sigma, \varepsilon) \quad (0 \leq |\varepsilon| \leq 1) \quad (2.2)$$

Функция  $Z(s, y, \varepsilon)$  представляет собой дальнейшее обобщение дзета-функции Римана по сравнению с функцией  $\zeta(y, s)$ . При  $\varepsilon < 0$  ряды для функций  $Z$  являются знакопеременными.



Фиг. 2

В качестве примера рассмотрим случай, когда  $\zeta_0 = 0.75$ ,  $\varepsilon = 1/3$ , а стало быть,  $\delta = k_1/k_2 = 2$ . Пусть  $m_1 = 0.2$ . По приближенной формуле Эльдифрави [12], считая крупность частиц, слагающих слои 1 и 2, одинаковой, найдем, что  $m_2 = 0.16$ .

Тогда систему (2.1) для данного случая можно написать в виде

(2.3.1)

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -5\rho \left\{ (\rho^2 + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}} + 0.33 [Z_3^+ + Z_3^- - 1.5\rho^2 (Z_5^+ + Z_5^-) + 1.875\rho^4 (Z_7^+ + Z_7^-)] \right\}$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -5 \left\{ \zeta (\rho^2 + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}} + 0.33 [Z_2^+ - Z_2^- - 1.5\rho^2 (Z_4^+ - Z_4^-) + 1.875\rho^4 (Z_6^+ - Z_6^-)] \right\}$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -4.17\rho (Z_3 - 1.5\rho^2 Z_5 + 1.875\rho^4 Z_7)$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -4.17 (\zeta (Z_2 - 1.5\rho^2 Z_4 + 1.875\rho^4 Z_6)) \quad (2.3.2)$$

Численное решение системы (2.3) представлено в виде графика на фиг. 2. Этот график характеризует процесс образования водяного конуса для данного конкретного случая.

Поступила 2 III 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
2. Миллионщиков М. Д. Обводнение скважины подошвенной водой. Инж. сб., 1948, т. V, вып. 1.
3. Пискунов Н. С. О форме раздела воды и нефти при отборе нефти из пласта и при нагетании воды в пласт. Процесс образования водяных конусов. ДАН СССР, 1952, т. 86, № 1.
4. Чарный И. А. О предельных дебитах и депрессиях в водоплавающих и подгазовых нефтяных месторождениях. Тр. Совещания по развитию науч.-исслед. работ в области вторичных методов добычи нефти. Баку, Изд-во АН АзербССР, 1953.
5. Чарный И. А. О прорыве подошвенной воды в нефтяную скважину. ДАН СССР, 1953, т. 91, № 6.
6. Эфрос Д. А., Куранов И. Ф. Плоская задача о поднятии подошвенной воды. Тр. Всес. науч.-исслед. нефтегазового ин-та, 1954, вып. 6.
7. Карпычев В. А. О перемещении водонефтяного контакта в пластах с подошвенной водой. Инж. сб., 1959, т. 25.
8. Бурсиан В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Ч. I. Постоянные поля. Гостехтеориздат, 1933.
9. Грау А. A treatise on Bessel functions and their applications to physics. London, 1931.
10. Салехов Г. С., Данилов В. Л., Иванов Н. Ф., Хованский А. Н. К вопросу обводнения нефтяных скважин в пластах с подошвенной водой. Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1954, вып. 5.
11. Whittaker E. T. and Watson G. N. A course of modern analysis. Cambridge—New York, 1945.
12. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат, 1947.