пузырьков, проведенный эксперимент имеет качественный характер. В горизонтально расположенной стеклянной трубке внутренним диаметром 2.5 *мм*, заполненной дистиллированной водой, помещается пузырек воздуха диаметром $\sim$ 0.7 *мм*. На расстоянии нескольких миллиметров от него снаружи трубки была расположена нихромовая спираль, нагреванием которой создавался градиент температуры в воде. Движение пузыря регистрировалось при помощи киносъемки со скоростью 300 *к / сек*.

Результат эксперимента представлен на фигуре. Покоящийся вначале пузырек по истечении 5—6 *сек* после начала нагрева начинает двигаться. Как видно по фотографии, пузырек воздуха, расширяясь вследствие испарения, движется в сторону увеличения температуры. Таким образом, качественный результат эксперимента совпадает с выводом теории.

Авторы благодарят М. А. Лаврентьева за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила 2 VIII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. Физматгиз, 1953.
2. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика, Изд-во АН СССР, 1952.

О ВЛИЯНИИ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ОТКРЫТОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ

О. Ф. Васильев, В. И. Квон

(Новосибирск)

В последнее время в теории пограничного слоя найден путь учета эффектов неустановившегося движения [1]. Вместе с тем, в гидравлике появляется все больший интерес к применению идей и методов теории пограничного слоя к рассмотрению потоков в каналах. Здесь сделана попытка применить этот гидродинамический подход при выводе закона сопротивления для турбулентного неустановившегося течения в открытых руслах.

§ 1. Вывод системы уравнений. Рассматриваются плоские нестационарные течения вязкой несжимаемой жидкости, описываемые системой уравнений Навье—Стокса. Выполним известное преобразование

$$t = (U / X)t_0, \quad x = Xx_0, \quad y = Yy_0, \quad u = Uu_0, \quad v = Vv_0, \quad p = \rho U^2 p_0$$

Тогда эта система уравнений примет безразмерную форму

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_0} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{XV}{UY} v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y_0} = \frac{F_x X}{U^2} - \frac{\partial p_0}{\partial x_0} + \frac{\nu X}{Y^2 U} \left(\frac{Y^2}{X^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_0^2} \right) \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t_0} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x_0} + \frac{XV}{UY} v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y_0} = \frac{F_y X}{UV} - \frac{UX}{VY} \frac{\partial p_0}{\partial y_0} + \frac{\nu X}{Y^2 U} \left(\frac{Y^2}{X^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y_0^2} \right)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{XV}{YU} \frac{\partial v_0}{\partial y_0} = 0$$

Здесь приняты обычные в гидромеханике обозначения: t — время; (x, y) — декартова система координат, ось x направлена по неподвижному прямолинейному контуру; u, v — компоненты скорости соответственно по x и y; p — давление; ρ и ν — плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости соответственно; F_x, F_y—компоненты объемной силы; X, Y, U, V — масштабы длин, компонент скорости.

Наложим на течение первое ограничение. Число Рейнольдса $R = UX / \nu$ велико, точнее — можно пренебречь величинами порядка малости $0 (1 / R)$ и выше.

Имеются четыре произвольных величины U, V, X, Y. Чтобы получить из (1.1) систему уравнений, зависящую от одного параметра, подчиним указанные величины трем условиям в двух вариантах

$$R = \frac{UX}{\nu}, \qquad \frac{XV}{YU} = 1, \qquad \nu X = Y^2 U \qquad (1.2)$$

$$R = \frac{UX}{\nu}, \qquad \frac{XV}{YU} = 1, \qquad X = Y \qquad (1.3)$$

Условия (1.2), как известно, приводят систему уравнений (1.1) к системе уравнений, зависящей от числа Рейнольдса R в области пограничного слоя, а условия (1.3) — в области внешнего потока.

В системе (1.1) будем пренебрегать величинами, которые как при условиях (1.2), так и при условиях (1.3) имеют порядок малости $O(1/R)$ и выше.

Далее, наложим второе ограничение $g \gg dv/dt$, где g — ускорение силы тяжести. Это ограничение дает приближение теории мелкой воды. Теория мелкой воды следует из предположения, что компонента ускорения частицы жидкости по оси y оказывает незначительное влияние на давление [2]. Тогда в случае тяжелой жидкости и наклонного прямолинейного дна, согласно системе уравнений (1.1), можно написать систему уравнений в размерной форме

$$\frac{du}{dt} = g\sin\alpha_0 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad g\cos\alpha_0 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

Здесь α_0 — острый угол между осью y и направлением силы тяжести.

Пусть выражением $y = h(x, t)$ задана свободная поверхность. Из второго уравнения системы (1.4) и условия постоянства давления на свободной поверхности получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = g\cos\alpha_0\frac{\partial h}{\partial x}$$

Тогда система уравнений (1.4) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\left(\sin\alpha_0 - \cos\alpha_0\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Таким образом, система уравнений для всего потока в целом при указанных ограничениях на течение имеет вид системы уравнений теории пограничного слоя.

§ 2. Турбулентное течение. Уравнения турбулентного пограничного слоя известны [1, 3]. Нетрудно их написать и в случае тяжелой жидкости и наклона дна.

В § 1 было установлено, что существует определенное соотношение между формами систем уравнений пограничного слоя и всего потока в целом, а именно: система уравнений, описывающая движение жидкости во всей области в целом, имеет вид системы уравнений пограничного слоя. Будем полагать, что это свойство инвариантности форм системы уравнений теории ламинарного пограничного слоя выполняется и в случае турбулентного течения. Тогда для турбулентного открытого потока будем иметь уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\left(\sin\alpha_0 - \cos\alpha_0\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (2.1)$$

Здесь τ — напряжение трения.

Граничные условия на свободной поверхности

$$\partial h/\partial t + u^\circ \partial h/\partial x = v^\circ \text{ (кинематическое)}, \quad \tau = 0 \text{ (динамическое)} \qquad (2.2)$$

Здесь

$$u^\circ = u(t, x, h), \qquad v^\circ = v(t, x, h)$$

Граничные условия на неподвижной границе (на дне)

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0 \qquad (2.3)$$

§ 3. Закон сопротивления при неустановившемся движении открытого потока. Представим отношение напряжения трения к напряжению трения на неподвижной границе (на дне) в виде полинома

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \sum_{i=0}^{n} b_i(t, x)\,\eta^i \qquad \left(\eta = \frac{y}{h}\right)$$

Здесь коэффициенты b_i определяются из (2.1)—(2.3). Ограничимся тремя первыми членами полинома. Коэффициенты b_0, b_1, b_2 определим из следующих условий.

На дне

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y} = g\left(\cos\alpha_0\frac{\partial h}{\partial x} - \sin\alpha_0\right) \quad \text{при } \eta = 0$$

Это дает

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\tau}{\tau_0} = \rho g\frac{h}{\tau_0}\left(\cos\alpha_0\frac{\partial h}{\partial x} - \sin\alpha_0\right) = A$$

На свободной поверхности

$$\tau / \tau_0 = 0 \text{ при } \eta = 1$$

Тогда будем иметь

$$\tau / \tau_0 = 1 + A\eta - (1 + A)\eta^2 \qquad (0 \leqslant \eta \leqslant 1) \tag{3.1}$$

С другой стороны, напряжение трения при турбулентном течении можно представить в виде

$$\tau / \rho = \varepsilon\, \partial u / \partial y$$

Таким образом, получим дифференциальное уравнение для скорости

$$\rho \varepsilon \partial u / \partial \eta = \tau_0 h\, [1 + A\eta - (1 + A)\eta^2] \tag{3.2}$$

Для малых значений y справедлива формула Альтшуля—Хинце [4, 5]

$$\varepsilon = \alpha u_* y, \qquad u_* = \sqrt{|\tau_0| / \rho} \tag{3.3}$$

Здесь α — универсальная константа, u_* — динамическая скорость. Для любых y примем $\varepsilon = \alpha u_* f\,(y)$. Функцию $f\,(y)$ будем искать, следуя методу Саткевича так, чтобы в случае равномерного движения получился логарифмический профиль скорости, который более соответствует гидрометрическому материалу, чем другие предлагавшиеся. Тогда нетрудно получить

$$f\,(y) = y\,(1 - \eta) \tag{3.4}$$

Заметим, что при равномерном движении $A = -1$. Учитывая $\tau_0 / \rho = u_*^2 \operatorname{sign} w$ и (3.4), из (3.2) получим

$$\frac{u}{u_* \operatorname{sign} w} = \frac{1}{\alpha}\,[\ln \eta + (1 + A)\,\eta] + C\,(t,\, x), \qquad w = \int_0^1 u\, d\eta \tag{3.5}$$

Здесь $C\,(t,\, x)$ — произвольная функция. Функция $C\,(t,\, x)$ определяется из условия, что $u = \beta u_*$ при $\eta = k / h$, где k — средняя высота влияния выступов шероховатости, β — универсальная константа [4]. Интегрируя (3.5) по η в пределах от 0 до 1 и предполагая $k / h \ll {}^1/_2$, получим

$$\frac{w}{u_* \operatorname{sign} w} = \frac{1}{\alpha}\left[\ln \frac{h}{k} + \frac{A}{2} + \alpha\beta - \frac{1}{2}\right]$$

Отсюда, определяя $\lambda \geqslant 0$ соотношением $\tau_0 / \rho = \lambda\, |w|\, w$, получим

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1 + (1 + f_1 f_2)^{1/2}}{2\alpha^{-1} f_2}, \qquad f_1 = \frac{2}{\alpha^2}\frac{gh}{|w|\, w}\left(\sin \alpha_0 - \cos \alpha_0 \frac{\partial h}{\partial x}\right), \qquad f_2 = \ln \frac{h}{k} + \alpha\beta - \frac{1}{2}$$

Если для функции $f\,(y)$ примем линейную зависимость (3.3), справедливую, вообще говоря, при малых y, то удается учитывать и молекулярную вязкость, т. е. представить напряжение в виде [4]

$$\tau / \rho = (\nu + \varepsilon) \partial u / \partial y \tag{3.6}$$

В этом случае, принимая $\alpha u_* h / \nu \gg A,\ k / h \ll 1$, получим выражения для $\sqrt{\lambda}$ в следующем виде:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1 + [1 + {}^2/_3 f_1 (f_3 - {}^1/_6)]^{1/2}}{2\alpha^{-1} (f_3 - {}^1/_6)}, \qquad f_3 = \ln \frac{\alpha \nu^{-1} \sqrt{\lambda}\, |w|\, h}{1 + \alpha \nu \sqrt{\lambda}\, |w|\, k} + \alpha\beta - 1$$

Поступила 8 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Федявский К. К., Гиневский А. С. Нестационарный турбулентный пограничный слой крылового профиля и тела вращения. Ж. техн. физ., 1959, т. 29, № 7.
2. Стокер Д. Д. Волны на воде. Изд. иностр. лит., 1959.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
4. Альтшуль А. Д. Гидравлические потери на трение в трубопроводах. Госэнергоиздат, 1963.
5. Хинце И. О. Турбулентность. Физматгиз, 1963.