

Отсюда умножением на v_0 получается формула (1.11) для потерь энергии за единицу времени.

Поступила 14 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Стурова И. В. Внутренние волны, возникающие в экспоненциально стратифицированной жидкости при произвольном движении источника.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 3.
2. Graham E. W., Graham B. B. The tank wall effect on internal waves due to a transient vertical force moving at fixed depth in a density-stratified fluid.— J. Fluid Mech., 1980, vol. 97, N 1.
3. Городцов В. А., Теодорович Э. В. Об излучении внутренних волн при равномерном прямолинейном движении локальных и нелокальных источников.— Изв. АН СССР. ФАО, 1980, т. 16, № 9.
4. Городцов В. А., Теодорович Э. В. Плоская задача для внутренних волн, порождаемых движущимися сингулярными источниками.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 2.
5. Тернов И. М., Михайлин В. В., Халилов В. Р. Синхротронное излучение и его применения. М.: Изд-во МГУ, 1980.
6. Mowbray D. E., Rarity B. S. H. A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 28, N 1.
7. Городцов В. А. Излучение внутренних волн при вертикальном движении тел через неоднородную жидкость.— Инж.-физ. журн., 1980, т. 39, № 4.

УДК 532.517.4

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ФЛУКТУАЦИЙ СКОРОСТИ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ СПУТНЫХ СТРУЯХ

В. И. Букреев, В. А. Костомаха

(Новосибирск)

Получены экспериментальные данные об одномерных законах распределения вероятностей, а также о статистических моментах вплоть до шестого порядка, турбулентных флуктуаций скорости в спутных струях (гидродинамических следах) за телами плохой и удобообтекаемой формы. Они дополняют имеющуюся аналогичную информацию для различных турбулентных течений: за решеткой [1, 2], в двумерном следе [3], в круглой [4] и плоской [5] струях, в пограничном слое [6], в круглой трубе [7] и др. На основе этих данных обсуждаются вопросы об автомодельности рассматриваемого течения, о влиянии условий его формирования на характеристики флуктуаций в зоне автомодельности, а также о роли перемежаемости на границе следа.

1. Опыты проводились в низкотурбулентной аэродинамической трубе с помощью термоанемометрической аппаратуры фирмы «DISA Electronic» с линеаризатором. В рабочей части трубы, имеющей длину 4 м и поперечное сечение 40×40 см с треугольными вставками в углах для ослабления вторичных течений, на проволочках диаметром 0,05 мм закреплялась либо сфера диаметром $D = 1$ см, либо тело вращения (под нулевым углом атаки) диаметром миделева сечения $D = 1$ см и удлинением 8 : 1. И в том и в другом случае число Рейнольдса $Re = U_\infty D / \nu = 10^4$ (U_∞ — скорость набегающего потока, ν — кинематический коэффициент вязкости). Как показали измерения, такое значение Re было достаточно большим, чтобы в следе за сферой имела место автомодельность течения по продольной координате, а следовательно, и подобие по числу Рейнольдса. Для получения подобия по Re и автомодельности в следе за удлиненным телом в его лобовой части устанавливалось турбулизующее колечко диаметром 8 мм и толщиной 0,5 мм. Вследствие этого силы сопротивления F_x тела и сферы не сильно отличались друг от друга, так что коэффициенты сопротивления c_x , определяемые соотношением

$$F_x = c_x \rho S U_\infty^2 / 2, \quad S = \pi D^2 / 4,$$

оказались равными 0,39 и 0,48 соответственно. Малое отличие сил сопротивления хорошо согласовывалось с одной из основных целей данных опытов — показать, что характеристики спутной струи в автомоделной области не определяются однозначно лишь силой сопротивления и скоростью набегающего потока, но сильно зависят от формы тела.

Ниже используется цилиндрическая система координат x, r, θ , связанная с телом, начало отсчета которой расположено на задней кромке тела, а ось x направлена вниз по потоку. В качестве характерных масштабов скорости и длины наряду с постоянными величинами U_∞ и D используются также следующие функции от x :

$$U_c(x) = U_\infty \left(\frac{x - x_0}{\sqrt{c_x S}} \right)^{-2/3}, \quad l_c(x) = \sqrt{c_x S} \left(\frac{x - x_0}{\sqrt{c_x S}} \right)^{1/3},$$

взятые из соображений об автомоделности течения. Здесь x_0 — виртуальное начало спутной струи, которое в данных опытах оказалось близким к нулю для обоих тел [8].

Оценка плотности распределения вероятностей $p(e)$ стационарного в статистическом смысле сигнала термоанемометра $e(t)$ осуществлялась анализатором случайных процессов Histomat-S фирмы «Intertechnique». Сигнал $e(t)$ был связан с продольной компонентой скорости $u(t)$ в следе линейной зависимостью $e = a + ku$, где a и k — константы, определяемые при статической калибровке термоанемометра. При дальнейшей обработке на универсальной ЭВМ находились следующие статистические характеристики: плотность распределения вероятностей флуктуаций скорости

$$f(u) = p(e) \left| \frac{de}{du} \right| = kp(a + ku);$$

статистические моменты

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u) du, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (u - U)^2 f(u) du,$$

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (u - U)^n f(u) du, \quad n = 3, 4, 5, 6;$$

плотности распределения центрированных и нормированных флуктуаций

$$\varphi(u_0) = \sigma f(\sigma u_0), \quad u_0 = (u - U)/\sigma$$

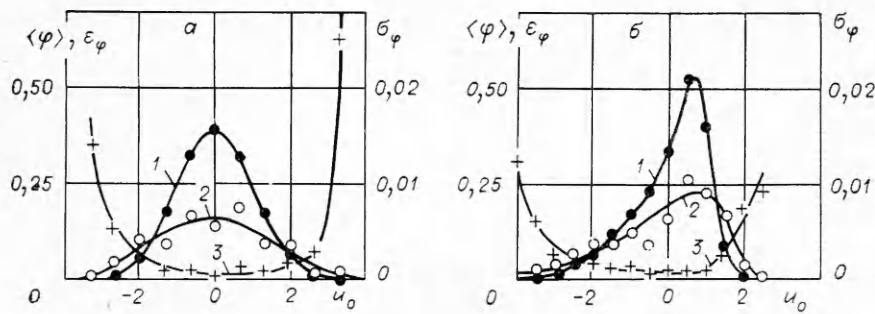
и характеристическая функция

$$\psi(is) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u_0) e^{isu_0} du_0, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Средняя скорость и интенсивность флуктуаций оценивались также независимым способом путем соответствующего осреднения реализаций $u(t)$ по времени.

2. Для рассмотрения вопросов правдоподобия сделанных в работе выводов осуществлялся теоретический (по алгоритмам, приведенным, например, в [9]) и экспериментальный анализ погрешностей измерений, обусловленных ограниченностью объемов статистических выборок, дискретизацией сигналов по времени и квантованием их по уровню, неопределенностью установки датчика термоанемометра в заданную точку потока (x, r) и т. д. Экспериментальный способ оценки погрешностей заключался в том, что в ряде характерных точек (x, r) проводились многократные повторные измерения в одних и тех же условиях. Дисперсия σ_Q^2 и коэффициент вариации ошибки ε_Q в рассматриваемой вероятностной характеристике Q подсчитывались по формулам:

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (Q_j - \langle Q \rangle)^2, \quad \varepsilon_Q = \frac{\sigma_Q}{\langle Q \rangle},$$



Ф и г. 1

где Q_j — результат измерения в j -м опыте; $\langle Q \rangle$ — среднее арифметическое результатов при N повторных измерениях. Для иллюстрации на фиг. 1 приведены данные о $\langle \varphi \rangle$, σ_φ и ε_φ для плотности распределения вероятностей $Q = \varphi(u_0)$, полученные таким способом при $N = 12$ в сечении следа за удлиненным телом $x/D = 100$ в точках $r/l_c = 0$ (фиг. 1, а) и $r/l_c = 0,4$ (фиг. 1, б). Кривые 1 есть $\langle \varphi \rangle$, 2 — σ_φ и 3 — ε_φ .

Следует отметить, что в данных опытах использовались выборки достаточно большого объема — свыше $2 \cdot 10^6$ дискретных значений сигнала $e(t)$, взятых с постоянным шагом $\Delta t = 10^{-4}$ с. Квантование сигнала по уровню осуществлялось на 256 равных интервалов. Это обеспечило достаточно малую абсолютную погрешность σ_φ . Что же касается относительной погрешности ε_φ , то в сигнале $e(t)$ всегда найдутся такие редкие большие отклонения, имеющие очень малую вероятность, для которых даже столь большой объем выборки недостаточен. Это и находит отражение в поведении кривых 3 на фиг. 1.

В анализируемом электрическом сигнале $e(t)$ всегда присутствует аддитивная помеха, обусловленная электронными шумами аппаратуры и фоновой турбулентностью свободного потока в аэродинамической трубе. Это имело место и в данной работе, причем специальными исследованиями было найдено, что основную часть помехи (до 70% по интенсивности) составлял электронный шум. При измерениях в окрестности оси спутной струи роль помехи была незначительной, поскольку полезный сигнал превышал ее по интенсивности в десятки раз. Но с приближением к границе спутной струи относительный вклад помехи возрастает, так что за пределами следа сигнал термоанемометра становится чистой помехой.

Пусть $e_0(t)$ — интересующий нас полезный сигнал, а $e_*(t)$ — помеха. Полагая, что помеха является аддитивной и не зависит от полезного сигнала, что, безусловно, верно, если e_* — электронный шум, и приемлемо как первое приближение, если e_* — фоновая турбулентность, для плотностей распределения вероятностей получим известное соотношение

$$p(e) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(e_0) p_*(e_0 - e) de_0,$$

где p_0 и p_* — характеристики полезного сигнала и помехи. При введении поправки задача заключается в том, чтобы по известным p и p_* восстановить p_0 . Но, к сожалению, эта математическая задача некорректна в том смысле, что малые вариации в исходных данных приводят к большим погрешностям в результатах вычислений.

Попытки решения этой задачи методом регуляризации привели к заключению, что в подобного рода опытах лучше оставить $p(e)$ без поправки, нежели исказить информацию при решении некорректной задачи. Результаты, где влияние помехи оказалось существенным, оговорены ниже.

При оценке статистических моментов задача о введении поправки на влияние шумов оказывается корректной, и фигурирующие ниже экспериментальные данные приведены с поправкой по алгоритмам

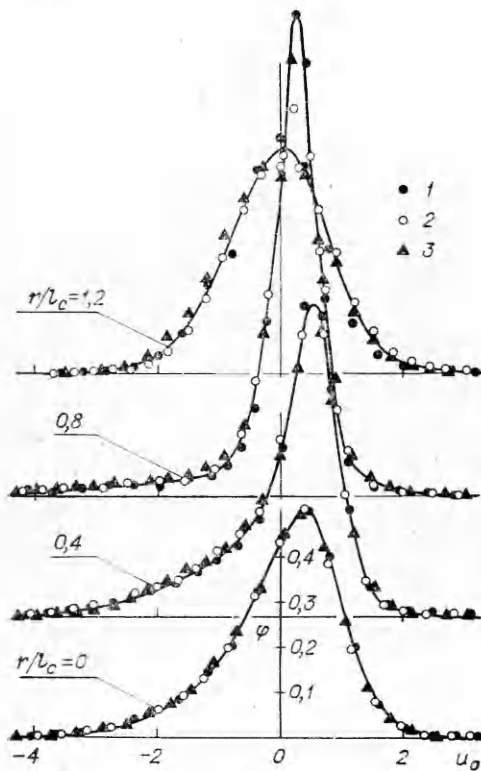
$$\begin{aligned}
 U_0 &= U - \bar{U}_*, \quad \sigma_0^2 = \sigma^2 - \sigma_*^2, \quad \mu_3^0 = \mu_3 - \mu_3^*, \\
 \mu_4^0 &= \mu_4 - \mu_4^* - 6\sigma_0^2\sigma_*^2, \quad \mu_5^0 = \mu_5 - \mu_5^* - 10\sigma_*^2\mu_3^0 - 10\sigma_0^2\mu_3^*, \\
 \mu_6^0 &= \mu_6 - \mu_6^* - 15\sigma_*^2\mu_4^0 - 20\mu_3^*\mu_3^0 - 15\sigma_0^2\mu_4^*,
 \end{aligned}$$

в которых звездочкой помечены характеристики помехи, полученные в результате анализа сигнала датчика, выведенного из следа. Эти алгоритмы справедливы для аддитивной независимой помехи.

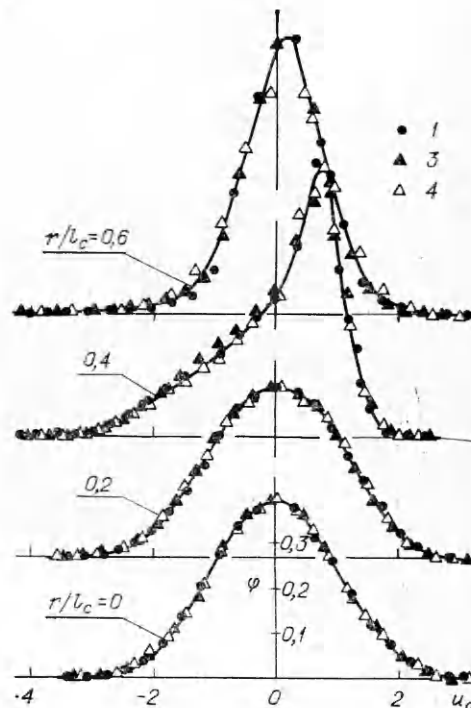
3. Экспериментальные данные о плотностях распределения вероятностей приведены на фиг. 2 (след за сферой) и фиг. 3 (след за удлиненным телом). Точки 1—4 соответствуют расстояниям $x/D = 100; 150; 200$ и 250 . Данные для разных сходственных точек $r/l_c = \text{const}$ смещены друг относительно друга по вертикали на некоторый постоянный произвольный выбранный интервал. При $r/l_c = 1,2$ для сферы и $r/l_c = 0,6$ для удлиненного тела отношение интенсивностей полезного сигнала и шума было близко к единице, поэтому здесь влияние помехи существенно. При меньших указанных на фигурах значениях r/l_c относительный вклад шумов был пренебрежимо мал.

Полученные данные свидетельствуют о том, что в указанном интервале x/D функции $\varphi(u_0)$ автомодельны, т. е. зависят только от r/l_c , но для каждого тела порознь. В сходственных же точках следов за телами различной формы они отличаются весьма значительно. Это полностью согласуется с аналогичным результатом для других вероятностных характеристик, полученным в [8].

Ни в одной точке турбулентного следа плотности распределения вероятностей не являются гауссовыми. Для сферы это непосредственно видно на фиг. 2, где графики $\varphi(u_0)$ несимметричны даже на оси следа. В случае удлиненного тела отличия от нормального распределения вблизи оси следа выявляются только для старших моментов четных порядков (см. ниже). Данный вывод согласуется с тем, что было получено для других турбулентных течений.

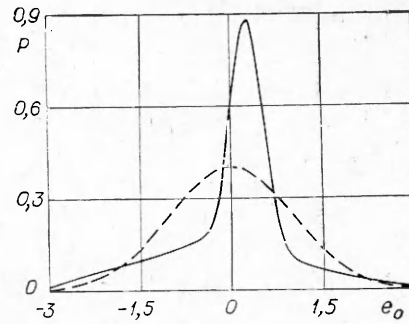


Фиг. 2



Фиг. 3

Существенное различие автомодельных следов за сферой и удлиненным телом объясняется разным характером перемежаемости течения у границы следа [10], которая при измерениях проявляется в том, что датчик, расположенный в зоне перемежаемости, случайным образом оказывается то в области турбулентного, то в области нелурбулентного движения. В результате этого его выходной сигнал есть логическая сумма двух случайных процессов:



Ф и г. 4

$$e(t) = e_1(t) \cup e_2(t),$$

где e_1 соответствует флуктуациям турбулентного, а e_2 — нелурбулентного происхождения. Пусть вероятность пребывания в турбулизованной области равна γ (по определению это есть так называемый коэффициент перемежаемости), а вероятность пребывания в нелурбулизованной области равна $1 - \gamma$. Эти два события несовместны и образуют полную группу. Тогда

$$p(e) = \gamma p_1(e) + (1 - \gamma)p_2(e),$$

где p_1 и p_2 — плотности вероятностей сигналов e_1 и e_2 .

Пусть каждый из сигналов e_1 и e_2 имеет нормальный закон распределения

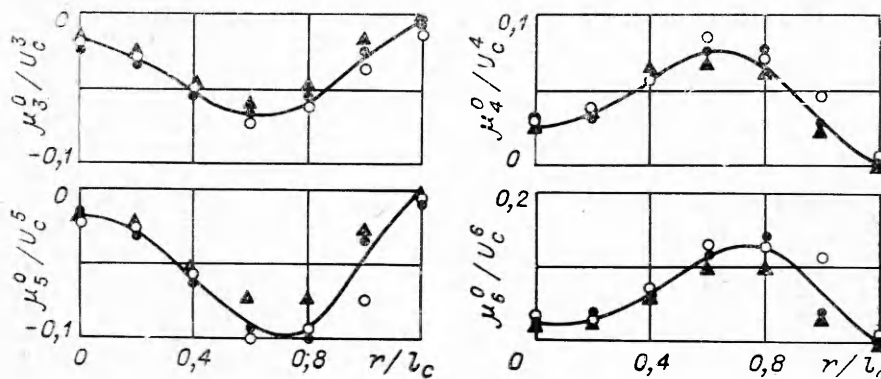
$$p_i(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{e - \langle e_i \rangle}{\sigma_i} \right)^2 \right\}, \quad i = 1, 2,$$

но между ними существует различие хотя бы по одному из параметров $\langle e_i \rangle$ или σ_i . Тогда p уже не будет нормальной. Для иллюстрации на фиг. 4 приведен результат расчета при $\gamma = 0,5$, $\langle e_1 \rangle = -2$, $\langle e_2 \rangle = 0$, $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 1$, сплошной кривой изображена нормированная (величина e_0 связана с e соотношением $e_0 = (e - \langle e \rangle) / \sigma$) плотность распределения вероятностей суммарного сигнала. Можно видеть очень сильное отличие этого распределения от изображенного штриховой кривой гауссова с параметрами $\langle e \rangle$ и σ , рассчитанными по соотношениям:

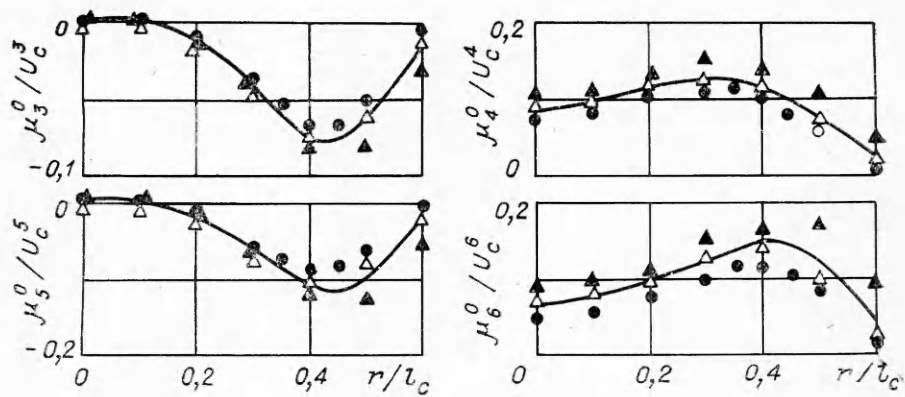
$$\langle e \rangle = \gamma \langle e_1 \rangle + (1 - \gamma) \langle e_2 \rangle,$$

$$\sigma^2 = \gamma \sigma_1^2 + (1 - \gamma) \sigma_2^2 + \gamma(1 - \gamma) (\langle e_1 \rangle - \langle e_2 \rangle)^2.$$

Этот пример в сочетании с опытным фактом об отличии распределений вероятностей флуктуаций от гауссова закона даже в тех турбулентных течениях, в которых четко выраженная перемежаемость отсутствует, наводит на мысль о необходимости использовать при описании турбулент-



Ф и г. 5

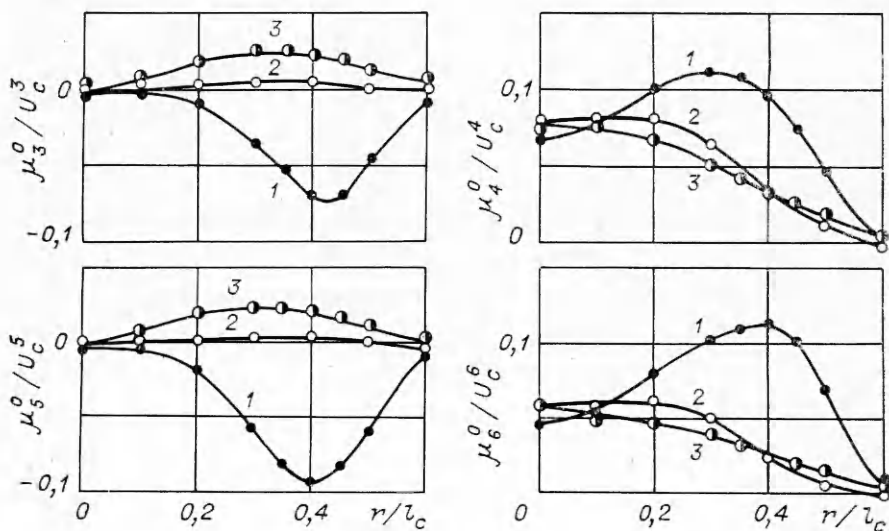


Ф и г. 6

ности не только простое, но и логическое сложение разномасштабных турбулентных вихреобразований.

Экспериментальные данные о статистических моментах с третьего до шестого порядка приведены на фиг. 5 для следа за сферой и фиг. 6 для следа за удлинённым телом. В эти моменты вносят существенный вклад редкие, но большие по абсолютной величине флуктуации. Сохранены те же обозначения, что и на фиг. 2, 3, а для нормировки использованы масштабы U_c и l_c . При такой нормировке экспериментальные точки для разных x/D должны ложиться на одну кривую, если имеет место автомодельность течения и по этим вероятностным характеристикам. В пределах точности измерений предположение об автомодельности не опровергается. Экспериментальные данные для моментов низших порядков U и σ в рассматриваемом течении приведены в [8]. Проверка статистической гипотезы о том, что распределения вероятностей являются гауссовыми, на полученной информации о моментах четных порядков показала ее несостоятельность даже для точек на оси следа за удлинённым телом, где сами распределения симметричны.

На фиг. 7 приведены данные о моментах высших порядков для всех трех компонент вектора скорости в следе за удлинённым телом при $x/D = 100$. Цифрой 1 помечены кривые, относящиеся к продольной, 2 — к радиальной и 3 — к тангенциальной компонентам. На оси следа характеристики радиальной и тангенциальной компонент должны совпадать, и это



Ф и г. 7

подтвердилось в опытах. Указанные компоненты близки друг другу и меньше отличаются от соответствующих величин для нормального закона, чем продольная компонента, и в других точках поперечного сечения следа.

Поступила 18 VI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. М.: ИЛ, 1955.
2. Frenkiel F. N., Klebanoff P. S. Two-dimensional probability distribution in a turbulent field.— Phys. Fluids, 1965, vol. 8, N 12.
3. Thomas R. M. Conditional sampling and other measurements in a plane turbulent wake.— J. Fluid Mech., 1973, vol. 57, pt 3.
4. Kuo A. J.-S., Corrsin S. Experiments on internal intermittency and fine-structure distribution functions in fully turbulent fluid.— J. Fluid Mech., 1971, vol. 50, pt 2.
5. Synyach M., Mathieu J. Zone de melange d'un jet plan fluctuation induits dans le cone à potential-intermittence.— Intern. J. Heat Mass Transfer, 1969, vol. 12, N 12.
6. Frenkiel F. N., Klebanoff P. S. Probability distribution and correlations in a turbulent boundary layer.— Phys. Fluids, 1973, vol. 16, N 6.
7. Букреев В. И., Зыков В. В., Костомаха В. А. Одномерные законы распределения вероятностей флуктуаций скорости при турбулентном течении в круглой трубе.— Изв. СО АН СССР, 1975, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
8. Букреев В. И., Васильев О. Ф., Лыткин Ю. М. О влиянии формы тела на характеристики автомоделльного осесимметричного следа.— ДАН СССР, 1972, т. 207, № 4.
9. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974.
10. Букреев В. И., Гусев А. В. и др. Влияние формы тела на перемежаемость турбулентного течения в осесимметричном следе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 1.

УДК 532.517.4 : 541.12 : 536.24

ЛАМИНАРИЗАЦИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРИЗУЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ДЛИННЫХ ТРУБАХ

А. М. Гришин, В. Б. Немировский

(Томск)

Характерными особенностями течения полимеризующейся жидкости в трубчатом реакторе являются сильная зависимость вязкости от глубины превращения и температуры и малая вязкость исходного вещества — мономера, которая приводит к турбулентному характеру течения при достаточно больших расходах.

Ламинарное течение вязких химически реагирующих жидкостей в двумерной постановке численно и аналитически исследовалось с учетом зависимости вязкости от температуры [1, 2], а также совместной зависимости вязкости от температуры и глубины превращения реагента [3].

В данной работе численно исследованы режимы турбулентного течения реагирующей жидкости в длинных трубах при сильной зависимости от глубины превращения и температуры и переменных граничных условиях по длине трубы.

1. Рассмотрим стационарное турбулентное течение химически реагирующей ньютоновской жидкости в длинной трубе с некаталитическими стенками при постоянном расходе жидкости. Предположим, что на входе в трубу профиль скорости однородный, температура жидкости на входе равна T_0 , на стенках трубы поддерживается постоянная температура, равная температуре на входе, или температура стенок трубы является функцией от продольной координаты. Смесь предполагается бинарной.

Система уравнений, описывающая стационарное турбулентное течение реагирующей жидкости в длинной трубе, в безразмерных переменных имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial (u\eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial (v\eta)}{\partial \eta} = 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \text{Pr} \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial \pi}{\partial \xi} \right],$$