

3. Крысанов Ю. А., Новиков С. А. Исследование динамического сжатия пенополистирола.— ПМТФ, 1977, № 8.
4. Pugsley A. and Macaulay M. The large-scale crumpling of thin cylindrical columns.— Quart. Journ. Mech. and Applied Math., 1960, vol. 13, pt 1.
5. Soden P. D., Al-Hassani S. T. S. and Johnson W. The crumpling of polyvinylchloride tubes under static and dynamic axial loads.— Institute of Physics Conf. Ser. 1974, N 21.
6. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963.
7. Кольский Г. Исследование механических свойств материалов при больших скоростях нагружения.— Механика, 1950, вып. 4.

УДК 539. 4.; 539.379

МОДЕЛЬ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ С НЕМОНОТОННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ РАЗРУШЕНИИ ОТ НАПРЯЖЕНИЯ

А. М. Локощенко, С. А. Шестериков

(Москва)

Развитие экспериментальных и теоретических аспектов исследования ползучести и длительной прочности металлов идет все ускоряющимися темпами. Однако к настоящему времени накоплено относительно небольшое количество надежных экспериментальных данных, характеризующих ползучесть металлов вплоть до разрушения в широком диапазоне напряжений. Это объясняется серьезными трудностями, с которыми сталкиваются исследователи при измерении деформаций ползучести образцов, находящихся при постоянных напряжениях (или нагрузках) в условиях высоких температур в течение длительного времени (иногда многих тысяч часов). Поэтому часто такие испытания либо не доводятся до разрушения (т. е. длительная прочность не рассматривается), либо они проводятся до разрушения без замера деформаций в процессе ползучести. Ограниченность и разрозненность фактического материала приводят к тому, что вопрос о формулировке уравнений, описывающих ползучесть материала вплоть до разрушения, даже в случае одноосного напряженного состояния остается открытым.

Наиболее полной при описании процесса ползучести конструкционных металлов является концепция механического уравнения состояния Ю. Н. Работнова [1] с системой кинетических уравнений для определения параметров, характеризующих рассматриваемое состояние. Согласно этой концепции, скорость ползучести \dot{p} определяется напряжением σ , температурой и некоторым количеством структурных параметров, которые в процессе ползучести изменяются в соответствии с кинетическими уравнениями. При описании длительной прочности чаще всего используется структурный параметр $\omega(t)$, который является некоторой мерой «растресканности» материала. Каждому состоянию «растресканности» приписывается значение ω из диапазона $0 \leq \omega \leq 1$, при этом значение $\omega = 0$ условно соответствует неповрежденному материалу, значение $\omega = 1$ — наличию макроскопических трещин.

В случае, когда $\omega(t)$ — единственный структурный параметр, ползучесть материала вплоть до разрушения можно описать следующей системой уравнений:

$$(1) \quad \dot{p} = f(\sigma, \omega), \quad \dot{\omega} = \varphi(\sigma, \omega).$$

При описании ползучести, характеризуемой установившейся и ускоряющейся стадиями, чаще всего пользуются уравнениями (1) в виде простых зависимостей степенного типа:

$$(2) \quad \dot{p} = a\sigma^n(1 - \omega)^{-s};$$

$$(3) \quad \dot{\omega} = b\sigma^k(1 - \omega)^{-r}.$$

Коэффициенты a и b при неизменной температуре можно считать постоянными. Рассмотрим случай хрупкого разрушения, когда вследствие относительной малости деформаций можно пренебречь изменением площади

поперечного сечения образца вплоть до разрушения в момент времени t^* . Полагая $\sigma(t) = \text{const}$, проинтегрируем (3)

$$(4) \quad \omega(t) = 1 - (1 - t/t^*)^{\frac{1}{r+1}}, \quad t^* = [b(1+r)\sigma^k]^{-1}.$$

Внесем (4) в (2) и проинтегрируем

$$(5) \quad p(t) = \frac{a}{b(r-s+1)} \sigma^{(n-k)} \left[1 - (1 - t/t^*)^{\frac{r+1-s}{r+1}} \right].$$

Величина деформации $p(t^*) = p^*$ в момент разрушения, согласно (5), равна

$$(6) \quad p^* = \frac{a}{b(r-s+1)} \sigma^{(n-k)}.$$

Согласно (6), при $n > k$ деформация p^* является монотонно возрастающей функцией напряжения σ , при $n < k$ — монотонно убывающей функцией.

В некоторых экспериментальных исследованиях не подтверждается факт монотонного изменения величины p^* во всем диапазоне напряжений. Так, в работе [2] при анализе результатов испытаний стали 15X1M1Ф на длительную прочность при 565°C в диапазоне $10^3 \text{ ч} < t^* < 10^4 \text{ ч}$ отмечено, что зависимость деформации ползучести в момент разрушения имеет минимум при $t^* = 2500 \text{ ч}$. Кроме того, показано, что зависимость количества трещин на единицу поверхности $m(t^*)$ имеет максимум, также соответствующий $t^* = 2500 \text{ ч}$. В работе приведено металлографическое объяснение указанного характера кривых $p^*(t^*)$ и $m(t^*)$ и отмечены структурные изменения в металле, существенно влияющие на характер и количество очагов разрушения.

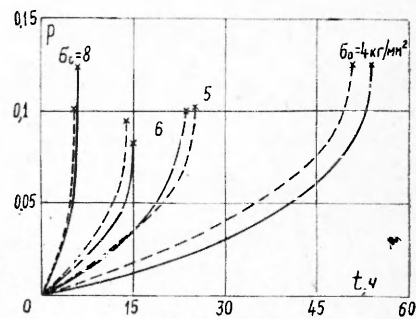
В [3] описаны результаты проведенных в Институте механики МГУ испытаний образцов из нержавеющей стали X18H10T при температуре 850°C . Образцы находились под действием постоянной растягивающей силы вплоть до разрушения. Был испытан 21 образец одной плавки при 4 значениях начального напряжения σ_0 : $\sigma_0 = 4; 5; 6$ и 8 кг/мм^2 . На фигуре сплошными линиями нанесены осредненные экспериментальные кривые, соответствующие каждому из этих значений σ_0 . Количество образцов N , испытанных при каждом напряжении, а также средние значения t^* и p^* для каждого σ_0 указаны в таблице при $g = 1$. Из таблицы следует, что деформация p^* в момент разрушения зависит от σ_0 немонотонно: в исследованном диапазоне σ_0 имеется значение $\sigma_0 = \sigma_*$, при котором $p^*(\sigma_*)$ минимальна. В рамках соотношений (2), (3) этот эффект описать нельзя. В [3] для описания этих испытаний использовалось условие $n = k$, при этом $p^*(\sigma_0) = \text{const}$.

Заменим в (2) степенную зависимость p от σ на функцию гиперболического синуса. Получим основную систему уравнений (с 5 константами материала) в виде

$$(7) \quad \dot{p} = a \frac{\text{Sh}(\sigma/c)}{(1 - \omega)^n};$$

$$(8) \quad \dot{\omega} = b\sigma^k/(1 - \omega)^k.$$

В начале процесса ползучести из (8) получаем $\dot{\omega} \sim b\sigma^k$, откуда следует $k > 1$. Будем пренебрегать изменением поперечного сечения образцов



σ_0 , кг/мм ²	N	g=1			g=2		
		\dot{p}_0 , ч ⁻¹	t^* , ч	p^*	\dot{p}_0 , ч ⁻¹	t^* , ч	p^*
4	6	0,00082	54,0	0,126	0,00100	51,0	0,127
5	7	0,00190	23,5	0,100	0,00176	25,2	0,103
6	6	0,00300	15,4	0,082	0,00310	14,1	0,094
8	2	0,00770	6,0	0,124	0,00935	5,7	0,100

и примем $\sigma(t) = \sigma = \text{const}$. Разделим левые и правые части уравнений (7), (8) и проинтегрируем

$$(9) \quad \frac{p}{p^*} = i - (i - \omega)^{(k-n+1)}, \quad p^* = \frac{a}{b(k-n+1)} \cdot \frac{\text{Sh}(\sigma/c)}{\sigma^k}.$$

Конечное значение p^* , согласно (9), имеет место только при $(k-n+1) > 0$.

Проанализируем зависимость p^* от σ . При малых σ функция $\text{Sh}(\sigma/c)$ эквивалентна σ/c , т. е. p^* монотонно убывает с ростом σ . При больших σ функция $\text{Sh}(\sigma/c) \sim (1/2) \exp(\sigma/c)$, так что p^* с ростом σ возрастает. Действительно,

$$\frac{dp^*}{d\sigma} = \frac{a}{b(k-n+1)} \left[\frac{\text{ch}(\sigma/c)}{c\sigma^k} - \frac{k \text{Sh}(\sigma/c)}{\sigma^{(k+1)}} \right].$$

При $\sigma \rightarrow 0$ имеем $\frac{dp^*}{d\sigma} = -\frac{a(k-1)}{b(k-n+1)c} \frac{1}{\sigma^k} \rightarrow -\infty$. При $\sigma \rightarrow +\infty$ имеем $\frac{dp^*}{d\sigma} \rightarrow \frac{a}{b(k-n+1)} \left(\frac{1}{c} - \frac{k}{\sigma} \right) \frac{\exp(\sigma/c)}{\sigma^k} \rightarrow +\infty$. Приравняв $dp^*/d\sigma$ нулю, получим уравнение для нахождения значения напряжения $\sigma = \sigma_*$, при котором деформация p^* минимальна:

$$(10) \quad \text{th} \left(\frac{\sigma_*}{c} \right) = \frac{1}{k} \frac{\sigma_*}{c}.$$

Подставляя (9) в (7) и интегрируя, получаем уравнение кривой ползучести:

$$(11) \quad \frac{p}{p^*} = 1 - \left(1 - \frac{t}{t^*} \right)^{\left(\frac{k-n+1}{k+1} \right)}, \quad t^* = [b(k+1)\sigma^k]^{-1}.$$

Константы, входящие в уравнения модели (7), (8), определим следующим образом. При установившейся ползучести имеем $p_0 = a \text{Sh}(\sigma/c)$. Постоянные a и c определяем методом наименьших квадратов из условия соответствия экспериментальных и расчетных значений p_0 . Параметры k и b определяются методом наименьших квадратов с использованием (11). После этого оставшуюся константу n находим, осредняя p^* согласно (9).

Обработка результатов испытаний нержавеющей стали Х18Н10Т при 850°C по этой методике привела к следующим значениям констант: $a = 3,12 \times 10^{-4}$ ч⁻¹, $c = 2,05$ кг/мм², $k = 3,17$, $b = 0,58 \times 10^{-4}$ (кг/мм²)^{-3,17} ч⁻¹, $n = 2,36$. Кривые ползучести (11) с учетом этих величин приведены на фигуре штриховыми линиями. В таблице (при $g = 2$) приведены теоретические значения p_0 , t^* и p^* при каждом напряжении σ . Значение σ_* , согласно (10), равно 6,5 кг/мм², т. е. находится внутри исследуемого диапазона напряжений.

Заметим, что при описании кривых ползучести, у которых зависимость $p^*(\sigma)$ имеет локальный максимум, можно в (7) ввести степенную функцию от напряжения σ , а в (8) — функцию гиперболического синуса.

Итак, введение различных функциональных соотношений для учета влияния напряжения на скорость ползучести и скорость накопления поврежденности дает возможность описать немонотонную зависимость деформации разрушения от уровня напряжения.

Поступила 25 XI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
2. Мищенко Л. Д., Дьяченко С. С., Тарабанова В. П. Исследование изменений структуры и характера разрушения стали 15Х1М1Ф в процессе ползучести. — Изв. высш. учеб. заведений. Черн. металлургия, 1978, № 2.
3. Локощенко А. М., Шестериков С. А. Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении. — ПМТФ, 1980, № 3.

УДК 539.30

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОБОЛОЧКИ С НЕДЕФОРМИРУЕМЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ ВОЛОКНАМИ

Л. И. Шкутин

(Новосибирск)

При произвольных поворотах и деформациях, подчиненных условию нерастяжимости поперечных волокон, трехмерная нелинейная задача деформирования оболочки сведена к двумерной задаче деформирования ее базисной поверхности.

Сформулированная двумерная задача требует постановки пяти контурных граничных условий. Описываемая ею нелинейная модель деформируемой поверхности отличается от модели Коссера отсутствием поперечных компонент у тензора внутренних моментов.

При изложении материала сохранены обозначения, принятые в [1]. Прописные латинские индексы принимают значения 1, 2 и 3, строчные — 1 и 2.

1. **Оболочка как трехмерный безмоментный континуум.** Пусть континуум, образующий оболочку, является безмоментным и в начальный момент времени (до деформации) занимает трехмерную область (объем) V с границей (поверхностью) S . Эта область параметризуется лагранжевыми координатами t_N с базисом $A_{(M)}(t_N)$.

При деформации оболочки происходит непрерывное преобразование начального базиса в мгновенный базис $A_{(M)}(t_N)$ (возможная зависимость от времени предполагается, но явно не указывается). Из этого полного преобразования выделяется жесткий поворот начального базиса, преобразующий его в повернутый базис $A_{[M]}(t_N)$.

Преобразование жесткого поворота выражается через векторное поле поворотов $V(t_N)$ взаимно обратными формулами Родрига

$$(1.1) \quad \begin{aligned} A_{[N]} &= A_{(N)} + (1/F)V \times (A_{(N)} + (1/2)V \times A_{(N)}), \\ A_{(N)} &= A_{[N]} - (1/F)V \times (A_{[N]} - (1/2)V \times A_{[N]}), \quad F = 1 + (1/4)V \cdot V \end{aligned}$$

(соответствующие формулы в [1] по вине автора содержат опечатку).

Поле поворотов сохраняет начальную метрику оболочки, производя лишь изгибания погруженных в нее линий и поверхностей. Мерой этих изгибаний служит тензорное поле $V_{[M]} = (1/F)(\nabla_M V + (1/2)V \times \nabla_M V) = V_{[MN]} A^{[N]}$ (∇_M — оператор частного дифференцирования по t_M).

Через тензор изгибаний определяются ковариантные производные от векторов повернутого базиса: $\nabla_{(M)} A_{[N]} = V_{[M]} \times A_{[N]}$ ($\nabla_{(M)}$ — оператор ковариантного дифференцирования по t_M в начальном базисе).

Преобразование повернутого базиса в мгновенный порождает тензорное поле деформаций

$$(1.2) \quad U_{[M]} = A_{(M)} - A_{[M]} = U_{[MN]} A^{[N]}.$$

Если $U(t_N)$ — векторное поле перемещений, то по определению справедливо равенство

$$(1.3) \quad A_{(M)} = A_{[M]} + \nabla_M U$$

и из (1.2) следует уравнение

$$(1.4) \quad U_{[M]} = \nabla_M U + A_{(M)} - A_{[M]},$$

которое в совокупности с (1.1) определяет поле деформаций через поля перемещений и поворотов.

Имеют место следующие правила варьирования кинематических полей оболочки (∇_0 — оператор варьирования):

$$\begin{aligned} \nabla_0 A_{[M]} &= \nabla_0 \times A_{[M]}, \quad \nabla_M \nabla_0 = \nabla_0 V_{[MN]} A^{[N]}, \quad \nabla_M U_0 - \nabla_0 \times A_{(M)} = \nabla_0 U_{[MN]} A^{[N]}, \\ \nabla_0 &= (1/F)(\nabla_0 V + (1/2)V \times \nabla_0 V), \quad U_0 = \nabla_0 U. \end{aligned}$$

Определенные в области V и отнесенные к ее начальной метрике плотности полей объемных сил $F(t_N)$ и напряжений $X^{(M)}(t_N)$ подчиняются локальным (статическим или динамическим) уравнениям