ПМТФ, № 2, 1971

О СПЕКТРЕ ФЛУКТУАЦИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И СКАЛЯРНОЙ ПРИМЕСИ В АКУСТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

С. И. Вайнштейн

(Иркутск)

Рассматриваются флуктуации магнитного поля в акустической турбулентности. Выведено уравнение для спектрального тензора флуктуаций однородного магнитного поля. В некотором предельном случае получен спектр установившихся пульсаций при наличии внешнего источника. Показано, что в инерциальной подобласти существуют три вида спектра, каждый из которых соответствует определенной области волнового пространства.

Аналогичные результаты получены для флуктуаций однородной скалярной примеси.

При наличии акустической турбулентности слабые флуктуации магнитного поля при некоторых условиях будут нарастать со временем [1]. Если

$$S = M^3 R_m \gg 1$$

где M — число Маха, R_m — магнитное число Рейнольдса, то такая неустойчивость по отношению к магнитному полю будет действительно иметь место. Флуктуации магнитного поля будут нарастать до тех пор, пока сила Лоренца не станет существенно влиять на движение, т. е. когда магнитное давление не сравнится с плазменным. Для такого случая затруднительно получить спектр установившихся флуктуаций, ибо здесь отсутствует подходящий малый параметр.

Если $S \ll 1$, флуктуации при отсутствии внешних источников будут затухать. Здесь рассматривается случай, когда имеется внешний источник.

Это, по-видимому, есть единственная возможность длительного сосуществования магнитного поля и акустической турбулентности, так как при $S \gg 1$ турбулентность в конце концов перестанет быть акустической. К этой задаче непосредственно примыкает задача о спектре флуктуаций скалярной примеси при акустической турбулентности ввиду сходства уравнений для флуктуаций в обоих задачах. Поэтому ниже будет рассмотрен и этот вопрос.

1. Спектр флуктуаций магнитного поля.

1. Наиболее просто задать источник следующим образом: будем полагать, что имеется однородное магнитное поле H_0, флуктуации $h \ll H_0$.

Представляются две возможности: $R_m \ll 1$, $R_m \gg 1$. Случай $R_m \ll 1$ был рассмотрен Г. С. Голицыным [2]. Пусть $R_m \gg 1$. Уравнение для магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \nu_m \Delta \mathbf{H} \tag{1.1}$$

может быть упрощено из-за малости флуктуаций

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,[\mathbf{v}, \mathbf{H}_0] + \nu_m \Delta \mathbf{h} \tag{1.2}$$

или в фурье-представлении

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = i\left[\mathbf{k}\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\,\varphi(\mathbf{k}), \mathbf{H}_0\right]\right] - \nu_m k^2 \mathbf{h}$$

Здесь ν_m — магнитная вязкость, $\varphi(\mathbf{k})/k$ — фурье-образ гидродинамического потенциала. Выразим $\mathbf{h}(\mathbf{k}, t)$ через начальное поле

$$\mathbf{h}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{k}, 0)\, e^{-\nu_m k^2 t} + i\int_0^t e^{-\nu_m k^2 (t-t_1)}\left[\mathbf{k}\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\,\varphi(\mathbf{k}, t_1), \mathbf{H}_0\right]\right] dt_1 \qquad (1.3)$$

Время изменения $\varphi(\mathbf{k}, t)$ есть $(kc)^{-1}$, c — скорость звука.

Далее будем предполагать, что флуктуации скорости и магнитных полей однородны, кроме того, флуктуации скорости изотропны

$$\langle \varphi(\mathbf{k}, t)\, \varphi^*(\mathbf{k}', t')\rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\, f(k, |t - t'|) \qquad (1.4)$$
$$\langle h_i(\mathbf{k}, t)\, h_j^*(\mathbf{k}', t)\rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\, T_{ij}(k, H_0, t)$$

Умножим (1.3) на комплексно сопряженное, усредним правую и левую части, полагая, что $\mathbf{h}(\mathbf{k}, 0)$ статистически не зависит от $\varphi(\mathbf{k}, t)$, в результате получим

$$T_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{H}_0, t) = T_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{H}_0, 0)\, e^{-2\nu_m k^2 t} +$$
$$+ \left\{\frac{k_i k_j}{k^2}(\mathbf{k}\mathbf{H}_0)^2 + H_{0i} H_{0j} k^2 - (\mathbf{k}\mathbf{H}_0)\left[H_{0i} k_j + H_{0j} k_i\right]\right\} \times \qquad (1.5)$$
$$\times \int_0^t\!\!\int_0^t \exp\left[-2\nu_m k^2 t + \nu_m k^2 (t_1 + t_2)\right] f(k, |t_1 - t_2|)\, dt_1 dt_2$$

Для вычисления интеграла в правой части (1.5) сделаем еще одно фурье-преобразование $f(k, t)$ по времени

$$f(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} J(k, \omega)\, d\omega \qquad (1.6)$$

Далее

$$\int_0^t\!\!\int_0^t \exp\left[-2\nu_m k^2 t + \nu_m k^2 (t_1 + t_2)\right] f(k, |t_1 - t_2|)\, dt_1 dt_2 =$$
$$= \left(1 + e^{-2\nu_m k^2 t}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J(k, \omega)}{\nu_m^2 k^4 + \omega^2}\, d\omega - \qquad (1.7)$$
$$- 2e^{-\nu_m k^2 t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} J(k, \omega)}{\nu_m^2 k^4 + \omega^2}\, d\omega$$

2. Ввиду того что начальное поле считается некоррелированным со скоростями, имеет смысл рассматривать (1.5) при $t > \tau$, где τ — время корреляции, т. е. время в течение которого система успевает «забыть» начальные условия. Так как $R_m \gg 1$, единственным параметром, определяющим τ, будет время корреляции в k-пространстве или время взаимодействия фононов. Это τ возьмем из работы [3]

$$\tau = \frac{c}{E(k)\, k^2} \qquad (1.8)$$

$$E(k) = A v^2 \lambda^{-1/2} k^{-3/2} \qquad (A \approx 1)$$

Здесь $E(k)$ — спектр мощности акустических колебаний, λ — внешний масштаб, v^2 — средний квадрат амплитуды; при $k > 1/\lambda$ спектральная область соответствует инерциальной. Именно в этой области $E(k)$ имеет вид (1.8), при $k < 1/\lambda$ $E(k) \to 0$.

Рассмотрим сначала (1.7) в той области волнового пространства, где выполняется соотношение

$$\tau < \frac{1}{\nu_m k^2} \quad \text{или} \quad k^{3/2} < \frac{v^2\lambda^{-1/2}}{c\nu_m} = k_1^{3/2} \tag{1.9}$$

С другой стороны, пусть $k > 1/\lambda$ (будем интересоваться инерциальной подобластью). Для существования интересующей области $1/\lambda \ll k \ll k_1$ должно выполняться неравенство

$$MR_m \gg 1 \tag{1.10}$$

Рассмотрим теперь (1.7). Заметим, что при $t \gg \tau$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{J(k, \omega)\, e^{i\omega t}}{\nu_m^2 k^4 + \omega^2}\, d\omega \to \frac{\pi J(k, 0)}{\nu_m k^2}\, e^{-\nu_m k^2 t}$$

Теперь можно составить уравнение для T_{ij}

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial t} + 2\nu_m k^2 T_{ij} = 2\nu_m k^2 \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{H}_0) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{J(k, \omega)}{\nu_m^2 k^4 + \omega^2}\, d\omega \tag{1.11}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{k_i k_j (\mathbf{k}\mathbf{H}_0)^2}{k^2} + H_{0i} H_{0j} k^2 - (\mathbf{k}\mathbf{H}_0)\,[H_{0i} k_j + H_{0j} k_i]$$

При $t \to \infty$

$$T_{ij} \to \sigma_{ij} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{J(k, \omega)}{\nu_m^2 k^4 + \omega^2}\, d\omega \tag{1.12}$$

Для приближенного вычисления (1.12) (точное значение $J(k, \omega)$ неизвестно) заметим, что

$$\frac{1}{\nu_m^2 k^4 + \omega^2} \approx \frac{\pi}{\nu_m k^2}\, \delta(\omega)$$

Кроме того, $J(k, \omega)$ имеет резкий максимум при $\omega = \pm ck$. Представим поэтому $J(k, \omega)$ следующим образом:

$$J(k, \omega) = J(k, 0)\, e(ck - \omega)\, e(ck + \omega) + {}^1/_2 f(k, 0)\, [\delta(\omega + ck) + \delta(\omega - ck)] \tag{1.13}$$

где $e(x)$ — единичная ступенчатая функция: $e(x) = 1$ при $x > 0$ и $e(x) = 0$ при $x \leqslant 0$. Теперь (1.12) вычисляется

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{J(k, \omega)}{\nu_m^2 k^4 + \omega^2}\, d\omega \approx \frac{\pi J(k, 0)}{\nu_m k^2} + \frac{f(k, 0)}{c^2 k^2} \qquad \left(f(k, 0) = \frac{E(k)}{4\pi k^2}\right) \tag{1.14}$$

$J(k, 0)$ получено в [1]

$$J(k, 0) = \frac{\pi k}{2c^3} \int\limits_{1/2 k}^{\infty} f^2(q, 0)\, dq \tag{1.15}$$

Если $E(k)$ имеет вид (1.8), то при $k > 1/\lambda$

$$J(k, 0) = \frac{A^2 v^4}{3\pi c^3 \lambda} k^{-5} \tag{1.16}$$

Поскольку в области $1/\lambda < k < k_1$

$$\frac{\pi J(k, 0)}{\nu_m k^2} \gg \frac{f(k, 0)}{c^2 k^2}$$

стационарный спектральный тензор T_{ij} имеет вид

$$T_{ij} = {}^1/_3 \sigma_{ij} \nu_m^{-1} v^4 c^{-3} \lambda^{-1} k^{-7} \tag{1.17}$$

Из выражений (1.17) и (1.11) видно, что спектр существенно анизотропен. След тензора

$$\sigma_{ii} = H_0^2 k^2 - (\mathbf{H}_0 \mathbf{k})^2$$

Интегрируя T_{ij} по телесному углу и умножая на k^2, получаем спектр мощности магнитных пульсаций

$$F(k) = {}^8/_9 A^2 H_0^2 \pi \nu_m^{-1} v^4 c^{-3} \lambda^{-1} k^{-3} \tag{1.18}$$

Отсюда легко вычислить энергию магнитных пульсаций

$$\frac{h^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi} \int\limits_{1/\lambda}^{\infty} F(k)\, dk = H_0^2 \frac{S}{18}$$

Так как $S \ll 1$, то $h \ll H_0$.

3. Пусть теперь

$$\tau > 1/\nu_m k^2$$

т. е. $k > k_1$, но $k < c\nu_m^{-1}$. В этой области волнового пространства корреляция между магнитным полем и полем скоростей устанавливается за время $\tau_1 = (\nu_m k^2)^{-1}$, так что необходимо рассматривать (1.7) при $t > \tau_1$. Учитывая это обстоятельство, получаем стационарный спектральный тензор T_{ij} и $F(k)$

$$T_{ij} = \sigma_{ij} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{J(k, \omega)}{\nu_m^2 k^4 + \omega^2} d\omega \approx \sigma_{ij} \frac{f(k, 0)}{c^2 k^2} \tag{1.19}$$

$$F(k) = \frac{2}{3} H_0^2 \frac{E(k)}{c^2}$$

И, наконец, при $k > c\nu_m^{-1} = k_2$

$$T_{ij} \approx \sigma_{ij} \frac{f(k, 0)}{\nu_m^2 k^4}, \qquad F(k) = \frac{2}{3} H_0^2 \frac{E(k)}{\nu_m^2 k^2} \tag{1.20}$$

Последний спектр — спектр Г. С. Голицына [2].

Таким образом, в рассмотренном случае, когда $R_m \ll M^{-3}$, представляются следующие возможности:

1) $R_m \ll M$, тогда $k_2 \ll 1/\lambda$ и при $k > 1/\lambda$ устанавливается спектр (1.20);

2) $M \ll R_m \ll M^{-1}$, тогда $k_2 \gg 1/\lambda$, но $k_1 \ll 1/\lambda$. Следовательно, при $1/\lambda < k < k_2$ функция $F(k)$ соответствует (1.19), при $k > k_2$ функция $F(k)$ соответствует (1.20);

3) $M^{-1} \ll R_m \ll M^{-3}$, тогда $k_2 \gg k_1 \gg 1/\lambda$. Следовательно, при $1/\lambda < k < k_1$ устанавливается спектр (1.18), при $k_1 < k < k_2$ — спектр (1.19), при $k > k_2$ — спектр (1.20).

Обратим внимание на следующее обстоятельство: спектры (1.19) и (1.20) будут существовать даже в том случае, если между акустическими колебаниями нет взаимодействия — они представляют собой набор случайных шумов. При этом выражение (1.19) обусловлено «слежением» магнитного поля за колебаниями, которое действительно имеет место, так как в этой спектральной области период колебаний значительно меньше, чем время затухания поля, а выражение (1.20) представляет собой флуктуации, генерация которых (обусловленная скоростями) компенсируется затуханием. Только лишь спектр (1.18) возникает при наличии взаимодействия между колебаниями (т. е. по существу турбулентности) и частиц, за которыми «следит» магнитное поле.

2. Спектр флуктуаций скалярной примеси. В данной задаче будем исходить из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} f = \mu \Delta f \tag{2.1}$$

Здесь f — плотность скалярной примеси (например, температура); μ — коэффициент молекулярной температуропроводности (если температура) или аналогичный коэффициент переноса. Роль R_m в этой теории играет число Пекле P. Будем полагать, что $P \gg 1$, но

$$S_\mu = M^3 P \ll 1 \tag{2.2}$$

Условие (2.2) необходимо для того, чтобы флуктуации были малы

$$f = f_0 + f_1, \quad f_0 = \text{const}, \quad f_1 \ll f_0$$

(f_1 — флуктуации)

Обоснование этого утверждения будет дано ниже. Пользуясь малостью f_1, упростим (2.1)

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + f_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = \mu \Delta f_1 \tag{2.3}$$

или в фурье-представлении

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + \mu k^2 f(\mathbf{k}, t) = -i f_0 k \varphi(\mathbf{k}, t) \tag{2.4}$$

$$f_1(\mathbf{k}, t) = f(\mathbf{k}, 0)\, e^{-\mu k^2 t} - i f_0 k \int_0^t e^{-\mu k^2 (t-t_1)} \varphi(\mathbf{k}, t_1)\, dt_1 \tag{2.5}$$

Далее, полагая

$$\langle f_1(\mathbf{k}, t) f_1^*(\mathbf{k}', t)\rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\, T(k, t) \tag{2.6}$$

получаем уравнение для T, пользуясь таким же методом, как с магнитными полями

$$\frac{\partial T(k, t)}{\partial t} + 2\mu k^2 T(k, t) = 2\mu k^4 f_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J(k, \omega)}{\mu^2 k^4 + \omega^2}\, d\omega \tag{2.7}$$

При $t \to \infty$ устанавливается стационарный спектр

$$T \to k^2 f_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J(k, \omega)}{\mu^2 k^4 + \omega^2}\, d\omega \tag{2.8}$$