ПМТФ, № 2, 1975

УДК 534

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПИ СВЯЗАННЫХ АНГАРМОНИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

А. С. Долгов

(*Харьков*)

Изучается развитие колебаний в одномерной цепи связанных осцилляторов. В предположении слабой нелинейности взаимодействия между осцилляторами методами нелинейной механики найдена временная зависимость смещений элементов цепи после начального сдвига, сообщенного одному из звеньев. Выявлены основные особенности развития процесса колебаний. Проводится сравнение с результатами линейной теории.

Связанные осцилляторы моделируют различные механические, электрические, физические системы. В теоретических работах, рассматривающих нестационарные колебания в системах связанных осцилляторов [1—4], взаимодействие считалось гармоническим. Однако линейная аппроксимация силового взаимодействия является всего лишь простейшим приближением. В ряде случаев недостаточность линейной теории очевидна. Выполненные численные расчеты [5—7] и работы, учитывающие нелинейность взаимодействия только для отдельных элементов структуры [6—8], лишь частично заполняют указанный пробел. Ниже рассматривается задача отыскания законов движения бесконечной одномерной цепи со взаимодействием только ближайших соседей при наличии слабой нелинейности.

Если считать, что в начальный момент некоторый элемент цепи (приписываем ему индекс О) получает смещение a_0, то решение линейной задачи представляется в виде

$$x_n(t)=a_0 I_{2n}(\omega t), \tag{1}$$

где $x_n(t)$ — смещение n-го элемента относительно положения равновесия; I_i — функция Бесселя i-го порядка от действительного аргумента; ω — предельная частота колебаний цепи; t — время, звенья пронумерованы в порядке удаленности от «нулевого» элемента.

Следуя основным посылкам асимптотических методов изучения нелинейных колебаний [9—10], целесообразно искать решение задачи в виде

$$x_n(t)=a_n(t) I_{2n}(\omega t+\theta_n), \tag{2}$$

где a_n и θ_n— некоторые функции времени, подлежащие определению. Их целесообразно ввести следующим образом. Потребуем, чтобы выражения для производных смещений x_n по времени имели вид, аналогичный соответствующему линейному выражению, т. е.

$$dx_n/dt=\frac{\omega}{2}(I_{2n-1}-I_{2n+1})(\psi_n)\cdot a_n,\quad \psi_n=\omega t+\theta_n. \tag{3}$$

Дифференцируя (2) по t и учитывая постулированное соотношение (3), получаем

$$\frac{d\theta_n}{dt}=-2\left(\frac{I_{2n}}{I_{2n-1}-I_{2n+1}}\right)(\psi_n)\,a_n^{-1}\frac{da_n}{dt}. \tag{4}$$

Уравнения движения элементов структуры имеют вид

$$d^2x_n/dt^2=\omega^2/4\,(x_{n-1}-2x_n+x_{n+1})+\varepsilon\,[f\,(x_{n-1}-x_n)-f\,(x_n-x_{n+1})], \tag{5}$$

где f — функция, определяющая вид нелинейности; ε — параметр малости.

Приравнивая правые части уравнений (5) к результату дифференцирования выражений (3) по времени, получим совокупность уравнений, связывающих $a_i\theta_j$. С учетом (4) получается

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad & da_n/dt = 1/2\omega\,(I_{2n-1} - I_{2n+1})(\psi_n)\,\{\varepsilon f\,[a_{n-1}I_{2n-2}(\psi_{n-1}) - a_n I_{2n}(\psi_n)] - \\
& - \varepsilon f\,[a_n I_{2n}(\psi_n) - a_{n+1}I_{2n+2}(\psi_{n+1})] + \omega^2/4\,[a_{n-1}I_{2n-2}(\psi_{n-1}) + \\
& + a_{n+1}I_{2n+2}(\psi_{n+1}) - a_n(I_{2n-2} + I_{2n+2})(\psi_n)]\}\,\{1/4\,[(I_{2n-1} - I_{2n+1})^2 - \\
& - I_{2n}(I_{2n-2} - 2I_{2n} + I_{2n+2})]\,(\psi_n)\}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Совокупность уравнений первого порядка для новых функций a_n, θ_n (4), (6) эквивалентна исходной системе уравнений (5).

Так как отличие da_n/dt от нуля есть прямое следствие наличия нелинейной добавки, то может показаться странным, что уравнения (6) имеют справа слагаемые, не содержащие ε. Следует, однако, принять во внимание, что нетождественность a_i и a_j так же, как и ψ_i, ψ_j $(i\neq j)$, проистекает из-за наличия нелинейности. В линейном случае указанные величины одинаковы для всех индексов. Если же $\varepsilon\neq 0$, то в общем случае нет оснований считать, что зависимости $a_n(t)$ для всех n идентичны. Таким образом, при $\varepsilon\to 0$ a_{n+1}, $a_{n-1}\to a_n$; ψ_{n+1}, $\psi_{n-1}\to\psi_n$, что и обеспечивает переход к исходному линейному случаю.

Система уравнений (4), (6) не проще системы (5). Можно, однако, заменить точную систему (4), (6) более простой приближенной. Во-первых, в слагаемых, которые пропорциональны ε, можно пренебречь различием между a_n и $a_{n\pm 1}$; ψ_n и $\psi_{n\pm 1}$: погрешность этого упрощения более высокого порядка малости, чем ε. Во-вторых, можно усреднить уравнения (4), (6) на характерном для функций Бесселя интервале ψ. Операция усреднения будет действовать только на известные функции. При этом мы перейдем от переменных a_n и θ_n к соответствующим средним по характерному циклу колебания величинам; последние ниже обозначаются так же, как и соответствующие неосредненные величины. Обсуждаемая процедура аналогична стандартной технике разделения «быстрого» и «медленного» времени, т. е. асимптотическим методам изучения нелинейных колебаний [9—10]. Операция усреднения особенно проста в области больших значений аргументов функций Бесселя (область больших времен), так как в этой асимптотической области длительности циклов колебаний, описываемых функциями Бесселя, неизменны. Бесконечную систему нелинейных уравнений первого порядка, полученную в результате выполнения изложенных операций, решить в общем виде не удастся. Однако можно найти решение в некоторых интересных случаях.

Проще всего обстоит дело, если функция f нечетна, т. е. тогда, когда кривая зависимости потенциальной энергии от расстояния симметрична. Воспользуемся асимптотическими выражениями для функций Бесселя [11]

$$
(7)\qquad I_\nu(z)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{4\nu^2-1}{8z}\sin\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\},
$$

взятыми с точностью до членов $\sim z^{-1}$, и будем считать что $f(y)$ соответствует некоторой нечетной степени y $(f(y)=y^{2m+1})$. Будем также считать, что $a_{n+1}=a_{n-1}=a_n$; $\theta_{n+1}=\theta_{n-1}=\theta_n$. Допустимость таких связей неочевидна, но в области применимости формулы (7) подтверждается результатами расчетов.

С точностью формулы (7) знаменатель выражения (6) не отличается от $2(\pi\psi)^{-1}$. Усреднение на отрезке 2π дает

$$
(8)\qquad \frac{da_n}{dt} = -2^{3m+1}\,\frac{\varepsilon}{\omega}\,\frac{1}{\pi^m}\,\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\,\frac{a_n^{2m+1}}{(\omega t)^{m+1}}.
$$

Решение нелинейного уравнения (8) имеет вид $(m\neq 0)$:

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad & a_n(t) = a_{n0}\left\{\frac{z^m z_0^m}{z^m z_0^m + 2Aa_{n0}^{2m}\left(z^m - z_0^m\right)}\right\}^{\frac{1}{2m}};\\
& z=\omega t,\quad z_0=\omega t_0,\quad a_{n0}=a_n(t_0);\\
& A = 2^{2m}\,\frac{\varepsilon}{\omega}\,\frac{1}{\pi^m}\,\frac{(2m+1)!!}{(m+1)!}.
\end{aligned}
$$

В качестве точки отсчета t_0 следует принять такой момент времени, когда соответствующие функции Бесселя достаточно приближаются к своим асимптотическим в смысле (7) значениям. Для достаточно малых ε и небольших n величина a_{n0} практически не отличается от $a_n(0)=a_0(0)$.

Видно, что амплитудные коэффициенты a_n не зависят от n, что подтверждает правильность сделанных выше предположений. Величины $a_n(t)$ монотонно возрастают либо убывают в зависимости от знака ε. Для случая $\varepsilon>0$ имеет место убывание a_n, в противоположном случае a_n возрастает. В обоих случаях величина a_n стремится к пределу

$$a_{n0}\left\{\frac{z_0^m}{z_0^m+2Aa_{n0}^{2m}}\right\}^{\frac{1}{2m}}. \tag{10}$$

Уменьшение размаха колебаний n-го элемента сравнительно с линейным случаем (1) для тех же моментов времени при $\varepsilon>0$ следует объяснить увеличением эффективной скорости звука с увеличением эффективной жесткости структуры, т. е. ускорением выноса энергии из зоны первоначального возбуждения.

Развитие колебаний в цепи, где $\varepsilon>0$, можно представить следующим образом. Фронт упругой волны движется с большей скоростью, чем в соответствующем линейном случае. После прохождения фронта упругой волны размах колебаний этих элементов существенно уменьшается и в асимптотическом режиме происходит более быстрое затухание колебаний, согласно формуле (9). Когда размах колебаний снизится до некоторой величины, то развитие процесса переходит на «линейный режим», соответствующий предельному амплитудному коэффициенту (10). Этап выхода на режим линейных колебаний тем короче, чем больше m, т. е. чем круче берега потенциальной ямы.

Уравнение для осредненной фазовой добавки θ_n имеет вид

$$\frac{d\theta_n}{dt}=2Aa_n^{2m}(\omega t)^{-m}. \tag{11}$$

Отсюда следует

$$\theta_n=\theta_{n0}+2A\frac{a_{n0}^{2m}}{(m-1)\,\omega}\,\frac{z^{m-1}-z_0^{m-1}}{(zz_0)^{m-1}},\quad m\neq 0,\ 1; \tag{12}$$

$$\theta_n=\theta_{n0}+12\frac{\varepsilon}{\pi\omega^2}a_0^2\ln\frac{t}{t_0}.\quad m=1; \tag{13}$$

$$\theta_n=\theta_{n0}+2\frac{\varepsilon}{\omega}(t-t_0),\quad m=0; \tag{14}$$

$$\theta_{n0}=\theta_n(t_0).$$

Обозначения в формулах (11)—(14) те же, что и в соотношении (9). При выполнении интегрирования уравнения (11) принято, что $a_n=a_{n0}$, так как отличие a_n от a_{n0} порядка ε.

Формула (12) определяет ускорение роста фазы по сравнению с линейной системой при $\varepsilon>0$ и замедление при $\varepsilon<0$. Предельное значение θ_n существенно зависит от размаха колебаний, характеризуемого величиной a_{n0}.

В случаях $m=0$ и $m=1$ фазовая добавка θ_n не имеет предела, причем при $m=1$ имеет место неограниченное уменьшение $d\theta_n/dt$ с ростом t, а при $m=0$ $d\theta_n/dt=\mathrm{const}=2\varepsilon\omega^{-1}$. Результат для случая $m=0$ непосредственно следует из вида уравнений движения (5) и представляет интерес лишь как иллюстрация возможностей применяемого метода.

Следует считать, что формулы для θ_n(11)—(14) более точны, чем выражения для a_n (8), (9), так как вид уравнения (11) определяется вкладом главных членов формул (7), а не поправочных ($\sim z^{-3/2}$), как в выражениях для a_n.

В рамках используемого метода наименее благоприятным является случай $m=0$. Здесь в отличие от всех других случаев ($m>0$) при всех t значение θ_n конечно. Тем самым постулированные соотношения (3), (4), оказываются в этом случае не вполне удачными: если при $m>0$ и достаточно больших t связь (3) соответствует реальным свойствам структуры, то при $m=0$ такое соотношение определяется лишь методом вычислений, т. е. вводя условие (3), мы выполняем некоторую перенормировку амплитудных и фазовых поправок. Для случая $m=0$ она является несколько неудобной. Тем не менее результат (14) вполне соответствует свойствам структуры. Это обстоятельство подкрепляет уверенность в надежности результатов для нелинейных систем, рассматриваемых в данной работе.

Поступила 28 VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Goodman F. O.** On the theory of accomodation coefficients, Surface Sci., 1968, vol. 10, p. 283.
2. **Долгов А. С.** О динамике неоднородной одномерной цепи гармонических осцилляторов.—«Изв. АН СССР. Механика твердого тела», 1971, № 5, 48.
3. **Tasi J.** Dynamic initial slip in a linear chain. Phys. Rev., 1972, Ser. B, vol. 6, p. 4851.
4. **Долгов А. С.** Общая нестационарная задача динамики кристаллической решетки в гармоническом приближении.— ФТТ, 1973, № 15, с. 421.
5. **Улам С.** Нерешенные математические проблемы. М., «Наука», 1964.
6. **Леонас В. Б.** Об обмене энергией при столкновении частиц с твердой стенкой.— ПМТФ, 1963, № 6, с. 124.
7. **Рыжов Ю. А., Стриженов Д. С.** О взаимодействии атомов с поверхностью твердого тела.— ПМТФ, 1967, № 4, с. 113.
8. **Долгов А. С.** О диссипации энергии в цепочке связанных гармонических осцилляторов.— ПМТФ, 1971, № 1, с. 46.
9. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
10. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
11. **Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции. М., «Наука», 1968.

УДК 532.542 : 660.095.26

КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ ИЗМЕНЕНИЕМ ВЯЗКОСТИ С ГЛУБИНОЙ ПРЕВРАЩЕНИЯ

Д. А. Ваганов

(Москва)

Химические превращения сопровождаются изменением вязкости, причем в процессе полимеризации весьма значительным. Изменение вязкости с глубиной превращения приводит к появлению специфических гидродинамических эффектов при течении реагирующей жидкости. Некоторые из этих эффектов будут обсуждены в данной работе.

1. Рассмотрим течение реагирующей жидкости в трубе. Обозначим через z_0— длину трубы; P_0— перепад давления по длине трубы; v — объемный расход жидкости, отнесенный к единице площади сечения; t_0— характерное время химических превращений; μ — вязкость, μ_0 и μ_*— начальную вязкость жидкости и вязкость жидкости при полном превращении соответственно; r — радиус трубы; z — расстояние от начала трубы; η — глубину превращения. Плотность жидкости будем считать постоянной, так что v совпадает со средней скоростью течения жидкости.

Введем безразмерные величины

$$\varkappa = P_0 \Big/ \left(8 \frac{\mu_0}{r^2} \frac{z_0}{t_0} z_0\right); \quad \theta = \left(\frac{z_0}{v}\right) \Big/ t_0; \quad \omega = v \Big/ \left(\frac{z_0}{t_0}\right) = \theta^{-1}, \tag{1.1}$$

где $\varkappa$ — безразмерный перепад давления по длине трубы, ω — безразмерный расход жидкости, а в стационарном режиме θ является безразмерным средним временем пребывания жидкости в трубе.

В общем случае соотношение между перепадом давления и расходом жидкости может быть записано в виде

$$\varkappa = \lambda\omega, \tag{1.2}$$

где λ — безразмерное сопротивление, оказываемое движению жидкости, которое зависит от имеющегося в данный момент времени распределения вязкости жидкости в трубе. Если вязкость жидкости не меняется, то, согласно закону Пуазейля [1], при установившемся ламинарном течении жидкости $\lambda=1$.

Поддерживая постоянным перепад давления или расход жидкости, можно получить стационарный режим течения. В нем λ является функцией среднего времени пребывания жидкости в трубе.

$$\lambda = F(\theta), \tag{1.3}$$