МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ГИДРОДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ [1]

Ю. П. Красовский, М. А. Лаврентьев, Н. Н. Моисеев, А. М. Тер-Крикоров, А. Б. Шабат

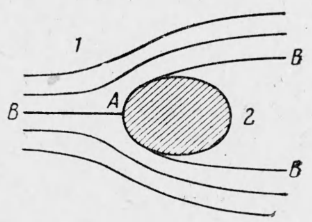
(*Новосибирск, Москва*)

Ниже приводится обзор исследований в теории движения жидкости со свободными поверхностями, опубликованных главным образом в СССР за последние четыре года. Основное внимание в обзоре уделено исследованиям, с которыми связаны научные интересы авторов.

1. Новые модели струйных и разрывных течений.
2. Приближенные методы исследований волновых явлений, основанные на построении асимптотики решений.
3. Строгие результаты теории гравитационных волн.

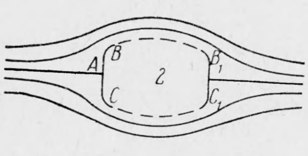
Авторы ограничиваются рассмотрением новых математических методов, либо вопросами, которые могут привести к постановке новых краевых задач.

§ 1. Новые модели струйных и разрывных течений. Задачи о струйных течениях возникли в прошлом веке в связи с попытками объяснить сопротивление идеальной жидкости равномерному движению тела. С этой целью была предложена модель обтекания тела со срывом струй (фиг. 1). Согласно этой модели комплексный потенциал $\omega(z)$ представляет собой функцию, аналитическую в области *1*, которая ограничена линиями тока AB. Эти линии тока заранее не заданы, а определяются из дополнительного условия $|d\omega / dz|_{AB} = \text{const}$. При таком обтекании тело изменяет количество движения набегающего потока и, следовательно, испытывает сопротивление.



Фиг. 1

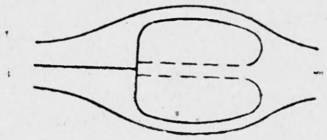
Однако в рассмотренном классическом случае, когда предполагалось, что каверну (область *2*) заполняет жидкость с теми же физическими характеристиками, что и области *1*, совпадение величины силы сопротивления, рассчитанное по этой схеме и наблюдаемое в эксперименте, оказалось неудовлетворительным с точки зрения потребностей практики. В связи с этим в начале XX века интерес к исследованию струйных обтеканий уменьшился. Тем не менее работы в этой области не прекращались, причем наряду с исследованиями в рамках классических моделей рассматривались новые схемы струйных обтеканий (модели Рябушинского и Эфроса, фиг.2 и 3). Следует обратить внимание на искусственность этих моделей,если говорить о проблемах сопротивления. Так, в модели Рябушинского (фиг. 2) для получения сопротивления при обтекании пластинки BC пришлось ввести фиктивную пластинку B_1C_1, причем система двух пластинок уже не имеет сопротивления. В модели



Фиг. 2

[1] При составлении этого обзора использованы материалы обзорного доклада авторов на IV Всесоюзном математическом съезде в Москве в 1958 г.

Эфроса струйка «уходит на другой лист римановой поверхности». Тем не менее эти модели позволили получить в некоторых случаях удовлетворительное согласие с экспериментом, и это соответствие тем лучше, чем больше число кавитации

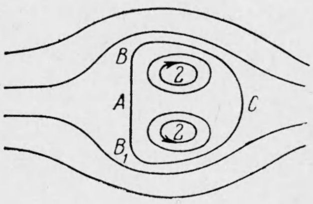


Фиг. 3

$$\sigma = \frac{p_\infty - p^\circ}{{}^1/{}_2\rho v_\infty^2}$$

(здесь p° — давление в каверне).

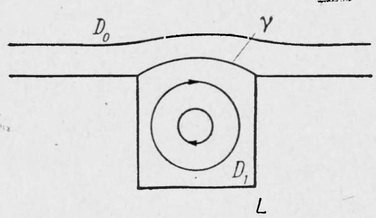
Поэтому интерес к задачам струйных течений снова усилился, когда возникла потребность изучения кавитационных течений, при которых внутренность каверны заполнена газом (парами) и числа кавитации достаточно велики. Изучение случая $\sigma \neq 0$ требует построения моделей замкнутых каверн. Более подробное изучение замкнутых каверн представляет интерес в силу еще и следующих причин: а) движение подводного крыла часто сопровождается образованием кавитационного мешка; б) если бы удалось погрузить тело, плывущее под водой, в искусственно созданную каверну, то это позволило бы решить проблему движения под водой с большими скоростями, так как резко уменьшило бы сопротивление тела.



Фиг. 4

Критика известных моделей замкнутых каверн породила представления о невозможности существования замкнутых каверн в рамках установившегося движения идеальной жидкости. Например, в модели Рябушинского задание числа σ (т. е. давления в каверне) и величины обтекаемой пластинки однозначно определяют положение и размер второй пластинки. Это обстоятельство эквивалентно утверждению о неустойчивости каверны.

1. Как уже было сказано, известные модели замкнутых каверн неустойчивы. М. А. Лаврентьевым недавно была предложена новая модель (фиг. 4), являющаяся в некотором смысле «исправлением» схемы Эфроса [1]. В этой модели, как показал Г. Н. Пыхтеев [1], течение полностью определяется заданием величины числа кавитации σ. Точнее, Г. Н. Пыхтеевым решение получено в виде замкнутой формулы, содержащей восемь неизвестных параметров, для определения которых при заданной длине пластинки и величине кавитации σ имеется система восьми трансцендентных уравнений. Поэтому предложенная М. А. Лаврентьевым модель свободна от критических возражений, делавших сомнительным вопрос существования замкнутых каверн в установившемся течении идеальной жидкости. Отметим, что эта модель, конечно, не дает сопротивления.



Фиг. 5

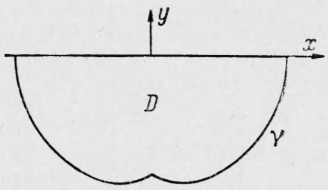
2. К этому же кругу задач со свободными границами относятся две другие модели, предложенные М. А. Лаврентьевым. Первая модель возникла в связи с проектом захоронения радиоактивных отходов в глубоких впадинах на дне океана. Как показали океанологические исследования, проведённые на «Витязе» и других кораблях, скорости в глубоководных впадинах на дне океана оказались значительно больше вычисленных по схеме потенциального обтекания. Предложенная М. А. Лаврентьевым модель заключается в следующем.

Движение во впадине является не потенциальным, а вихревым с постоянной завихренностью. Область течения (течение предполагается плоским) разбивается, таким образом, на две подобласти D_0 и D_1 (фиг. 5). В D_0 движение потенциальное, а в D_1 вихревое с постоянным значением вихря ω. На дуге γ, разделяющей области D_0 и D_1, скорости обоих течений совпадают. При заданной форме дна (дуга L) неизвестными являются дуга γ и завихренность ω.

Функция тока $\psi(x, y)$ течения по схеме М. А. Лаврентьева является решением задачи на склеивание. Пусть задана линия L

$$x = x(s), \qquad y = y(s)$$

$$y(s) \to 0, \quad x(s) \to \pm\infty \qquad \text{при } s \to \pm\infty$$



Фиг. 6

где s — длина дуги линии L, гладкой всюду, кроме точек a_1 и a_2, в которых направление касательной меняется скачком. Функция $\psi(x, y)$, определенная в области D, ограниченной L и расположенной выше L, должна увлетворять следующим требованиям.

1) В области D существует жорданова кривая γ с концами a_1, a_2, такая, что в конечной части D, отсекаемой γ (область D_1), удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\psi(x, y) = \text{const}$$

а в области $D_0 = D \,/\, D_1$ функция $\psi\,(x, y)$ будет гармонической.

2) Линии L и γ являются линиями уровня функции $\psi\,(x, y)$

$$\psi(x, y)\,|_L = \psi\,(x, y)\,|_\gamma = 0$$

3) Функция $\psi\,(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка в области D, причем

$$\partial\psi / \partial x \to 0, \qquad \partial\psi / \partial y \to c \neq 0 \qquad \text{при } y \to +\infty$$

Сформулированная задача сводится к нелинейному интегральному уравнению для линии склейки γ, похожему на интегральное уравнение, рассматривавшееся в теории фигур равновесия вращающейся жидкости. Это позволяет находить приближенное решение задачи на склеивание методом итераций, описанным в работе А. Б. Шабата [2]. Практическая сходимость метода итераций была проверена [2] для двух случаев области D. Некоторые общие свойства решений задачи на склеивание исследованы в работах [2-4]. Теоремы существования решений двух вспомогательных задач доказаны в работах [3,4]. В работе [2] приведены также результаты, касающиеся числа решений простейшей задачи на склеивание.

3. Вторая модель связана с вопросом об определении воронки после взрыва на поверхности грунта. Предполагается, что среда в области D под действием силы взрыва ведет себя как идеальная жидкость (фиг. 6) и покоится вне области D. Для определения контура воронки ставится следующая краевая задача теории аналитических функций.

Ищется аналитическая функция $\chi(z) = \varphi + i\psi$ в области D, удовлетворяющая при $y = 0$ условию

$$\varphi(x) = \pi(x) \qquad (\pi(x) \text{ — импульс мгновенных сил})$$

и на неизвестной заранее линии и еще двум условиям:

$\psi\,|_\gamma = 0$ (условие обтекания), $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = c$ (c зависит от прочности среды)

Последнее условие естественно вытекает из следующих соображений. Если зададим в покоящейся среде мгновенное поле скоростей, то будет существовать некоторое предельное значение величины скорости, соответствующее пределу прочности среды, при котором материал разрушается и при больших давлениях ведет себя как идеальная жидкость.

Указанная задача была решена В. М. Кузнецовым [5], полученные им результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментами.

В теории взрыва возникает проблема: как распределить взрывчатое вещество вокруг тела, чтобы в результате взрыва это тело не испытывало деформаций, получило бы только поступательную скорость. В импульсной постановке в схеме идеальной жидкости эта задача эквивалентна следующей задаче теории аналитических функций.

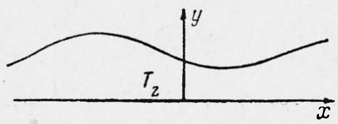
Найти такое распределение гармонической функции φ на границе заданной области D, чтобы внутри области D $\operatorname{grad} \varphi$ имел постоянное значение. Решение этой задачи дано М. А. Лаврентьевым [6]. Экспериментальная проверка теории [7,8] дала хорошие результаты.

Следует отметить, что все указанные задачи относятся к области задач математической физики, которая охватывается классическими методами теории аналитических функций. Для механики наибольший интерес представляют пространственные задачи и прежде всего осесимметрические. Однако пути решения этих задач пока не намечены.

§ 2. Асимптотические решения. В теории движения жидкости со свободными границами можно особо выделить задачи о течении жидкости в узких областях: этим термином принято называть области, у которых радиус кривизны границ велик по сравнению с шириной области.

Классическим примером таких задач будут длинные волны.

Задачи со свободными границами имеют ту специфику, что область T_z (фиг. 7), внутри которой разыскиваются функции $\mathbf{v}$ и p, вектор скорости и давление, заранее не задана. Ее граница $y = f(x)$ определяется из некоторого дополнительного условия



Фиг. 7

$$A\,(\mathbf{v}, p, f) = 0$$

Например, в случае гравитационных волн это условие будет таким:

$$\tfrac{1}{2}\,(\nabla^* \psi)^2 + \nu f = \mathrm{const}$$
$$\left(\mathbf{v} = \nabla^* \psi,\ \nabla^* = \bar{x}^\circ \frac{\partial}{\partial y} - \bar{y}^\circ \frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad (2.1)$$

и задача формулируется так: найти функцию ψ, гармоническую в T_z, и функцию $y = f\,(x)$ по условиям $\psi = 0$ при $y = 0$, $\psi = 1$ при $y = f\,(x)$ и условию (2.1).

В других случаях (вязкая или завихренная жидкость) уравнение Лапласа заменяется более общим операторным уравнением

$$M\,(\mathbf{v}, p) = 0 \qquad (2.2)$$

и соответственно усложненными граничными условиями.

Даже если уравнения задачи линейны (как, например, в случае потенциальных течений), сама проблема существенно нелинейна. Предположение об узости области позволяет использовать асимптотические методы, сохранив при этом нелинейность проблемы.

Приведем схему рассуждений, используемую в этих исследованиях.

а) Решается вспомогательная задача. Пусть задана кривая $y = f(x)$ — граница области T_Z. Для того чтобы краевая задача для уравнения (2.2) осталась корректной, условие (2.1) отбрасывается. Используя узость области T_Z, строят (тем или иным способом) асимптотическое решение вспомогательной задачи, позволяющее выразить функции $\mathbf{v}$ и p через границу

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}\,(x, f\,(x)), \qquad p = p\,(x, f\,(x))$$

При решении вспомогательной задачи большую роль играют некоторые априорные предположения о свойствах границы $y = f(x)$.

б) Найденные таким образом функции $\mathbf{v}$ и p подставляются в условие (2.1), которое становится некоторым уравнением относительно неизвестной границы $y = f$. Это уравнение оказывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением.

Указанный подход применим не только в теории плоских стационарных течений. Он легко распространяется на некоторые случаи нестационарных и пространственных течений. Заметим, что в случае осесимметричного стационарного течения уравнение для функции f остается обыкновенным. В остальных случаях оно будет уравнением в частных производных, но число переменных станет меньше, чем в исходной задаче.

в) Разыскиваются решения этого уравнения и отбираются те из них (те функции $y = f$), которые отвечают исходным априорным предположениям.

Впервые рассуждения, аналогичные изложенным, были использованы М. А. Лаврентьевым для приближенного изучения уединенной волны [9].

М. А. Лаврентьевым были предложены формулы приближенного конформного отображения узких полос. В частном случае отображения полосы T_z на прямолинейную полосу единичной ширины для граничного значения модуля отображающей функции и при условии, что

$$f(x) = O(1), \quad f_{(x)}' = O(\varepsilon^{3/2}), \quad f_{(x)}'' = O(\varepsilon^2), \ldots \tag{2.3}$$

получена формула

$$\left|\frac{d\omega}{dz}\right|^2 = u^2 + v^2 = \frac{1}{f^2}\left[1 + \frac{2}{3} ff''\right] + O(\varepsilon^{5/2}) \tag{2.4}$$

Авторы работы [10] показали, что формула (2.3) может быть получена, если воспользоваться первыми двумя членами некоторых асимптотических рядов специального вида, дающих формальное решение задачи Дирихле, соответствующей конформному отображению области T_z на прямолинейную полосу. Характер формул при этом существенно зависит от априорных условий, налагаемых на функцию $y = f(x)$.

Если условия (2.3) заменить такими:

$$f = O(1), \quad f' = O(\varepsilon), \quad f'' = O(\varepsilon^2) \text{ и т. д.} \tag{2.5}$$

то формула (2.4) должна быть записана в виде

$$\left|\frac{d\omega}{dz}\right|^2 = u^2 + v^2 = \frac{1}{f^2}\left[1 + \frac{2}{3} ff'' - \frac{1}{3} f'^2\right] + O(\varepsilon^3) \tag{2.6}$$

Если воспользоваться большим числом членов соответствующих асимптотических рядов, то формулы типа (2.4) могут быть получены с любой степенью точности, если, конечно, заданы условия типа (2.3).

Метод построения формального решения основывается на искусственном введении параметра ε путем замены переменных

$$x = \xi / \varepsilon$$

и построения рядов (в общем случае расходящихся) по степеням параметра ε, которые удовлетворяют условиям задачи формально.

Следовательно, при построении формул типа (2.4) специфика конформных отображений не использовалась и поэтому метод мог быть распространен на весьма широкий класс эллиптических операторов. В частности, Н. Н. Моисеевым были построены аналогичные формулы для отображения, описывающие плоские вихревые течения и осесимметричные потенциальные течения идеальной жидкости [11,12]. Например, в случае вихревых течений формула, аналогичная (2.6), имеет вид

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{f^2}\,[a + bff'' + cf'^2] + O(\varepsilon^3) \qquad (2.7)$$

Здесь числа a, b и c зависят от структуры заданного вихревого поля.

Ю. П. Иванилов построил аналогичные формулы для уравнения

$$\frac{D(\Delta\psi, \psi)}{D(x, y)} = \frac{1}{R}\,\Delta^2\psi$$

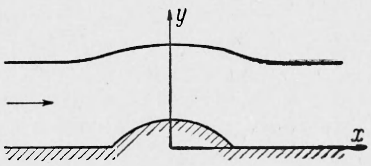
которое описывает плоское течение вязкой жидкости [14]. Здесь R — число Рейнольдса. Были рассмотрены также некоторые случаи нестационарных течений.

Изложенная выше схема рассуждений была применена для исследования характера вырождения длинных волн в уединенную [14]. Используя указанную схему рассуждений, задачу о длинных волнах можно редуцировать к отысканию всевозможных ограниченных решений уравнения

$$f'' - \frac{1}{2}\frac{f'^2}{f} = \frac{3}{2}cf - \frac{3}{2}\frac{1}{f} - 3\nu f^2 \qquad (2.8)$$

Здесь c и ν — параметры, причем c — функционал.

Это уравнение имеет двупараметрическое семейство решений. Если в качестве определяющих параметров принять длину волны λ и параметр ν, который обратно пропорционален квадрату скорости, то очень наглядно и просто получается следующее утверждение: если число $\nu < 1$ фиксировано, то при $\lambda \to \infty$ амплитуда волны $\alpha \to \alpha_\infty > 0$. При этом волна вырождается в уединенную. Форма ее границы описывается уравнением



Фиг. 8

$$f \approx 1 + \frac{1-\nu}{\nu\, ch^2 \sqrt{\frac{1}{4}(1-\nu)}\, x}$$

Если $\nu > 1$, то $\alpha_\infty = 0$, и волна вырождается в плоскопараллельный поток. Были исследованы и другие свойства этих течений.

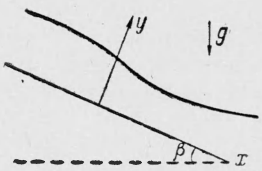
Аналогичным образом исследованы некоторые задачи обтекания потенциальным потоком тяжелой жидкости. Н. Н. Моисеевым впервые показано, что в случае $\nu < 1$ задача обтекания бугра потоком, плоскопараллельным на бесконечности (фиг. 8), допускает во всяком случае два решения: одно из них описывает течение, близкое к плоскопараллельному потоку, и приближенно может быть изучено в рамках линейной теории, второе описывает течение, близкое к уединенной волне; последнее носит существенно нелинейный характер и до сих пор было неизвестным.

В дальнейшем это исследование было продолжено Н. Н. Моисеевым и А. М. Тер-Крикоровым [16], которые изучили некоторые особенности задачи о подводном крыле при числах ν, близких к единице.

Так как формулы типа (2.4) были построены также и для вихревых течений, то задача исследования длинных волн на поверхности завихренной жидкости не содержала никаких новых трудностей по сравнению с задачей потенциальных волн. Такое исследование было проведено Н. Н. Моисеевым [12]. Было показано, что волны на поверхности завихренной жидкости при $\lambda \to \infty$ также вырождаются в уединенную, если только $\nu < \nu_0$, причем $\nu_0 > 1$, каково бы ни было распределение вихрей.

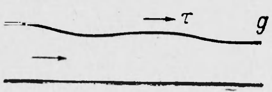
Существенным развитием теории длинных волн было исследование некоторых типов движения тяжелой вязкой жидкости со свободной поверхностью.

Ю. П. Иванилов [13] рассмотрел задачу о течении жидкости в наклонном канале (фиг. 9). Эта задача представляет большой интерес для инженерной практики. Элементарно строится решение, которое описывает плоскопараллельный поток. Однако для случая жидкости малой вязкости, например воды, уже при очень малых углах наклона β это течение не может быть реализовано (оно теряет устойчивость) и на поверхности воды возникают так называемые катящиеся волны. Эти волны уже давно изучаются гидравликами, которые используют для исследования упрощенные уравнения Шези или Прандтля. Однако эти уравнения не содержат периодических решений. Поэтому авторы таких исследований разыскивают разрывные решения, привлекая ряд дополнительных соображений, не следующих из постановки задачи.



Фиг. 9

Ю. П. Иванилов изучал это явление, опираясь на уравнения Навье — Стокса. В рамках излагаемой теории, т. е. считая волны достаточно длинными, он свел задачу к некоторому нелинейному дифференциальному уравнению довольно сложной природы. Ему удалось показать, что уравнение содержит однопараметрическое семейство периодических решений. Тем самым было показано принципиальное отличие гравитационных волн, возникающих на поверхности идеальной жидкости (на поверхности которых существует двупараметрическое семейство волн), от «вязких» волн. Если мы фиксируем скорость распространения волны, то на поверхности идеальной жидкости могут существовать волны любой амплитуды (меньше критической, при которой происходит разрушение волны). Каждому значению амплитуды соответствует при этом определенная длина волны. Из исследования Ю. П. Иванилова следует, что коль скоро задана скорость распространения волны, то ее амплитуда, а следовательно, и ее длина определяются однозначно. Здесь имеется прямая аналогия с задачами автоколебаний.



Фиг. 10

Для эффективного построения этих волн Ю. П. Иванилов использовал различные методы (метод Крылова и Боголюбова, метод Галеркина и др.), в зависимости от соотношения чисел Рейнольдса и безразмерной длины волны.

Задача, аналогичная рассмотренной Ю. П. Иваниловым, возникает при изучении течения жидкости в вязкой пленке под действием приложенного касательного напряжения и произвольной массовой силы (фиг. 10). Обычно эта задача трактуется как задача пограничного слоя. Однако в рамках этой теории поставленная задача никаких решений, кроме тривиального, не содержит.

В теории движения вязкой жидкости решающее значение имеет проблема устойчивости. Обычно это понятие связывают с переходом ламинарного течения в турбулентное. Если жидкость имеет свободную поверхность, то следует говорить еще об устойчивости свободной поверхности. Такая потеря устойчивости может происходить при числах Рейнольдса значительно меньше критических, при которых происходит турбулизация потока.

Если использовать обычные методы гидродинамической устойчивости, то задача о потере устойчивости свободной поверхности может быть сведена к исследованию уравнения типа Ора — Зоммерфельда. В рамках излагаемой теории естественно предполагать, что возмущения достаточно длинные (λ — велико). По-видимому, такой тип возмущения представляет наибольший интерес, так как более короткие волны сильнее демпфируются силами вязкости и поверхностным натяжением, которое также имеет стабилизирующий характер. Это предложение позволяет изучить поведение решений уравнений Ора — Зоммерфельда при больших λ.

Используя это обстоятельство, Ю. П. Иванилов нашел следующее условие устойчивости плоскопараллельного течения воды в наклонном канале:

$$F^2 \leqslant F^* = \frac{5}{2}\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} \tag{2.9}$$

где F — безразмерный параметр, связывающий числа Рейнольдса и Фруда.

Однако можно получить и более общий результат для любого периодического режима заданной длины λ

$$F = \Phi(\beta, \lambda)$$

Характер этой зависимости изображен на фиг. 11. Таким образом, катящиеся волны могут быть устойчивыми тогда, когда «пуазейлевский» режим уже потерял устойчивость. (Совершенно аналогичная картина имеет место в задачах теории пленок.) Указанные результаты могут иметь серьезное практическое значение, так как они позволяют существенно по-иному смотреть на проблему устойчивости пленок.

§ 3. Точные решения. В наиболее простом случае задача о плоском установившемся течении тяжелой идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей допускает следующую математическую постановку.

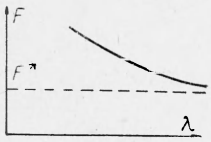
Определить две функции θ и τ, имеющие непрерывные производные в полосе $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $-\infty < \varphi < +\infty$ и удовлетворяющие внутри полосы уравнениям Коши — Римана

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = \frac{\partial\tau}{\partial\psi}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\psi} = -\frac{\partial\tau}{\partial\varphi} \tag{3.1}$$

а на границах полосы следующим условиям:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\psi} = \nu e^{-3\tau}\sin\theta \quad \text{при } \psi = 1, \qquad \theta = 0 \quad \text{при } \psi = 0$$

$$(\nu = gh/v^2 = F^{-2})$$



Фиг. 11

Здесь θ — угол наклона вектора скорости к горизонтали, τ — логарифм модуля скорости, ν — параметр, связанный с числом Фруда F.

Класс течений со свободной границей, определяемый поставленными условиями, слишком широк. Поэтому обычно добавляется либо условие периодичности функций по переменной φ, либо условие стремления к нулю функции θ при $\varphi \to \pm\infty$.

Первое условие принимают в том случае, когда разыскиваются периодические волны, второе — для уединенных волн. Точное исследование волн периодического типа впервые было дано в классических работах Некрасова и Леви-Чивита (в 20-х годах), а уединенной волны — в работе М. А. Лаврентьева (1946) и Фридрихса и Хайерса (1954).

В последние годы был рассмотрен ряд более сложных задач. Сюда относится случай течения над неровным дном, обтекание точечного вихря. Кроме того, задачи о волнах периодического типа и об уединенной волне исследовались для вихревых потоков как в однородной, так и в неоднородной жидкости.

Рассмотрение перечисленных выше задач приводит либо к изменению граничных условий (для неровного дна и обтекания вихря), либо к замене системы уравнений Коши — Римана некоторой квазилинейной эллиптической системой (для вихревых течений и течений неоднородной жидкости). До последнего времени ограничивались исследованием решений этих задач, обладающих малой нормой. Привлекательной стороной исследований «в малом» является то, что они одновременно с доказательством существования дают приближенный метод для построения решения, что позволяет легко объяснить физические эффекты, которые не могут быть схвачены линейной теорией. Однако природа гравитационных волн имеет одну замечательную особенность, установленную еще в XIX в. экспериментально. Амплитуда волны α не может быть больше некоторой постоянной α^*, зависящей от длины волны. При этом крутизна волны также не может быть больше некоторой постоянной, равной $1/6\,\pi$. При $\alpha = \alpha^*$ в вершине волны появляется угловая точка, при дальнейшем росте амплитуды волна разрушается. Это явление не может быть изучено теорией, которая занимается исследованием решений с малой нормой. Поэтому в последние годы в теории волн начали использовать топологические методы функционального анализа, позволяющие провести исследования в большом.

На примере волн, распространяющихся над гладким дном, покажем основные результаты, полученные в рамках обеих концепций.

Н. Н. Моисеев показал [17], что задача о периодических потенциальных волнах может быть сведена к операторному уравнению

$$x = A\,(x,\ \nu,\ \alpha,\ h^*) \qquad \left(\nu = \frac{gh}{c^2}\,,\ h^* = \frac{h}{\lambda}\right) \tag{3.2}$$

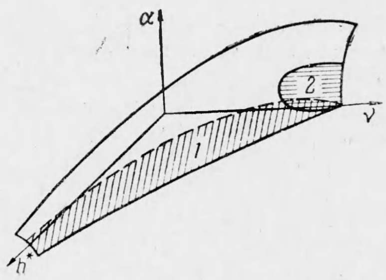
где A — оператор Ляпунова — Шмидта; ν, α, h^* — безразмерные параметры; c — скорость распространения волны; h — глубина; α — безразмерная амплитуда; λ — длина волны.

Таким образом, теорема о существовании периодических волн следует непосредственно из общих теорем нелинейных интегральных уравнений.

Уравнение разветвления дает связь между параметрами

$$\alpha = \Phi\,(\nu h^*) \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) описывает в пространстве параметров некоторую поверхность (фиг. 12).



Фиг. 12

Методы, использующие классические результаты нелинейных интегральных уравнений, дают возможность доказать существование только таких волн, у которых $\alpha \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Таким образом, эта теория позволяет описать лишь некоторую часть поверхности, и из нее не следует существование уединенной волны. Эта задача потребовала создания специальных методов. В 1944 г. М. А. Лаврентьев, опираясь на вариационные принципы конформных отображений, доказал существование такой волны.

Таким образом, в теории поверхностных волн существовали две разные теории, использующие разные методы. Поэтому было естественно поставить задачу о построении единой теории волн, которая охватывала бы и теорию периодических волн и описывала бы вырождение периодических волн в уединенную.

Первая попытка такого рода была сделана Литтменом, доказавшим существование некоторого класса кноидальных волн. Однако волны, рассмотренные Литтменом [18], вырождаются в однородный плоскопараллельный поток при длине волны, стремящейся к бесконечности. Доказательство существования кноидальных волн, охватывающее и предельный случай уединенной волны, опубликовано в прошлом году А. М. Тер-Крикоровым [19]. Из этой теории следует одновременно и существование длинных периодических волн и уединенной волны.

Нам кажется, что наиболее интересные задачи локальной теории потенциальных волн, т. е. теории, рассматривающие решения, обладающие малой нормой, в основном уже решены.

Не представляет больших трудностей снять предположение о потенциальности. Задача о вихревых волнах отличается от рассмотренной тем, что уравнения (3.1) должны быть заменены такими:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + R(\omega(y))\frac{\partial \theta}{\partial y} = f_1(\theta, \tau, \theta_x, \tau_x, \omega(y))$$

$$-\frac{\partial \tau}{\partial y} + R(\omega(y))\frac{\partial \theta}{\partial x} = f_2(\theta, \tau, \theta_x, \tau_x, \omega(y)) \qquad (3.4)$$

Граничные условия (3.2) сохраняют свою структуру. Здесь f_1 и f_2 — аналитические функции своих переменных, разложение которых начинается с членов второго порядка малости; $\omega(y)$ — некоторая заданная функция, описывающая распределение вихрей. Если $\omega \equiv 0$, то система (3.2) приводится к системе Коши — Римана.

Впервые этой задачей в строгой постановке занималась Дюбрей-Жакотен, которая при весьма жестких ограничениях, наложенных на характер функции $\omega(y)$, доказала, что краевая задача для системы (3.4) допускает решения, периодические по x. Несколько лет назад Гюйон [20] существенно ослабил ограничения на вихрь $\omega(y)$. У Гюйона вихрь может быть произвольной кусочно-непрерывной функцией, но он должен быть достаточно мал, т. е. поток предполагается близким к потенциальному. В таких предположениях Гюйон предложил итерационный процесс построения волн и доказал его сходимость.

Представляется естественным отказаться от стеснительного предположения о малости вихря, а предполагать только малость амплитуды, т. е. рассматривать течения, близкие к некоторому однородному вихревому потоку. Это было проделано в работе Н. Н. Моисеева [21], показавшего, что получающуюся нелинейную краевую задачу для некоторой эллиптической системы уравнений можно свести к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, принадлежащих к типу, рассмотренному Лихтенштейном, если только

$$\int_0^y \omega(y)\, dy$$

существует и отличен от нуля для любого $y \leqslant 1$.

В известной книге Лихтенштейна по теории нелинейных интегральных уравнений показано, что для их исследования применим метод Ляпунова — Шмидта. Таким образом, аналог теории Некрасова — Леви — Чивита установлен для вихревых волн при весьма общих предположениях о природе вихря.

А. М. Тер-Крикоровым [22] в предположении, что вихрь есть произвольная непрерывно дифференцируемая функция y, исследовал уединенные волны на поверхности завихренной жидкости.

Имея в виду получить решение, исчезающее на ∞, строится специального вида функция Грина, при помощи которой задача сводится к некоторому операторному уравнению. Далее находится приближенное решение этого уравнения и доказывается существование точного решения примерно по той же схеме, что и в потенциальном случае (следуя идеям Фридрихса).

Пусть $v(y)$ есть распределение скорости на ∞, назовем величину

$$c^* = \left[\int_0^1 v^{-2}(y)\,dy\right]^{-1/2}$$

скоростью распространения волны, а $\sqrt{gh}$ — критической скоростью; основной результат можно сформулировать следующим образом: если вихрь есть произвольная непрерывно дифференцируемая функция, то на поверхности завихренной жидкости, при условии, что скорость распространения больше критической, но достаточно близка к критической, может распространяться уединенная волна.

Представляет большой интерес исследование волн в неоднородной жидкости. Эта задача интересна не только в математическом отношении.

В неоднородной жидкости возникает новое физическое явление внутренних волн. Если в однородной жидкости волновое движение быстро затухает с глубиной, то в неоднородной часто бывает так, что с глубиной волнение усиливается.

Приближенное рассмотрение этого явления было дано А. М. Тер-Крикоровым в статье [23]. В работе [24] задача исследовалась в точной постановке. А. М. Тер-Крикоров установил, что при заданной длине волны λ существует счетное множество решений задачи о волнах, отвечающих собственным числам некоторой вспомогательной задачи (структура спектра зависит от распределения плотности $\rho(\psi)$).

Эти решения можно разбить на два класса. Для решений первого класса максимальное отклонение линии тока от горизонтальной прямой достигается на линии тока, совпадающей со свободной поверхностью; для решений второго класса — на линии тока, расположенной под свободной поверхностью. Доказано, что при $\rho(\psi) \to \text{const}$ движение первого из описанных выше типов переходит в волновое движение жидкости с постоянной плотностью. Движение второго типа при $\rho(\psi) \to \text{const}$ вырождается в равномерный поток.

Теория волн конечной, но достаточно малой амплитуды использует различные методы теории нелинейных интегральных уравнений. Для построения решения использовались, как правило, либо представления решения в виде рядов по степеням (целым или дробным) некоторого малого параметра (теория периодических волн), либо метод последовательных приближений, построенных так, что он может выделить бифуркационное решение (апериодические уединенные волны). Эта теория позволила получить весьма полные результаты для волн малой амплитуды, когда движение жидкости достаточно близко к равномерному потоку.

Как уже отмечалось, многочисленные приближенные исследования показывали, что с ростом амплитуды характер волн значительно изменяется. Они достигают некоторой предельной формы, имеющей угловую точку в вершине. Волны, близкие к предельной, существенно отличаются от синусоидальных волн малой амплитуды. Если точная теория пологих волн, подтвердив некоторые выводы линейной теории, дала ряд новых факторов (расположение спектра, зависимость между амплитудой и числом Фруда и т. д.), которые невозможно было получить в рамках линейной теории, то она оказывается совершенно беспомощной, если речь идет об изучении волн, амплитуда которой близка к предельной, т. е. вблизи края поверхности (3.3). Поэтому в последние годы значительные усилия были направлены на развитие теорий, которые позволили бы исследовать решения $x = A(x, \nu, \alpha, h^*)$, не обладающие малой нормой. Исследование этого уравнения в том случае, когда не ограничиваются отысканием решений, обладающих малой нормой, сталкивается с рядом принципиальных трудностей.

Часто в нелинейных задачах все трудности ограничиваются построением априорных оценок. В данном случае уже эта проблема становится достаточно трудной из-за того, что гладкость решения портится, когда амплитуда приближается к предельной. Но самая большая трудность связана с отсутствием единственности решения, т. е. с наличием бифуркационного решения. Можно еще добавить, что структура решений сильно меняется при изменении параметров движения, а для некоторых значений этих параметров задача может вообще не иметь решений. Для того чтобы получить необходимые априорные оценки, нужно фактически уметь оценить величину, обратную модулю скорости на свободной границе, т. е. показать, что минимум модуля скорости на свободной границе больше некоторой положительной константы. Отметим, что эту константу нельзя выбрать раз и навсегда для всех течений, поскольку при приближении волны к предельной минимум модуля скорости должен стремиться к нулю.

Первые удачные априорные оценки решения удалось получить Жербе [25]. Однако его оценки относились только к тому случаю, когда число Фруда достаточно велико, т. е. для относительно быстрых послекритических течений. Эти оценки он использовал для изучения различных задач обтекания неровного дна при сверхкритических скоростях течения. Для исследования волновых течений над горизонтальным дном и других докритических течений такую оценку получил Ю. П. Красовский [26,27]. Его подход к задаче дал возможность получить оценку модуля скорости через максимум угла наклона касательной к профилю свободной границы. Оценка оставалась справедливой для любого угла наклона меньше $^1/_6\pi$.

Число $^1/_6\pi$ здесь не является случайным, так как известно, что предельные волны Стокса могут иметь в вершине только такой угол наклона касательной к профилю свободной границы, а минимум модуля скорости в этом случае равен нулю.

Другая трудность, как об этом уже говорилось, определяется неединственностью решения.

Для преодоления этой трудности (связанной с необходимостью находить второе бифуркационное решение нелинейного операторного уравнения) оказалось целесообразным использовать теорию положительных операторов. В частности, теорема М. А. Красносельского об операторах с монотонными минорантами позволила доказать существование таких установившихся волн, у которых максимум угла наклона касательной к свободной границе принимает любое значение из интервала $(0, {}^1/_6\pi)$.

С другой стороны, методы оценки границ позитивного спектра, широко используемые в теории положительных операторов, дали возможность получить ряд теорем несуществования различных видов течений со свободной границей. Ю. П. Красовским были доказаны следующие факты:

1. В жидкости бесконечной глубины не могут существовать сколь угодно длинные периодические волны, если ограничить скорость их распространения.
2. Не существует уединенных волн на поверхности жидкости бесконечной глубины.
3. В жидкости конечной глубины уединенные волны не существуют при числах Фруда меньших единицы.
4. Не существует уединенных волн, имеющих вид впадины.

Все эти результаты относятся к волнам произвольной амплитуды.

Теория волн произвольной амплитуды только начинает создаваться, и результаты, о которых здесь шла речь, далеко не исчерпывают вопросы, которые перед ней поставлены уже сегодняшними исследованиями. Причем центральный вопрос — это доказательство существования предельной волны Стокса — предельного решения, которое уже не является аналитическим.

К классическим проблемам гравитационных волн тесно примыкают различные задачи обтекания: течение тяжелой жидкости над неровным дном, обтекание особенности или тела (например, подводного крыла).

Периодические волны над волнистым дном изучались в работе Н. Н. Моисеева [17], который свел соответствующую нелинейную краевую задачу к системе интегральных уравнений типа Ляпунова — Шмидта. Хорошо развитая теория этих уравнений позволила решение малой нормы найти в виде ряда по дробным степеням малого параметра. Было выяснено, при каких числах Фруда решение существует и построены приближенные формулы зависимости амплитуды от периода волнистости дна и скорости потока, и выяснены условия, при которых нет единственности решения задачи. Кстати заметим, что в последнее время М. А. Красносельский показал, что решение задачи о волнах, найденное в виде такого ряда, единственно. Наряду с задачей о течении над неровным дном представляет значительный интерес изучение задачи об обтекании тел потоками со свободной границей.

Модельной задачей такого рода является задача обтекания вихря. А. М. Тер-Крикоровым показано [28], что при любом значении скорости потока, большей критической ($c^2 > gh$), существует решение задачи, если интенсивность вихря Γ достаточно мала. Решение является аналитической функцией циркуляции Γ и числа Фруда. Это решение единственно в классе функций, норма которых не превосходит некоторой постоянной, умноженной на Γ.

Отсюда вытекает, что при фиксированном числе Фруда решение вырождается в тривиальное при $\Gamma \to 0$.

И. Г. Филиппов [29], используя построенные им априорные оценки типа оценок Жербе и принцип неподвижной точки, снял ограничения о малости вихря в теореме Тер-Крикорова. Доказано существование решения задачи обтекания вихря интенсивности Г для конечного значения Г. Это решение переходит в тривиальное при $\Gamma \to 0$.

Н. Н. Моисеев, используя приближенные асимптотические методы, показал, что в задаче обтекания вихря помимо указанного решения, которое при $\Gamma \to 0$ переходит в плоско-параллельный поток, существует еще решение, переходящее при $\Gamma \to 0$ в уединенную волну [21], И. Г. Филиппов этот факт доказал строго [29]. Однако его теория носит локальный характер: существование решения доказано только для скоростей бóльших, но достаточно близких к критической.

Несколько важных результатов получил Ю. П. Красовский [26,27], который использовал свои априорные оценки модуля скорости к задачам обтекания неровного дна. В частности, он рассмотрел течения над волнистым дном и доказал интересную теорему о том, что при числах Фруда меньших единицы не существует течений, у которых дно и свободная граница всюду понижаются в направлении потока.

В заключение обратим внимание на проблемы, которые представляются основными в теории волн.

1. Проблема течений при числах Фруда меньших единицы в случае неровного дна или при наличии обтекаемого тела. Основная трудность здесь связана с тем, что асимптотическое поведение решений при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$ должно быть различным. Это обстоятельство не позволяет построить функциональные пространства, в которых операторы, описывающие задачу, были бы ограниченными. Помимо чисто математического интереса эти задачи могут содержать и новые физические эффекты.

2. Теория волн «в большом». В настоящее время получены еще только первые результаты. Пока еще остается открытым центральный вопрос этой теории — вопрос о существовании предельной волны Стокса. Кроме того, пока еще нет алгоритмов, которые позволили бы исследовать физические особенности течения, такие, например, как зависимость амплитуды волны заданной длины от ее скорости распространения.

3. Теория пространственных течений. Пока нет ни одного строгого результата. Более того, даже в приближенной постановке еще никем не изучались нелинейные эффекты в пространственном случае.

4. Наконец, самой трудной проблемой следует считать теорию неустановившихся волн, как периодических (стоячих), так и волн Коши — Пуассона, где также пока нет ни одного строгого результата.

Поступила 10 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. О некоторых краевых задачах для систем эллиптического типа. Сибирск. матем. ж., 1962, т. 3, № 5.
2. Шабат А. Б. О двух задачах на склеивание. Докл. АН СССР, в печати.
3. Шабат А. Б. Об одной схеме плоского движения жидкости при наличии на дне траншеи. ПМТФ, 1962, № 4.
4. Гольдштик М. А. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 6.
5. Кузнецов В. М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта. ПМТФ, 1960, № 3.
6. Лаврентьев М. А., Кузнецов В. М., Шер Е. Н. О направленном метании грунта при помощи ВВ. ПМТФ, 1960, № 4.
7. Кузнецов В. М., Шер Е. Н. Экспериментальное исследование направленного взрыва в грунте. ПМТФ, 1962, № 3.
8. Кузнецов В. М., Шер Е. Н. Масштабный эффект и влияние прочности при направленном взрыве. ПМТФ, 1962, № 4.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.
10. Иванилов Ю. П., Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М. Об асимптотическом характере формул М. А. Лаврентьева, Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 2.
11. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы типа узких полос. Некоторые проблемы математики и механики. Изд. СО АН СССР, 1961.
12. Моисеев Н. Н. К теории волн в завихренной жидкости, ПМТФ, 1960, № 3.
13. Иванилов Ю. П. Катящиеся волны в наклонном канале, Вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
14. Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М. Исследование движения тяжелой жидкости при скоростях, близких к критической. Сб. трудов МФТИ, 1959, № 3.
15. Моисеев Н. Н. О неединственности возможных форм установившихся течений тяжелой жидкости при числах Фруда, близких к единице. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
16. Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М. О неединственности решения задачи о подводном крыле. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 5.
17. Моисеев Н. Н. О течении тяжелой жидкости над волнистым дном, 1957, т. 21, вып. 1.
18. Литтмен В. О. О существовании периодических волн при скорости, близкой к критической. Теория поверхностных волн. Сб. пер., ИЛ, 1959.
19. Тер-Крикоров А. М. Существование периодических волн, вырождающихся в уединенную. ПММ, 1960, вып. 4.
20. Gouyon R. Contribution a la théorie des houles. Toulouse, 1960.
21. Моисеев Н. Н. Теорема существования и неединственности вихревых волн периодического типа. ПММ, 1960, № 4.
22. Тер-Крикоров А. М. Уединенная волна на поверхности завихренной жидкости. Вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
23. Тер-Крикоров А. М. О внутренних волнах в неоднородной жидкости. ПММ, 1962, вып. 6.
24. Ter-Krikoroff A. M. Theorie exact des ondes dans les milieux geterogens. J. mecanique, 1963, № 4.
25. Жербе Р. О точных решениях уравнений движения тяжелой жидкости со свободной поверхностью. Теория поверхностных волн. Сб. пер., ИЛ, 1959.
26. Красовский Ю. П. К теории установившихся волн немалой амплитуды. Докл. АН СССР, 1960, т. 130, № 6.
27. Красовский Ю. П. О существовании апериодических течений со свободной границей. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 4.
28. Тер-Крикоров А. М. Нелинейная задача теории подводного крыла. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 6.
29. Филиппов И. Г. О движении вихря под поверхностью жидкости. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.