ПМТФ, № 5, 1992

УДК 533.95

Х. С. Кестенбойм, Е. В. Метелкин, Г. В. Федорович, А. Г. Фролов

О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОЙ ВЯЗКОСТИ НА РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГРАНИЦЫ ПЛАЗМЕННОГО СГУСТКА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследование динамики плазменных сгустков, движущихся в магнитном поле, представляет интерес для решения ряда задач астрофизики [1], геофизики [2, 3], а также для интерпретации экспериментов с лабораторной плазмой [4—6].

Задача о разлете плазменного облака в магнитном поле рассматривалась многими авторами (см., например, [7—13]). Суммируя их результаты, можно заключить, что к настоящему времени развиты достаточно полные представления о характере движения плазменных сгустков в магнитном поле. Отметим, что в ряде работ использовалась сложная кинетико-гидродинамическая модель, приводящая к громоздким численным расчетам [11, 12]. Важный вопрос о неустойчивостях, характеризующих динамику плазменного облака в магнитном поле, остается недостаточно изученным, так как его рассмотрение связано с дальнейшим усложнением математической модели. Основные результаты по возникновению магнитогидродинамических (МГД) неустойчивостей получены, как правило, на основе анализа дисперсионных соотношений (см. [14]).

Цель настоящей работы — формулировка модели динамики плазменного облака в магнитном поле, с одной стороны, достаточно простой для математического анализа, а с другой — достаточно полной, чтобы в ее рамках можно было описывать особенности развития МГД-неустойчивостей поверхности облака. В качестве таковой ниже рассматривается модель плазменного облака, заполненного слабонеоднородной бесстолкновительной замагниченной плазмой. Для описания плазмы используется модель Чу — Гольдбергера — Лоу (ЧГЛ) [14] с учетом поправок, связанных с конечностью ларморовского радиуса ионов, приводящих к появлению вязкости в уравнениях [15]. Граница плазменного облака описывается математически как разрыв полей и параметров плазмы. Задача о движении границы может быть сформулирована так, что в нее войдут только параметры, характеризующие саму границу. Это позволяет использовать метод контурной динамики для описания неустойчивости границы плазмы с вакуумом в том случае, когда поверхность искривлена. Соответствующая неустойчивость носит название желобковой или перестановочной, условия возникновения ее проанализированы в [16]. Заметим, что учет гировязкости дал возможность объяснить наблюдавшийся в эксперименте пространственный спектр поверхностных неустойчивостей плазменного сгустка, а также привел к установлению направленного движения желобков вдоль поверхности плазмы поперек магнитного поля.

1. Уравнения. В рамках ЧГЛ-приближения плазма описывается системой уравнений [14]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{p_\perp}{\rho B} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{p_\parallel B^2}{\rho^3} = 0, \tag{1.1}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\operatorname{div}\mathbf{P} + \frac{1}{c}(\mathbf{j}\times\mathbf{B}),\ \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{V}\times\mathbf{B}) = 0,$$

где ρ — плотность плазмы; $\mathbf{P}$ — тензор давления, компоненты которого зависят от величин $p_{\perp}$ и $p_{\parallel}$, характеризующих поперечное и продольное по отношению к магнитному полю давление плазмы.

Электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{B}$ поля определяются из решения уравнений Максвелла для квазинейтральной плазмы:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{E} = 0. \tag{1.2}$$

При исследовании неустойчивости границы замагниченной плазмы надо интегрировать уравнения (1.1) и (1.2) в облаке со свободной поверхностью. Поскольку такая задача чрезвычайно сложна, то целесообразно принять ряд упрощающих предположений.

Прежде всего для изучения эволюции желобковых возмущений ограничимся рассмотрением центрального, поперечного к внешнему магнитному полю сечения облака (рис. 1). При этом трехмерная задача сводится к плоской. Предполагая симметрию облака относительно центрального сечения, отметим, что внешнее поле $\mathbf{B}_0$ и поле $\mathbf{B}$ внутри плазмы ортогональны к плоскости сечения. Тогда для тока и скорости частиц, находящихся в рассматриваемой плоскости, из последних уравнений системы (1.1) получим

$$\mathbf{j} = \frac{c}{B^2}\mathbf{B}\times\left(\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \operatorname{div}\mathbf{P}\right),\ \mathbf{V} = \frac{c}{B^2}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}). \tag{1.3}$$

Разложим магнитное поле в плазме на постоянную и однородную часть $\mathbf{B}_1$ и переменную поправку $\mathbf{E}_1'$. Подставляя $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1'$ в первое уравнение (1.2) и привлекая выражение для тока из (1.3), легко показать, что поправка B_1' оказывается малой по сравнению с B_1, если скорость дрейфа частиц V значительно меньше альфвеновской $V_a = B/\sqrt{4\pi\rho}$ и давление частиц плазмы значительно меньше магнитного. Так как для поздней стадии разлета характерны указанные условия, будем считать, что магнитное поле внутри плазмы постоянно. Скачок поля на поверхности облака (переход от B_0 к B_1) определяется поверхностным током, текущим по контуру L, ограничивающему центральное сечение, а объемные токи слабо искажают магнитное поле $\mathbf{B}_1$.

Предположение о постоянстве поля приводит к выполнению равенств $\operatorname{rot}\mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ внутри контура, что влечет за собой условие несжимаемости ($\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$) для плазмы. Полагая далее, что в начальный момент времени ρ, $p_{\perp}$, $p_{\parallel}$ постоянны в центральном сечении облака, из уравнений (1.1) получим, что они остаются постоянными и во все последующие промежутки времени. Отмеченные обстоятельства стимулируют дальнейшее упрощение постановки задачи: выводятся уравнения эволюции контура L как математической поверхности разрыва полей и параметров плазмы. Задача о положении границы может быть сформулирована так, что в нее войдут только параметры, характеризующие саму границу. Это позволяет свести анализ развития неустойчивости поверхности плазменного облака к решению одномерной нестационарной задачи.

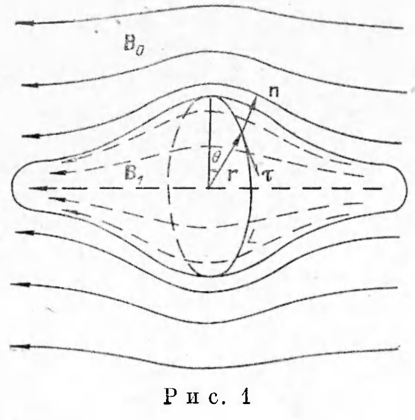


Рис. 1

Движение границы центрального сечения определяется, если в каждой ее точке известна нормальная скорость D, совпадающая с нормальной составляющей к границе скорости дрейфа V_n:

$$D = -cE_\tau/B_1. \tag{1.4}$$

Отсюда следует, что задача состоит в нахождении компонент E_τ и E_n электрического поля, которое индуцируется при перемещении границы и зависит от накопления на ней поверхностного заряда (индексами n и τ отмечаются проекции на внешнюю нормаль и касательную к границе центрального сечения L).

Пусть на L задан скачок напряженности магнитного поля $[B] = B_0 - B_1$ и имеется поверхностный заряд σ. Тогда [17] электрическое поле будет претерпевать разрыв на контуре:

$$[E_\tau] = -Dc^{-1}[B], [E_n] = 4\pi\sigma, [E_\tau] = E_\tau^+ - E_\tau^-, [E_n] = E_n^+ - E_n^-,$$

где знаком $+$ $(-)$ отмечена внешняя (внутренняя) по отношению к контуру L область. Представим поле в виде суперпозиции $\mathbf{E} = \mathbf{\Psi} + \mathbf{\Phi}$ вихревого и поляризационного полей, для которых вне границы

$$\operatorname{rot} \mathbf{\Psi} = 0,\ \operatorname{div} \mathbf{\Psi} = 0,\ \operatorname{rot} \mathbf{\Phi} = 0,\ \operatorname{div} \mathbf{\Phi} = 0, \tag{1.5}$$

а на границе

$$[\Psi_\tau] = -Dc^{-1}[B],\ [\Psi_n] = 0,\ [\Phi_\tau] = 0,\ [\Phi_n] = 4\pi\sigma. \tag{1.6}$$

Введем функцию тока ψ и потенциал φ: $\mathbf{\Psi} = -\mathbf{b} \times \operatorname{grad} \psi$, $\mathbf{\Phi} = -\operatorname{grad} \varphi$, $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$, откуда, используя (1.5), в силу двумерности течения имеем

$$\Delta\psi = 0,\ \Delta\varphi = 0. \tag{1.7}$$

Учитывая, что

$$\Psi_\tau = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}},\ \Psi_n = -\frac{\partial\psi}{\partial\tau},\ \Phi_\tau = -\frac{\partial\varphi}{\partial\tau},\ \Phi_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}, \tag{1.8}$$

из (1.6) получаем условия для функций ψ и φ на границе L:

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right] = -\frac{D}{c}[B], \left[\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right] = 0, \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right] = -4\pi\sigma, \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right] = 0. \tag{1.9}$$

Таким образом, сформулированы задачи (1.7), (1.9) о сопряжении на L гармонических функций с непрерывной касательной и претерпевающей заданный скачок нормальной производными. Условия разрешимости этих задач при достаточной гладкости L запишем в виде

$$\oint_L D ds = 0,\quad \oint_L \sigma ds = 0. \tag{1.10}$$

Решения задач (1.7), (1.9) ищутся в виде логарифмического потенциала простого слоя с плотностью μ (s' — натуральный параметр кривой, $\mathbf{r}'$ — соответствующий точке s' вектор):

$$Q(\mathbf{r}) = \oint_L \mu(\mathbf{r}') \ln\frac{1}{\delta r} ds',\ \delta r = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|.$$

Выпишем известные [18] выражения для граничных значений нормальной производной потенциала Q:

$$\frac{\partial Q^+(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{n}} = -\pi\mu(\mathbf{r}) + \oint_L \mu(\mathbf{r}')\frac{\cos\alpha}{\delta r} ds', \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial Q^-(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{n}} = \pi\mu(\mathbf{r}) + \oint_L \mu(\mathbf{r}')\frac{\cos\alpha}{\delta r} ds'$$

(α — угол между векторами $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$). Тогда

$$[\partial Q/\partial\mathbf{n}] = -2\pi\mu. \tag{1.12}$$

Производная $\partial Q/\partial\tau$ вдоль касательного направления к границе, согласно [18], непрерывна (β — угол между $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ и τ):

$$\frac{\partial Q(\mathbf{r})}{\partial\tau} = \oint_L \mu(\mathbf{r}')\frac{\cos\beta}{\delta r}\,ds'. \tag{1.13}$$

Условия (1.12), (1.13) согласуются с (1.9) при $\mu_\psi = D[B]/(2\pi c)$, $\mu_\varphi = 2\sigma$.

Используя эти соотношения для плотности «источников», создающих поля Ψ и Φ, и формулы (1.8), (1.11), (1.13), находим компоненты поля $\mathbf{E}$ на границе при подходе к ней со стороны плазмы:

$$E_\tau^- = \frac{D[B]}{2c} + \frac{[B]}{2\pi c}\oint_L D\frac{\cos\alpha}{\delta r}\,ds' - 2\oint_L \sigma\frac{\cos\beta}{\delta r}\,ds', \tag{1.14}$$

$$E_n^- = -2\pi\sigma - \frac{[B]}{2\pi c}\oint_L D\frac{\cos\beta}{\delta r}\,ds' - 2\oint_L \sigma\frac{\cos\alpha}{\delta r}\,ds'.$$

Соотношение (1.4) дополняет уравнения (1.14), связывая E_τ с D. Для замыкания системы уравнений нужно выразить заряд σ через компоненты поля $\mathbf{E}$. Воспользуемся уравнением сохранения заряда

$$\partial\sigma/\partial t = j_n, \tag{1.15}$$

связывающего плотность поверхностного заряда с нормальной составляющей тока j_n к границе. Выражение для j_n находится из соотношения (1.3), записанного на границе центрального сечения облака в проекции на нормаль к контуру L. Подставляя результат, полученный с учетом однородности распределения параметров плазмы внутри облака, в формулу (1.15), выведем соотношение

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{c^2}{B_1^2}\rho\frac{\partial E_n^-}{\partial t} + \frac{c}{B_1}(\operatorname{div}\mathbf{P})_\tau,$$

дополняющее уравнения (1.4), (1.14) до замкнутой системы.

Исключим из этой системы E_n и E_τ, учтем, что $V_a/c \ll 1$, и введем вместо σ новую переменную $\Sigma = 4\pi c\sigma/(B_0 + B_1)$. В результате имеем систему уравнений для двух неизвестных функций D, Σ:

$$D(t,\mathbf{r}) = \frac{-[B]}{\pi(B_0+B_1)}\oint_L D\frac{\cos\alpha}{\delta r}\,ds' + \oint_L \Sigma\frac{\cos\beta}{\delta r}\,ds', \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial\Sigma(t,\mathbf{r})}{\partial t} = \frac{2B_1(\operatorname{div}\mathbf{P})_\tau}{\rho(B_0+B_1)} - \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{[B]}{B_0+B_1}\oint_L D\frac{\cos\beta}{\delta r}\,ds' + \oint_L \Sigma\frac{\cos\alpha}{\delta r}\,ds'\right\}.$$

Если величина $(\operatorname{div}\mathbf{P})_\tau$ на границе известна, то из (1.16) можно определить $D(t, \mathbf{r})$ и соответственно описать эволюцию контура L. В общем случае (см. [14])

$$(\operatorname{div} P)_\tau = \{\operatorname{grad} p_\perp + (p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{b}\operatorname{grad})\mathbf{b}\}_\tau. \tag{1.17}$$

Связь между $\operatorname{grad} p_\perp$ и вектором кривизны $(\mathbf{b}\operatorname{grad})\mathbf{b}$ на границе плазмы можно найти из условия равенства на ней нулю нормальной составляющей тока намагничивания [19]. Учитывая, что $p_\perp/B^2 \ll 1$, для центрального сечения облака имеем

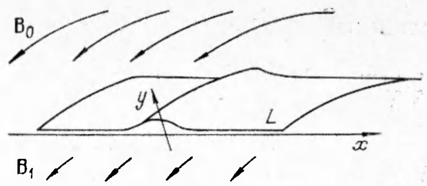
$$(\mathbf{j}_m)_\perp = -c\operatorname{rot}(p_\perp\mathbf{b}/B) = -c\mathbf{b}/B \times \{2p_\perp(\mathbf{b}\operatorname{grad})\mathbf{b} - \operatorname{grad} p_\perp\}.$$

Определяя отсюда $(j_m)_n$, приравнивая к нулю и привлекая (1.17), окончательно получим, что на границе

$$(\operatorname{div}\mathbf{P})_\tau = \{(p_\perp + p_\parallel)(\mathbf{b}\operatorname{grad})\mathbf{b}\}_\tau. \tag{1.18}$$

2. Вязкость. При анализе неустойчивости плазмы на основе ЧГЛ-приближения обнаруживается существование решений вида $\exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$, причем инкремент неустойчивости $\gamma = \operatorname{Im}(\omega)$ неограниченно растет с увеличением волнового числа k [14]. Реально при больших k стано-

Рис. 2



вятся существенными отклонения свойств плазмы от ее МГД-модели. Основная причина таких отклонений очевидна — конечность ларморовского радиуса ионов R_i.

Как показано в [15], учет конечности R_i в ЧГЛ-модели приводит к представлению тензора давления в виде $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, где тензор $\mathbf{p}$ отвечает анизотропному давлению в плазме, а тензор $\mathbf{q}$ характеризует вязкие поправки порядка $1/\omega_i$ (ω_i — циклотронная частота ионов). Общее выражение для $\mathbf{q}$ получено в [20]. Считая, что магнитные силовые линии внешнего поля, вытесняемого плазмой, имеют постоянный радиус кривизны R_b, и пренебрегая членами порядка $1/(\omega_i R_b)$, $1/R_b^2$, из [20] с учетом (1.18) можно получить выражение для $(\operatorname{div} \mathbf{P})_\tau = (\operatorname{div} \mathbf{q})_\tau + (\operatorname{div} \mathbf{p})_\tau$ на границе центрального сечения облака:

$$(\operatorname{div} \mathbf{P})_\tau = -\frac{p_\perp}{2\omega_i}\frac{\partial^2 D}{\partial s^2} - \frac{p_\perp + p_\parallel}{R_b}\cos\eta. \tag{2.1}$$

Здесь η — угол между радиусом-вектором $\mathbf{r}$, проведенным от оси облака к некоторой точке контура L, и вектором касательной $\boldsymbol{\tau}$ в той же точке. Подстановкой (2.1) в (1.16) завершается вывод замкнутой системы.

3. Модельная задача. Рассмотрим желобковую неустойчивость искривленной вдоль поля поверхности, ограничивающей часть пространства, заполненного плазмой (рис. 2). Пусть магнитные силовые линии имеют постоянный радиус кривизны R_b, векторы $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}_1$ коллинеарны и на поверхности задан скачок $[B] = B_0 - B_1$.

В сечении пространства плоскостью, ортогональной к магнитным силовым линиям, бесконечно протяженная граница L, отделяющая плазму от вакуума, начнет деформироваться под влиянием дрейфа заряженных частиц. В декартовой системе координат с осью x, выбранной вдоль невозмущенной границы, кривая L будет описываться уравнением $y = Y(t, x)$. Скорость движения границы вдоль нормали определяется выражением

$$D(t, x) = \frac{\partial Y(t, x)}{\partial t}\left\{1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2\right\}^{-1/2}. \tag{3.1}$$

Рассмотрим малые возмущения границы $y = Y(t, x)$. Полагая величины Y, $\partial Y/\partial x$, $\partial Y/\partial t$, Σ, $\partial\Sigma/\partial t$, $Y(t, x') - Y(t, x)$ малыми первого порядка и пренебрегая их квадратами и произведениями, из (1.16), (2.1), (3.1) получим линеаризованную систему уравнений

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t} = \frac{-2B_1}{B_0 + B_1}\left(G\frac{\partial Y}{\partial x} + \nu\frac{\partial^3 Y}{\partial t\,\partial x^2}\right) - \frac{B_0 - B_1}{\pi(B_0 + B_1)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial Y}{\partial t}\frac{dx'}{x' - x},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Sigma(t, x')\frac{dx'}{x' - x},\quad G = \frac{p_\parallel + p_\perp}{\rho R_b},\quad \nu = \frac{p_\perp}{2\rho\omega_i},$$

где параметры G и ν имеют размерности ускорения и вязкости.

Из второго уравнения системы следует, что функция $\partial Y/\partial t$ является сопряженной к Σ относительно преобразования Гильберта с ядром Коши [21]. С помощью обратного преобразования интеграл, стоящий в правой части первого уравнения, можно выразить через функцию Σ. После несложных выкладок имеем

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Sigma(t, x')\frac{dx'}{x'-x}, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -G\frac{\partial Y}{\partial x} - \nu\frac{\partial^3 Y}{\partial t \partial x^2}. \tag{3.2}$$

Устойчивость системы (3.2) по отношению к возмущениям вида $\exp(-i\omega t + ikx)$ определяется дисперсионным соотношением

$$\omega^2 + \nu k^2\omega + Gk = 0. \tag{3.3}$$

Легко видеть, что при $\nu = 0$ система неустойчива, причем инкремент неустойчивости $\gamma(k)$ неограниченно увеличивается с ростом волнового числа. При $\nu \neq 0$ возмущения растут только при $0 < k < k_0$, где $k_0 = (4G/\nu^2)^{1/3}$. Инкремент достигает своего максимального значения $\gamma_* = \sqrt{3}/2\,(G^2/\nu)^{1/3}$ при $k = (G/\nu^2)^{1/3}$. Таким образом, учет гировязкости приводит к стабилизации коротковолновых мод. Рост возмущений происходит в интервале длин волн, значительно превосходящих величину ларморовского радиуса:

$$\lambda > \lambda_0 = \pi/k_0 = \pi\{\nu^2/(4G)\}^{1/3} \simeq R_i(R_b/R_i)^{1/3} \gg R_i,$$

что указывает на применимость используемого выше подхода к анализу неустойчивости. Следует отметить, что решение уравнения (3.3) имеет и действительную часть, зависящую от k. Это приводит к эффекту волнового распространения начальных возмущений, который также определяется наличием гировязкости. Длинноволновые возмущения смещаются с фазовой скоростью $-\nu k/2$.

Рассмотрим желобковые возмущения типа «волнового пакета»

$$Y(t=0, x) = Y_0/\{1 + (x/x_0)^2\}, \quad \Sigma(t=0, x) = 0. \tag{3.4}$$

При $\nu = 0$ задача (3.2), (3.4) решается с помощью интегрального преобразования Фурье

$$Y(t, x) = Y_0 x_0 \int\limits_0^{\infty} \exp(-kx_0)\,\mathrm{ch}\,(t\sqrt{Gk})\cos(kx)\,dk. \tag{3.5}$$

Для больших x можно получить асимптотику решения

$$Y(t, x) \simeq \frac{Y_0 x_0}{x^2}\left(x_0 - \frac{Gt^2}{2}\right).$$

При $x = 0$ интеграл (3.5) вычисляется:

$$Y(t, x=0) = Y_0\left\{\frac{t\sqrt{G}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x_0}}\exp\left(\frac{Gt^2}{4x_0}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{t\sqrt{G}}{2\sqrt{x_0}}\right) + 1\right\}. \tag{3.6}$$

Из (3.6) видно, что желобковое возмущение (3.4) развивается значительно быстрее синусоидального и рост амплитуды ускоряется при уменьшении ширины импульса x_0.

Введем масштабы длины Y_0, времени $\sqrt{Y_0/G}$ и заряда $\sqrt{Y_0 G}$. В безразмерных переменных задача (3.2), (3.4) примет вид

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Sigma(t, x')\frac{dx'}{x'-x}, \quad Y(t=0, x) = \frac{1}{(1+xd)^2}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^3 Y}{\partial t \partial x^2}, \quad \Sigma(t=0, x) = 0,$$

где $\mathrm{Re} = Y_0\sqrt{Y_0 G}/\nu$ — аналог числа Рейнольдса; $d = Y_0/x_0$ —«добротность» начального импульса.

Аналогично преобразуется формула (3.5), результаты вычисления по которой при $d = 1$ приведены на рис. 3. Кривые *1* и *2* отвечают положению границы в моменты $t = 0$ и 2. Наблюдается симметричная относительно оси ординат картина развития неустойчивости. Видно, что в некоторый момент времени возникает отрицательная фаза, расчет хорошо согласуется с асимптотикой.

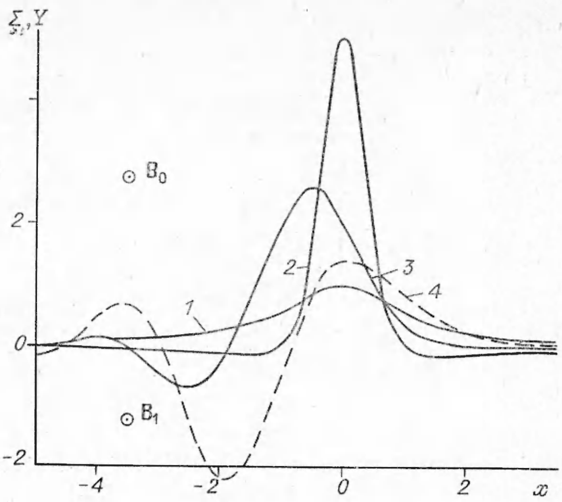


Рис. 3

При $\nu \neq 0$ задача (3.7) исследуется методом конечных разностей [22]. Результаты расчетов также приведены на рис. 3, где для $\mathrm{Re} = 2$, $d = 1$ показано, как деформируется граница плазмы к моменту $t = 2$ (кривая *3*). Учет гировязкости приводит к интересным эффектам. Видно, что амплитуда возмущения растет не так быстро, как при ее отсутствии (ср. с кривой *2*), причем ось наибольшего роста возмущения смещается влево по сравнению с начальным расположением. По-прежнему наряду с развитием положительной фазы образуется отрицательная, однако волновая структура теряет симметрию. На рис. 3 иллюстрируется процесс разделения зарядов на границе плазмы ($\nu \neq 0$, кривая *4*) от начального момента, когда $\Sigma = 0$, до момента времени $t = 2$. Видно, что положительные и отрицательные заряды концентрируются на разных склонах выступов и провалов, образующихся на границе. Возникающее при этом локальное электрическое поле стимулирует развитие неустойчивости.

Отметим еще одно обстоятельство. Расчеты (3.7) при фиксированном Re и вариации параметра d показали, что существует определенное значение «добротности» начального импульса (3.4), при котором рост амплитуды возмущения происходит с наибольшей скоростью. Это соответствует факту существования длины волны λ_* синусоидального возмущения, отвечающей наибольшему значению инкремента нарастания.

4. Эволюция границы центрального сечения облака веретенообразной формы. Пусть контур L задан уравнением $r = R(t, \theta)$ в полярных координатах r, θ (см. рис. 1). Учитывая, что

$$D = \frac{\partial R}{\partial t}\left\{1 + \left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2\right\}^{-1/2}, \quad \cos\eta = \frac{\partial R}{\partial \theta}\left\{R^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2\right\}^{-1/2},$$

из (1.16), (2.1) получим линеаризованную систему уравнений относительно малых величин R_1 и Σ_1 ($R = R_0 + R_1$, $\Sigma = \Sigma_1$):

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} = \frac{1}{2\pi}\frac{B_0 - B_1}{B_0 + B_1}\int_0^{2\pi}\frac{\partial R_1}{\partial t}d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Sigma_1 \operatorname{ctg}\frac{\theta' - \theta}{2}d\theta', \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^{2\pi}\Sigma_1 d\theta - \frac{B_0 - B_1}{B_0 + B_1}\int_0^{2\pi}\frac{\partial R_1}{\partial t}\operatorname{ctg}\frac{\theta' - \theta}{2}d\theta'\right\} -$$

$$- \frac{2B_1}{B_0 + B_1}\left\{\frac{G}{R_0}\frac{\partial R_1}{\partial \theta} + \frac{\nu}{R_0^2}\frac{\partial^3 R_1}{\partial t \partial \theta^2}\right\}, \quad R_1(t, 0) = R_1(t, 2\pi), \ \Sigma_1(t, 0) = \Sigma_1(t, 2\pi).$$

Используя формулу обращения преобразования Гильберта [21] и условия разрешимости (1.10), из первого уравнения системы (4.1) находим

$$\Sigma_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial R_1}{\partial t}\operatorname{ctg}\frac{\theta' - \theta}{2}d\theta'. \tag{4.2}$$

Вводя масштабы длины R_0 и времени $(R_0/G)^{1/2}$ и применяя (4.2), систему (4.1) можно переписать в безразмерном виде

$$(4.3)\qquad \frac{\partial R_1}{\partial t}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Sigma_1 \operatorname{ctg}\frac{\theta'-\theta}{2}\,d\theta',\quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t}=-\frac{\partial R_1}{\partial \theta}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^3 R_1}{\partial t\partial\theta^2}.$$

Легко выписать дисперсионное соотношение системы (4.3)

$$(4.4)\qquad \omega^2+\omega k^2/\mathrm{Re}+k=0,\quad \omega=w+i\gamma,\quad k\in Z,$$
$$w=-k^2/(2\,\mathrm{Re}),\quad \gamma=(k-w^2)^{1/2},\quad k_*=\mathrm{Re}^{2/3}$$

и ее точное решение для синусоидального начального возмущения:

$$(4.5)\qquad R_1=A\exp(\gamma t)\cos(wt-k\theta),\ \sin\varepsilon=-w/|\omega|,$$
$$\Sigma_1=A|\omega|\exp(\gamma t)\sin(wt-k\theta+\varepsilon),\ \cos\varepsilon=-\gamma/|\omega|.$$

В соответствии с (4.5) наблюдается развитие периодической системы плоских струй на границе плазменного сгустка. Картина распределения заряда заметно смещена по фазе. Вся конфигурация вращается против часовой стрелки (если смотреть с конца вектора **B**) с угловой скоростью $w/k=-0{,}5k/\mathrm{Re}$. Численный расчет (4.3) для $A=0{,}1$, $\mathrm{Re}=10$ ($k_*=4$) обнаруживает хорошее совпадение с (4.5) [22].

Рассмотрим эволюцию единичного желобка, определяемого в начальный момент времени выражениями

$$(4.6)\qquad R_1=A/\{1+(\theta/\theta_0)^2\},\ \Sigma_1=0,$$

где параметр θ_0 характеризует «добротность» импульса. На рис. 4 показаны результаты численного решения системы (4.3) при $\mathrm{Re}=10$, $A=0{,}1$, $\theta_0=3\pi/40$. Окружность *1* отвечает невозмущенной границе, кривая *2* — начальному возмущению, *3* — деформации поверхности (зависимость $R(\theta)$) в момент $t=2$. Видно, что эволюция возмущения происходит в соответствии с ранее установленными закономерностями. Имеет место быстрое развитие положительной фазы с образованием плоской струи; появляется отрицательная фаза, отсутствовавшая в начальном профиле. Кривая *4* построена по зависимости $\Sigma(\theta)$ при $t=2$. Точки кривой, отвечающие положительным (отрицательным) значениям заряда, откладывались от окружности *1* на внешних (внутренних) частях прямых $\theta=\mathrm{const}$. Разделение зарядов на поверхности происходит так, что заряды разного знака концентрируются на разных склонах выступов и впадин. Возникающее в результате локальное электрическое поле (показано стрелками) ведет к дальнейшему развитию неустойчивости. Следует отметить, что желобок, деформируясь со временем, смещается в направлении против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора **B**.

На рис. 5 приведены результаты расчета нескольких вариантов развития возмущения (4.6), различающихся значением параметра θ_0. Положения границы показаны в момент времени $t=2$. Линии *1—3* отвечают значениям $\theta_0=h,\ 2h,\ 6h$ ($h=\pi/32$). Расчеты демонстрируют избирательный характер развития неустойчивости, проявляющийся при учете гировязкости. Видно, что наиболее интенсивно развивается возмущение, соответствующее $\theta_0=2h$. Отметим, что на практике обычно реализуется конфигурация, отвечающая наиболее растущей со временем моде возмущения.

5. Сравнение с экспериментом. Рассмотрим экспериментальные данные [4] по изучению неустойчивости поверхности лабораторной плазмы, расширяющейся в магнитном поле. Во время разлета плазменное облако фотографировалось со скоростью $\sim$1 кадр/мкс. Температура плазмы 10 эВ, суммарная масса облака в пределах 10^{-7}—10^{-6} г (10^{15}—10^{16} атомов Cu), характерный размер облака 3 см. При сечении столкновений 10^{-16} см^2 (для указанной температуры кулоновское сечение близко к газокинетическому) длина свободного пробега частиц 10^2 см. Ларморовский радиус при значении магнитной индукции $B=0{,}77$ Тл достигал $\sim$0,5 см.

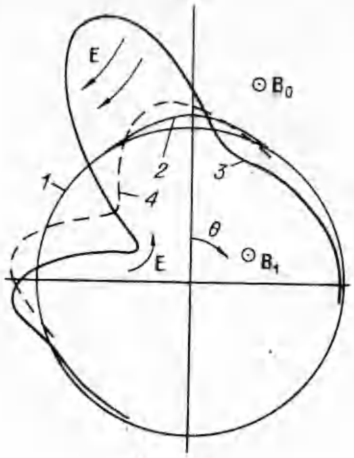


Рис. 4

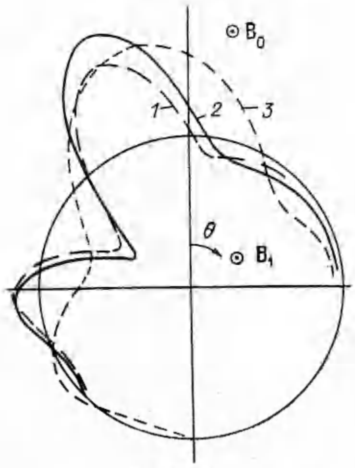


Рис. 5

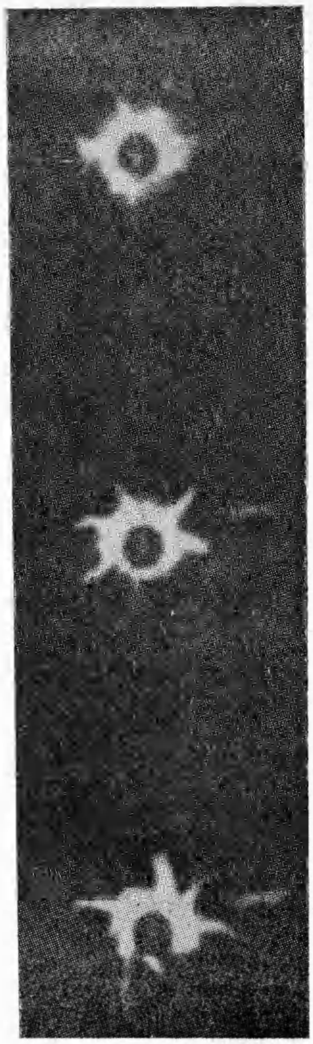


Рис. 6

Видно, что эксперимент может быть описан в рамках принятой в настоящей работе модели бесстолкновительной плазмы с учетом гировязкости.

Оценим число Рейнольдса для указанных значений параметров:

$$\mathrm{Re} = R_0 \sqrt{\frac{R_0 (p_\perp + p_\parallel)}{\rho R_b} \frac{2\rho\omega_i}{p_\perp}} \approx 2R_0 \sqrt{\frac{2\rho}{p}}\,\omega_i \approx 2\sqrt{2}\,\frac{R_0}{R_i} \approx 17.$$

Согласно (4.4), волновое число, отвечающее максимальному инкременту нарастания, равно $\sim 6-7$. Примерно такое число желобков и наблюдается на фотографиях в [4] (рис. 6). Рассматривая последовательность фотографий облака (соответственно на 9, 12 и 13 мкс после начала разлета), можно заметить смещение желобков вдоль его поверхности поперек магнитного поля. Смещение желобков подчиняется правилу, установленному выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Акасофу С. И., Чепмен С.** Солнечно-земная физика.— М.: Мир, 1975.
2. **Ляцкий В. Б., Мальцев Ю. П.** Магнитосферно-ионосферное взаимодействие.— М.: Наука, 1983.
3. **Метелкин Е. В., Федорович Г. В.** Геомагнитные эффекты движения внутримагнитосферных плазменных сгустков // Геомагнетизм и аэрономия.— 1985.— Т. 25, № 6.

4. **Dickinson H., Bostick W. H., Di Marco J. N., Koslov S.** Experimental study of Rayleigh — Taylor instability in plasma // Phys. Fluids.— 1962.— V. 5, N 9.
5. **Davidson R. C., Krall N. A.** Anomalous transport in high-temperature plasmas with applications to solenoidal fusion systems // Nuclear Fusion.— 1977.— V. 17, N 6.
6. **Захаров Ю. П., Оришич А. М., Пономаренко А. Г.** Лазерная плазма и лабораторное моделирование нестационарных космических процессов.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1988.
7. **Райзер Ю. П.** О торможении и превращениях энергии плазмы, расширяющейся в пустом пространстве, в котором имеется магнитное поле // ПМТФ.— 1963.— № 6.
8. **Poukey J. W.** Expansion of a plasma shell into a vacuum magnetic field // Phys. Fluids.— 1969.— V. 12, N 7.
9. **Бахрах С. М., Губков Е. В., Жмайло В. А. и др.** Разлет плазменного облака в однородном магнитном поле // ПМТФ.— 1974.— № 4.
10. **Головизнин В. М., Коршия Т. К., Любимов Б. Я. и др.** Численное исследование разлета плазмы в магнитном поле.— М., 1978.— (Препр./Ин-т прикл. математики АН СССР; № 61).
11. **Башурин В. П., Голубев А. И., Терехин В. А.** О бесстолкновительном торможении ионизированного облака, разлетающегося в однородную замагниченную плазму // ПМТФ.— 1983.— № 5.
12. **Березин Ю. А., Вшивков В. А., Снытников В. П.** Численная кинетико-гидродинамическая модель плазмы в магнитном поле // ЧММСС.— 1984.— Т. 15, № 3.
13. **Метелкин Е. В.** О поляризации плазменного облака, расширяющегося в неоднородном магнитном поле // ПМТФ.— 1989.— № 3.
14. **Кролл Н., Трайвелпис А.** Основы физики плазмы.— М.: Мир, 1975.
15. **Заславский Г. М., Моисеев С. С.** О влиянии магнитной вязкости на устойчивость плазмы с анизотропным давлением // ПМТФ.— 1962.— № 6.
16. **Кадомцев Б. Б.** Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы.— М.: Госатомиздат, 1963.— Вып. 2.
17. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1976.— Т. 1.
18. **Мусхелишвили И. И.** Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Физматгиз, 1962.
19. **Франк-Каменецкий Д. А.** Лекции по физике плазмы.— М.: Атомиздат, 1968.
20. **Шикин И. С.** Магнитогидродинамические уравнения для плазмы без столкновений с учетом магнитной вязкости // Проблемы современной механики.— М.: Изд-во МГУ, 1983.— Ч. 2.
21. **Титчмарш Е. С.** Введение в теорию интегралов Фурье.— М.: Гостехиздат, 1948.
22. **Кестенбойм Х. С., Метелкин Е. В., Федорович Г. В., Фролов А. Г.** О желобковой неустойчивости плазменного облака, разлетающегося в однородном магнитном поле.— М., 1989.— (Препр./Ин-т проблем механики АН СССР; № 371).

г. Москва *Поступила 6/XII 1990 г., в окончательном варианте — 24/VII 1991 г.*

УДК 535.434 : 551.593

Н. Н. Белов, С. О. Суслов

АСИМПТОТИКИ ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ НЕПОГЛОЩАЮЩИХ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ ЧАСТИЦ

В последнее время большой интерес представляет расчет характеристик светорассеяния малых сферических частиц с радиально-неоднородным показателем преломления [1—3]. Аналитическое решение эта задача имеет лишь в некоторых частных случаях [1, 2], поэтому возникает необходимость разработки численных методов для ее решения [1, 3]. Одним из них является метод фазовых функций [4], позволяющий достаточно точно рассчитывать оптические характеристики радиально-неоднородных частиц при сравнительно небольших затратах машинного времени и открывающий широкие перспективы исследования оптики таких частиц. Однако некоторые вопросы, связанные с данным методом, остаются до сих пор не решенными. В частности, не найдены выражения, описывающие поведение фазовых функций вблизи центра шара, использование которых повысит точность получаемых результатов. Отсутствуют также критерии оценки точности расчетов указанным методом. Эти пробелы восполняются в настоящей работе.