ПМТФ, № 3, 1967

О ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ СЛОЖНОЙ ПРОГРАММЕ НАГРУЖЕНИЯ

А. Г. Костюк

(Москва)

Предсказание деформации и условий разрушения материала при сложной программе нагружения связано с необходимостью учитывать влияние всей предыстории.

Задача усложняется в случае совместного действия разнородных механизмов деформации и разрушения, например, при том или ином сочетании ползучести и однократного или повторного пластического деформирования.

Перспективный феноменологический подход к этой проблеме может быть, повидимому, основан на представлении о механическом уравнении состояния материала. Гипотеза о существовании уравнения состояния, зависящего от конечного числа структурных параметров, выдвинута Крёнером [1] — применительно к пространственному закону пластичности и Ю. Н. Работновым [2] — для случая ползучести и разрушения при одноосном напряженном состоянии.

В данной работе рассматривается применение гипотезы о механическом уравнении состояния к проблеме деформирования и разрушения материала (одноосный случай) при сложных программах нагружения.

1. **Основные предположения**. Материал подвергается нагружению по произвольной программе, заданной, например, законами изменения напряжения σ (τ) и температуры t (τ) во времени (τ — время).

Для феноменологического описания поведения материала при этих условиях принимаем следующую систему предположений.

a) Составляющие деформации суммируемы

$$d\varepsilon = d\text{э} + de + dp, \quad \text{э} = \sigma / E + \varkappa t, \quad E = E(t), \quad \varkappa = \varkappa(t)$$

Здесь ε, э, e, p — соответственно деформации: полная, обратимая (упругая плюс температурная), пластическая и деформация ползучести, E — модуль упругости.

b) Изменение пластической деформации на дифференциальном участке пути нагружения определяется зависимостью

$$de = R_1 d\tau + R_2 d\sigma + R_3 dt \tag{1.1}$$

Слагаемые в правой части (1.1) определяют соответственно влияние временных процессов (диффузии, старения) на сопротивление пластическим деформациям ($R_1 d\tau$), мгновенное изотермическое изменение пластической деформации в связи с изменением напряжения ($R_2 d\sigma$) и влияния изменения температуры на сопротивление пластическим деформациям ($R_3 dt$). Деформация ползучести определяется зависимостью

$$dp = R_4 d\tau \tag{1.2}$$

Здесь R_4 — скорость ползучести.

c) Величины R_l (l = 1, 2, 3, 4) — функции от τ, σ, t и структурных параметров q_r (r = 1, 2, 3,..., s)

$$R_l = R_l(\tau, \sigma, t, q_1, q_2, \ldots, q_s) \tag{1.3}$$

Структурные параметры определяются по [2] соотношениями вида

$$dq_i = a_{i1} d\tau + a_{i2} d\sigma + a_{i3} dt \tag{1.4}$$

$$a_{ij} = a_{ij}(\tau, \sigma, t, q_1, q_2, \ldots, q_s) \tag{1.5}$$

Каждый из коэффициентов R_l и a_{ij} вообще имеет две ветви: два значения при любой данной совокупности значений τ, σ, t, q_r.

Одна из ветвей R_l', a_{ij}' соответствует активной пластической деформации, вторая ветвь R_l'', a_{ij}'' — разгрузке.

d) Момент наступления разгрузки определяется по максимуму $|e|$. Условие максимума можно представить в виде

$$e(R_1' + R_2' \, d\sigma/d\tau + R_3' \, dt/d\tau) \leqslant 0 \tag{1.6}$$

Здесь e — пластическая деформация при начале разгрузки. Знак равенства в (1.6) соответствует необходимому, знак неравенства — необходимому и достаточному условию разгрузки.

Если условие максимума $|e|$ выразить через коэффициенты R_l'', то получим необходимое и достаточное условие разгрузки в виде

$$R_1'' + R_2'' \, d\sigma/d\tau + R_3'' \, dt/d\tau = 0 \tag{1.7}$$

Условие (1.6) может быть выполнено множеством способов, т. е. при разгрузке значения $d\sigma \, / \, d\tau$ и $dt \, / \, d\tau$ не являются единственными. Отсюда следует, что (1.7) должно выполняться тождественно, т. е. в начальный момент разгрузки $R_l'' = 0$ ($l = 1, 2, 3$).

Функциональные зависимости (1.3), (1.5) неизвестны. Возможный путь решения задачи состоит в выборе предположительного вида этих функций на основе эвристического обобщения частных экспериментов с последующей экспериментальной проверкой выводов на примерах сложного нагружения.

Изменение механических свойств твердого тела вызывается как временными процессами (старением, диффузией и т. п.), так и необратимыми деформациями (пластической деформацией и ползучестью).

Отмечая непосредственное влияние необратимых деформаций на изменение механических свойств, целесообразно зависимость (1.4) представить в следующей эквивалентной форме:

$$dq_i = a_{i1} d\tau + a_{i2} de + a_{i3} dp + a_{i4} dt \tag{1.8}$$

Для новых коэффициентов в (1.8) приняты прежние обозначения a_{ij}.

Применим названные представления к некоторым задачам деформации и разрушения материала при сложном нагружении в условиях постоянной температуры.

В качестве структурных параметров выберем $q_1 = u$, $q_2 = v$, $q_3 = \psi$, причем

$$u = \int \sigma de, \qquad v = \int \sigma dp \tag{1.9}$$

Здесь интегрирование распространяется на всю историю деформирования. Параметр u представляет удельную энергию, рассеянную материалом вследствие кратковременной пластической деформации, v — рассеянная энергия вследствие ползучести. Третий параметр ψ — степень поврежденности материала, величина которой принимается равной нулю для материала в исходном состоянии и равной единице в момент разрушения.

Введение параметров u и v должно по смыслу отражать тот факт, что изменение структуры и природа разрушения вследствие кратковременной пластической деформации и ползучести различны, и это различие можно учесть введением не менее чем двух структурных параметров.

Для того чтобы система соотношений (1.1), (1.2), (1.9) позволяла при заданной программе нагружения $\sigma(\tau)$ и соответствующих начальных условиях определить все прочие характеристики, необходимо еще одно соотношение типа (1.8), которое примем в виде

$$d\psi = h_1 du + h_2 dv \tag{1.10}$$

Условие (1.10) выражает предположение, что повреждение материала вызывается необратимыми деформациями. Величины h_1 и h_2, очевидно, есть функции от τ, σ, u, v и ψ. Учитывая сказанное и используя (1.1), (1.2), (1.9) и (1.10), можно систему уравнений, определяющих поведение нестареющего материала, представить в виде

$$de = R_2 d\sigma, \qquad dp = R_4 d\tau, \qquad du = \sigma de, \qquad dv = \sigma dp \tag{1.11}$$

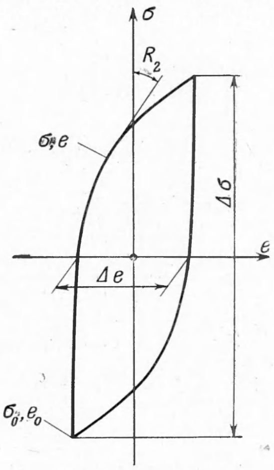
$$d\psi = h_1 du + h_2 dv \tag{1.12}$$

Здесь $1 / R_2$ — пластический модуль.

2. **Усталость.** В системе (1.11), (1.12) надо принять $R_4 \equiv 0$ и выбрать вид функций R_2 и h_1. Функцию R_2 определим из закона повторного деформирования

$$d(e - e_0) = m \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{2\sigma_k} \right)^{m-1} \frac{d(\sigma - \sigma_0)}{E} \tag{2.1}$$

Здесь σ_0, e_0 — значения напряжения и пластической деформации в момент реверса напряжения (фиг. 1): m — характеристика материала, принимаемая структурно-нечувствительной; σ_k — структурно-чувствительный параметр, аналогичный «мгновенному» пределу текучести.



Фиг. 1

Зависимость (2.1) выражает принцип Мазинга [3] с введением параметра σ_k для описания нестабильности петли пластического гистерезиса при циклическом нагружении. Придерживаясь принятых феноменологических положений, следует принять σ_k за новый структурный параметр и добавить соотношение

$$d\sigma_k = g_1 du + g_2 d\psi \tag{2.2}$$

В упрощенном варианте предположим интегрируемость (2.2) и существование конечного соотношения вида

$$\sigma_k = \sigma_k(u, \psi) \tag{2.3}$$

В терминах гипотезы (2.3) можно трактовать опытные данные по изменению петли пластического гистерезиса при циклическом деформировании [4] и описать различие в поведении циклически упрочняющихся, стабильных и разупрочняющихся материалов. По-видимому, наиболее типичным является такое изменение параметра σ_k в процессе циклического деформирования, при котором на первом этапе преобладает влияние наклепа и σ_k несколько возрастает, а затем с увеличением числа циклов σ_k начинает падать вследствие разупрочнения, мерой которого является степень поврежденности ψ.

Некоторые опыты свидетельствуют о существовании стадии стабилизации, которой соответствует постоянное или мало меняющееся значение σ_k. Зависимость (2.3) примем в виде

$$\sigma_k = \sigma_{k0}(1 - \psi) S(u) \tag{2.4}$$

Здесь $S(u)$ — функция упрочнения, отражающая влияние наклепа на предел текучести материала, σ_{k0} — постоянная материала.

Функцию h_1 (σ, u, ψ) выберем в виде

$$h_1 = c_1 \left(\frac{\sigma}{1-\psi}\right)^\gamma F_1(u) \qquad (2.5)$$

Здесь c_1, γ — постоянные материала.

Гипотеза (2.5) основана на трактовке ψ как степени ослабления сечения материала [5]. Функция F_1 (u) должна учитывать влияние наклепа на прочность материала.

Рассмотрим циклическое деформирование материала, основываясь на соотношениях (2.1), (2.4), (2.5). Изменение u и ψ за один цикл деформирования найдем из соотношений (1.11), (2.1), (1.12) и (2.5), учитывая, что в пределах цикла u и ψ меняются мало и их значения в правых частях (2.4), (2.5) можно принять постоянными. При этом получим

$$\frac{du}{dn} = \xi_1 \qquad \left(\xi_1 = \oint \sigma\, de\right) \qquad (2.6)$$

$$\frac{d\psi}{dn} = c_1 \frac{F_1(u)}{(1-\psi)^\gamma} \zeta_1 \qquad \left(\zeta_1 = \oint |\sigma|^\gamma \sigma\, de\right) \qquad (2.7)$$

Здесь интегрирование распространено на один цикл, n — число циклов.

Используя (2.1), из (2.6) и (2.7) получим для симметричного цикла

$$\xi_1 = \frac{I(m,0)}{E(2\sigma_k)^{m-1}} \Delta\sigma^{m+1}, \qquad \zeta_1 = \frac{I(m,\gamma)}{E(2\sigma_k)^{m-1}} \Delta\sigma^{\gamma+m+1} \qquad \left(I(m,\gamma) = \frac{m}{2^{\gamma+m}} \int\limits_{-1}^{+1} |x|^\gamma (1+x)^{m-1} x\,dx\right) \qquad (2.8)$$

Здесь $\Delta\sigma$ — перепад напряжения (фиг. 1). Из (2.6), (2.7) с учетом (2.8) получим (c_2 — постоянная материала)

$$d\psi / du = c_2 \Delta\sigma^\gamma F_1(u) / (1-\psi)^\gamma \qquad (2.9)$$

а) *Усталость при* $\Delta\sigma = \mathrm{const}$. Принимая для F_1 (u) степенную зависимость

$$F_1(u) = u^{-\delta} \qquad (\delta = \mathrm{const}) \qquad (2.10)$$

из (2.9) при $\Delta\sigma = \mathrm{const}$ (многоцикловая усталость) найдем

$$1 - (1-\psi)^{\gamma+1} = \frac{\gamma+1}{1-\delta} c_2 \Delta\sigma^\gamma u^{1-\delta} \qquad (2.11)$$

При разрушении $\psi = 1$, $u = U$, и из (2.11) имеем

$$\Delta\sigma = HU^{-(1-\delta)/\gamma} \qquad (2.12)$$

Здесь H — постоянная материала, U — значение параметра u в момент разрушения.

Если предположить, что существует стадия стабилизации петли, то можно принять $\sigma_k = \mathrm{const}$, и тогда из (2.6), первого выражения (2.8) и (2.12) получим

$$u \sim \Delta\sigma^{m+1} n, \quad U \sim \Delta\sigma^{m+1}, \quad N, U \sim N^\mu \qquad \left(\mu = \frac{\gamma}{\gamma + (m+1)(1-\delta)}\right) \qquad (2.13)$$

Символ $\sim$ означает пропорциональность, N — число циклов до разрушения.

Погрешность, связанная с допущением $\sigma_k = \mathrm{const}$, компенсируется тем, что функция F_1 (u), отражающая реальную нестабильность свойств материала, определяется из опытов на усталость.

Используя (2.12), (2.13), можно получить закон усталости в обычном виде (2.14)

$$N\Delta\sigma^b = K \qquad \left(b = m + 1 + \frac{\gamma}{1-\delta}\right)$$

Здесь K, b—постоянные, определяемые из опытов на усталость при $\Delta\sigma = \text{const}$.

Зависимость (2.9) может быть применена для расчета условий разрушения при переменной напряженности $\Delta\sigma$.

Рассмотрим ступенчатое нагружение, при котором материал испытывает n_1 циклов нагрузки при перепаде $\Delta\sigma_1$, $n_2 - n_1$ циклов при $\Delta\sigma_2$ и т. д.

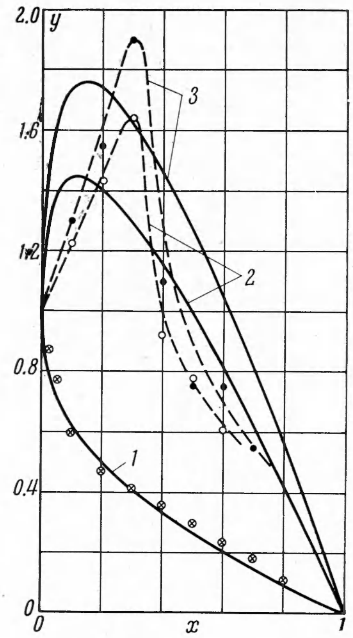
Интегрируя (2.9) и учитывая (2.12), получим условие разрушения при ступенчатом нагружении в виде

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{u_i^{1-\delta} - u_{i-1}^{1-\delta}}{U_i^{1-\delta}} = 1 \qquad (u_0 = 0) \qquad (2.15)$$

Здесь u_i — значение u в конце i-го интервала циклического деформирования.

Величина U_i связана с перепадом $\Delta\sigma_i$ зависимостью (2.12). При $\sigma_k = \text{const}$ из (2.6) следует

$$u_i - u_{i-1} \sim \Delta\sigma_i^{m+1}(n_i - n_{i-1}) \qquad (2.16)$$



Фиг. 2

Здесь n_i — число циклов нагружения, накопившихся к концу i-го интервала. Из (2.16), учитывая (2.12) и (2.13), можно получить

$$\frac{u_i}{U_i} = \frac{u_{i-1}}{U_{i-1}}\left(\frac{N_{i-1}}{N_i}\right)^{\mu} + \frac{n_i - n_{i-1}}{N_i}, \qquad \frac{u_{i-1}}{U_i} = \frac{u_{i-1}}{U_{i-1}}\left(\frac{N_{i-1}}{N_i}\right)^{\mu} \qquad (2.17)$$

позволяющие представить условие (2.15) в зависимости от n_i и N_i. Здесь N_i — число циклов до разрушения при постоянном перепаде $\Delta\sigma_i$.

Для одноступенчатого нагружения из (2.15) и (2.17) получим условия разрушения в виде (2.18)

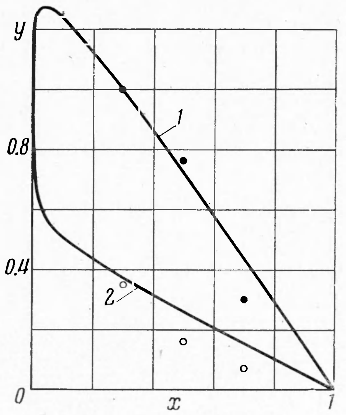
$$(1 - a^{\mu(1-\delta)})\, x^{1-\delta} + (y + a^{\mu}x)^{1-\delta} = 1 \qquad \left(x = \frac{n_1}{N_1}, \quad y = \frac{n_2 - n_1}{N_2}, \quad a = \frac{N_1}{N_2}\right)$$

При $\delta = 0$ получаем из (2.18) правило линейного суммирования повреждений: $x + y = 1$. Для значений $0 < \delta < 1$ зависимость (2.18) предсказывает увеличение долговечности на начальном участке при $a > 1$ (т. е. когда первым накладывается меньшее напряжение), что соответствует известному эффекту тренировки. При $a < 1$ (первым прикладывается большее напряжение) зависимость (2.18) предсказывает на начальных циклах резкое падение долговечности. Оба факта обнаруживаются в большинстве опытов при ступенчатом циклическом нагружении. Сопоставление экспериментальных данных [6] с зависимостью (2.18) приведено на фиг. 2.

Кривая *1* соответствует ступенчатому изменению амплитуды напряжений от $\sigma_1 = 24.3$ ($N_1 = 1.7 \cdot 10^5$) к $\sigma_2 = 19.8$ ($N_2 = 2.25 \cdot 10^6$), кривые *2* соответствуют $\sigma_1 = 19.8$ ($N_1 = 2.25 \cdot 10^6$); $\sigma_2 = 24.3$ ($N_2 = 1.7 \cdot 10^5$); кривые *3* — $\sigma_1 = 19.8$ ($N_1 = 2.25 \cdot 10^6$), $\sigma_2 = 26.5$ ($N_2 = 7 \cdot 10^4$). Напряжения выражены в *кгс/мм*^{2}.

Постоянная μ в (2.18) принята равной 0,5 (обоснование дано ниже). Постоянная $\delta = 0.593$ определена из условия соответствия зависимости (2.18) эксперименту при $a_1 = 0.0755$. Данные этого эксперимента отмечены на фиг. 2 крестиками.

Сплошные кривые *2* и *3* построены по (2.18) при $\delta = 0{,}593$, пунктирные кривые *2* и *3* — данные эксперимента при соответствующих значениях $a_2 = 13.24$ и $a_3 = 32.2$.



Фиг. 3

б) *Усталость при* $\Delta e = \text{const}$. Из (2.1) найдем соотношение между Δe и $\Delta\sigma$

$$\Delta e = \left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right)\frac{\Delta\sigma}{E(2\sigma_k)^{m-1}}$$

Используя последнее соотношение и (2.4), найдем решение уравнения (2.9) в виде

$$1 - (1 - \psi)^{1+\gamma/m} = c_3 \Delta e^{\gamma/m} \int_0^u F(z)\, dz \quad (2.19)$$

$$F(z) = F_1(z)\, S(z)^{\gamma(1-1/m)}$$

Здесь c_3 — постоянная материала.

При $\sigma_k = \text{const}$ и при допущении (2.10) решение (2.19) аналогично решению (2.11). Поэтому все производные зависимости по форме совпадают с зависимостями для случая $\Delta\sigma = \text{const}$. Закон разрушения при $\Delta e = \text{const}$ из (2.19) получим в виде формулы Коффина [7]

$$N\Delta e^k = C \qquad \left(k = \frac{m+1}{m} + \frac{\gamma}{m(1-\delta)}\right) \tag{2.20}$$

Здесь C, k — постоянные материала, определяемые из опыта на малоцикловую усталость. Во многих случаях по опытам $k \approx 2$.

Условие разрушения при ступенчатом изменении Δe выражается теми же формулами (2.15), (2.17) и (2.18), что и при ступенчатом изменении $\Delta\sigma$.

Из (2.13) и (2.20) следует, что между μ и k существует связь

$$\mu = (k-1)/k - 1/mk$$

Отсюда видно, что $\mu \approx 0.5$ во всех случаях, когда $k \approx 2$, так как $1 / mk$ — величина малая (0.02—0.05). В формулах (2.15), (2.18) остается одна неизвестная постоянная δ, которая должна быть определена из опыта, отличного от стационарного нагружения (например, из опыта при ступенчатом изменении Δe от одного уровня к другому).

На фиг. 3 приведено сопоставление формулы (2.18) при $\mu = 0{,}5$, $\delta = 0{,}9$ с экспериментальными данными на ступенчатое циклическое деформирование [8]. Кривая *1* на фиг. 3 соответствует значению $a_1 = 2.25$, кривая *2* — значению $a_2 = 0.231$. Постоянная δ определена из условия, чтобы кривая (2.18) прошла через одну из экспериментально найденных точек ($x = 0.3$, $y = 1$).

3. Ползучесть. В системе (1.11), (1.12) положим $R_2 \equiv 0$ и применим ее к определению условий разрушения вследствие ползучести при переменном напряжении.

Параметр v определим соотношением, несколько отличающимся от четвертого равенства в (1.11)

$$dv = \sigma^{\alpha+1} d\tau \tag{3.1}$$

где α — постоянная в законе установившейся ползучести

$$dp = D\sigma^\alpha d\tau$$

Приняв уравнение прочности в виде

$$d\psi = M\left(\frac{\sigma}{1-\psi}\right)^{\gamma'} F_2(v)\,dv \qquad (F_2(v) = v^{-\delta'})$$

получаем полную аналогию (формальную) уравнений прочности при усталости и ползучести. Поэтому условие разрушения, например, при ступенчатой ползучести с напряжениями σ_1, $\sigma_2 \ldots \sigma_s$, имеет вид, аналогичный (2.15)

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{v_i^{1-\delta'} - v_{i-1}^{1-\delta'}}{V_i^{1-\delta'}} = 1 \qquad (v_0 = 0)$$

где V_i — предельное значение параметра v, соответствующее разрушению при постоянном напряжении σ_i. При этом, подобно (2.12), имеется равенство

$$\sigma_i = B' V_i^{-(1-\delta')/\gamma'}$$

Из (3.1) следует, что при постоянном σ

$$v = \sigma^{\alpha+1}\tau, \qquad V = \sigma^{\alpha+1} T$$

где T — время до разрушения при напряжении σ, τ — время, в течение которого материал находился под напряжением σ. При ступенчатом нагружении вследствие указанной аналогии окончательные формулы, выражающие условия прочности через τ_i и T_i, аналогичны соответствующим формулам для случая усталости.

Для получения критериев разрушения при ползучести надо в формулах (2.15), (2.17) и (2.18) произвести следующую замену: u_i заменить на v, U_i — на V_i, n_i — на τ_i, N_i — на T_i, δ — на δ', μ — на μ'. При этом

$$\mu' = 1 - (\alpha + 1)/\beta$$

где β — постоянная в законе длительной прочности

$$T\sigma^{\beta} = B$$

Полученные критерии разрушения позволяют описать нелинейное накопление поврежденности, обнаруживаемое в ряде экспериментов (например, [9]).

Поступила 29 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Kröner E. Dislocations: a new concept in the continuum theory of plasticity. J. Math. Phys., 1963, vol. 42, No. 1.
2. Работнов Ю. Н. О разрушении вследствие ползучести. ПМТФ, 1963, № 2.
3. Mazing G. Zur Heyn'schen Theorie der Verfestigung der Metalle durch verborgen elastische Spannungen. Wiss. Veröff. Siemens-Konz., 1923—1924, B. III, H. 1.
4. Гусенков А. П., Шнейдерович Р. М. О свойствах кривых циклического деформирования в диапазоне мягкого и жесткого нагружения. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1961, № 2.
5. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 8.
6. Серенсен С. В. и др. Прочность при нестационарных режимах нагрузки. Изд. АН УССР, 1961.
7. Коффин Л. Ф. О термической усталости сталей. Сб. «Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях», Госэнергоиздат, 1960.
8. Соболев Н. Д. Термоусталость при переменной амплитуде деформации. Заводская лаборатория, 1966, № 8.
9. Бурдукский В. В., Одинг И. А. Процесс повреждаемости металлов при ползучести. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 5.