

УДК 519.676

Приближенное решение задачи прогнозирования для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа*

Т.А. Аверина^{1,2}, К.А. Рыбаков³

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

³Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993

E-mails: ata@osmf.sccc.ru (Аверина Т.А.), rkoffice@mail.ru (Рыбаков К.А.)

Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Приближенное решение задачи прогнозирования для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 1. — С. 1–13.

В статье развивается новый подход к решению задачи прогнозирования для нелинейных стохастических дифференциальных систем с пуассоновской составляющей в уравнении объекта наблюдения. В основе предлагаемого подхода лежит метод статистических испытаний, а именно моделирование специального случайного процесса с разрывами, обрывами и ветвлениями траекторий. При решении задачи прогнозирования применяются методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков.

DOI: 10.15372/SJNM20170101

Ключевые слова: апостериорная плотность вероятности, ветвящиеся процессы, метод статистических испытаний, оптимальная фильтрация, прогнозирование, стохастическая система, уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи, уравнение Колмогорова–Феллера.

Averina T.A., Rybakov K.A. An approximate solution of the prediction problem for stochastic jump-diffusion systems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 1. — P. 1–13.

In this paper we discuss the evolution of the new approach to the prediction problem for nonlinear stochastic differential systems with a Poisson component. The proposed approach is based on reducing the prediction problem to the analysis of stochastic jump-diffusion systems with terminating and branching paths. The solution of the prediction problem can be approximately found by using numerical methods for solving stochastic differential equations and methods for modeling inhomogeneous Poisson flows.

Keywords: branching processes, conditional density, Duncan–Mortensen–Zakai equation, Kolmogorov–Feller equation, Monte Carlo method, optimal filtering problem, prediction problem, stochastic jump-diffusion system.

1. Введение

Целью работы является развитие нового подхода к решению задачи прогнозирования в нелинейных стохастических дифференциальных системах с пуассоновской состав-

* Работа выполнена при поддержке грантов “Ведущие научные школы” НШ-5111.2014.1 и РФФИ (проекты № 13-08-00323-а и № 14-01-00787-а).

ляющей, т. е. для систем диффузионно-скачкообразного типа, математические модели которых описаны в [1–3], на основе рассмотренных ранее алгоритмов оптимальной нелинейной фильтрации. Аналогичный подход был применен для стохастических дифференциальных систем без пуассоновской составляющей [4], т. е. для систем диффузионного типа.

В [5–7] было предложено решать задачу оптимальной нелинейной фильтрации как задачу анализа вспомогательной стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий. В основе перехода от задачи фильтрации к задаче анализа лежит интерпретация одного из слагаемых в уравнении Дункана–Мортенсена–Закаи как функции поглощения и восстановления траекторий случайного процесса. Напомним [1–3, 8], что решение этого уравнения — условная ненормированная плотность вероятности, характеризующая распределение вектора состояния объекта наблюдения при наличии косвенных измерений с начального и до текущего момента времени. В работе [9] описан метод решения задачи фильтрации в стохастических дифференциальных системах с пуассоновской составляющей в уравнении объекта наблюдения. В частности, было показано, что задача оптимальной нелинейной фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа может быть решена как задача анализа вспомогательной стохастической системы, траектории которой могут получать случайные приращения (иметь разрывы), разветвляться и обрываться в случайные моменты времени. Разрывы траекторий обусловлены исходной постановкой задачи и характеризуются заданными параметрами: интенсивностью и распределением величины скачков, а обрывы и ветвления должны моделироваться на основе текущих измерений оцениваемого вектора состояния. Интенсивности обрывов и ветвлений выражаются через функции, задающие модель измерительной системы, и текущие измерения.

Таким образом, на основе метода решения для задачи оценивания вектора состояния объекта наблюдения в текущий момент времени по результатам косвенных измерений с учетом случайных возмущений и помех предлагается новый метод решения задачи прогнозирования, т. е. задачи оценивания вектора состояния объекта наблюдения в будущий момент времени по результатам косвенных измерений, имеющихся к текущему моменту, для нелинейных стохастических дифференциальных систем с пуассоновской составляющей.

Решение задачи анализа вспомогательной стохастической системы с разрывами, обрывами и ветвлениями траекторий можно найти приближенно с помощью статистического моделирования, применяя методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков (разрывы, обрывы и ветвления образуют неоднородные пуассоновские потоки событий с известными интенсивностями). По результатам моделирования траекторий вспомогательной стохастической системы можно оценить апостериорную плотность вероятности при фиксированных измерениях и найти оптимальную оценку вектора состояния объекта наблюдения, используя различные критерии оптимальности оценивания.

Как и в [4], при использовании критерия минимума среднеквадратической ошибки оценка текущего состояния может быть получена в результате усреднения по ансамблю траекторий системы, отличающейся от исходного объекта наблюдения тем, что ее траектории обрываются и разветвляются в случайные моменты времени, распределение которых определяется результатами измерений оцениваемого вектора состояния. Прогноз состояния можно получить, если продолжить моделирование без обрывов и ветвлений траекторий (сохранив моделирование разрывов), используя сформированную к текущему моменту времени выборку состояний вспомогательной стохастической системы и

усредняя по полученному в результате ансамблю траекторий.

Апробация предлагаемого подхода проведена на примере моделирования и оценивания состояния для линейной системы наблюдения в сравнении с результатами, полученными с помощью фильтра и предиктора Калмана–Бьюси [3, 8].

2. Постановка задачи

Будем рассматривать модель объекта наблюдения, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ито с пуассоновской составляющей [10]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

в котором $X \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $t \in [t_0, T + \Delta(T)]$ — время; $f(t, x): [t_0, T + \Delta(T)] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — n -мерная вектор-функция, $\sigma(t, x): [t_0, T + \Delta(T)] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$ — матричная функция $n \times s$; $\Delta(t): [t_0, T] \rightarrow [0, +\infty)$ — величина опережения по времени, удовлетворяющая условию

$$\max_{t \in [t_0, T]} (t + \Delta(t)) = T + \Delta(T),$$

$W(t)$ — s -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния X_0 , заданного плотностью вероятности $\varphi_0(x)$, $Q(t)$ — общий пуассоновский процесс, заданный в форме

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k,$$

где $P(t)$ — пуассоновский процесс, Δ_k — независимые случайные векторы из \mathbb{R}^n , распределение которых задано плотностью вероятности $\psi(\tau_k, \Delta)$, т. е. вектор состояния X получает случайные приращения в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots \in [t_0, T + \Delta(T)]$, образующие пуассоновский поток событий:

$$X(\tau_k) = X(\tau_k - 0) + \Delta_k. \quad (2)$$

Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности $\psi(\tau_k, \Delta | x)$, характеризующая распределение Δ_k при условии $X(\tau_k - 0) = x$. В частном случае $\psi(\tau_k, \Delta | x) = \psi(\tau_k, \Delta)$. Наряду с $\psi(\tau_k, \Delta | x)$ введем плотность вероятности $\eta(\tau_k, x | \xi)$, характеризующую распределение $X(\tau_k)$ при условии $X(\tau_k - 0) = \xi$, т. е. $\Delta_k = X(\tau_k) - \xi$.

Пуассоновский поток событий и, следовательно, моменты времени τ_1, τ_2, \dots , а также пуассоновский процесс $P(t)$ определяются интенсивностью $\lambda(t) = \lambda(t, X(t))$, т. е. условная вероятность события (2) при $X(t) = x$ на промежутке $[t, t + \Delta t]$ задается равенством

$$\mathbb{P}(t, t + \Delta t) = \Pr(P(t + \Delta t) - P(t) = 1 | X(t) = x) = \lambda(t, x)\Delta t + o(\Delta t). \quad (3)$$

Пуассоновская составляющая $dQ(t)$ может быть записана в других формах [2, 3, 11, 12]. Варианты определений решения уравнений типа (1) и возможные условия на его коэффициенты, достаточные для существования решения, изложены в [11].

Модель измерительной системы может быть представлена в одной из следующих форм:

$$dY(t) = c(t, X(t))dt + \zeta(t)dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0, \quad (4)$$

или

$$Z(t) = c(t, X(t)) + \zeta(t)N(t), \quad (5)$$

где $Y, Z \in \mathbb{R}^m$ — векторы измерений, $t \in [t_0, T]$, $c(t, x): [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — m -мерная вектор-функция, $\zeta(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$ — матричная функция $m \times d$, для которой $\det(\zeta(t)\zeta^T(t)) \neq 0$, $V(t)$ — d -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $W(t)$ и от начального состояния X_0 , $N(t)$ — d -мерный стандартный гауссовский белый шум, не зависящий от X_0 .

Задача прогнозирования состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t + \Delta(t))$ по результатам измерений $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$.

Следуя [4], будем исходить из несмещенности оценки и минимума среднеквадратического отклонения. Тогда

$$\hat{X}(t + \Delta(t)) = \mathbb{M}[X(t + \Delta(t)) | Y_0^t] = \int_{\mathbb{R}^n} xp(t + \Delta(t), x | Y_0^t) dx,$$

где \mathbb{M} — знак математического ожидания, $p(t + \Delta(t), x | Y_0^t)$ — апостериорная плотность вероятности прогноза вектора состояния X .

Можно рассматривать следующие варианты задачи прогнозирования, например прогнозирование с фиксированным упреждением, т. е. $\Delta(t) = \Delta = \text{const}$, и прогнозирование в фиксированный момент времени $T' \geq T$, т. е. $\Delta(t) = T' - t$. При $\Delta(t) = 0$ задача нахождения оценки $\hat{X}(t)$ по результатам измерений Y_0^t — это задача фильтрации [1–3, 8, 9].

Отметим, кроме того, что задачу прогнозирования можно сформулировать и в терминах измерений $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$, в данном случае это не имеет особого значения, однако далее для удобства при записи необходимых соотношений для решения задачи прогнозирования будут использоваться как измерения $Y(t)$, так и $Z(t)$.

3. Уравнения для апостериорной плотности вероятности

Задачу прогнозирования будем решать в два этапа. На первом этапе определим апостериорную плотность вероятности $p(t, x | Y_0^t)$, используя уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи [1, 3]:

$$\frac{d_{\Theta} \varphi(t, x | Y_0^t)}{dt} = \mathcal{A} \varphi(t, x | Y_0^t) - \lambda(t, x) \varphi(t, x | Y_0^t) + \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(t, \xi) \eta(t, x | \xi) \varphi(t, \xi | Y_0^t) d\xi + \mu(t, x, Z(t)) \varphi(t, x | Y_0^t), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x),$$

в котором

$$\mathcal{A} \varphi(t, x | Y_0^t) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x) \varphi(t, x | Y_0^t)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x) \varphi(t, x | Y_0^t)],$$

$$g_{ij}(t, x) = \sum_{l=1}^s \sigma_{il}(t, x) \sigma_{jl}(t, x), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mu(t, x, z) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m c_k(t, x) q_{kr}(t) (z_r - \Theta c_r(t, x)),$$

$$q(t) = \omega^{-1}(t), \quad \omega_{kr}(t) = \sum_{l=1}^d \zeta_{kl}(t) \zeta_{rl}(t), \quad k, r = 1, 2, \dots, m.$$

При $\Theta = 0$ уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи следует понимать в смысле Ито, а при $\Theta = \frac{1}{2}$ — в смысле Стратоновича (далее будем понимать это уравнение именно в смысле Стратоновича, т. е. положим $\Theta = \frac{1}{2}$).

Зафиксируем измерения Y_0^t или Z_0^t и представим функцию $\mu(t, x, z)$ в виде

$$\mu(t, x, z) = -\mu^-(t, x, z) + \mu^+(t, x, z),$$

где

$$\mu^-(t, x, z) = \begin{cases} -\mu(t, x, z), & \mu(t, x, z) < 0, \\ 0, & \mu(t, x, z) \geq 0, \end{cases} \quad \mu^+(t, x, z) = \begin{cases} \mu(t, x, z), & \mu(t, x, z) > 0, \\ 0, & \mu(t, x, z) \leq 0. \end{cases}$$

Тогда [9]:

$$\frac{\partial \varphi(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) - \lambda(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t) + \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi)\varphi(t, \xi | Y_0^t)d\xi - \mu^-(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t) + \mu^+(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x). \quad (6)$$

Уравнение (6) решается на промежутке $[t_0, \theta]$, где $\theta \in [t_0, T]$ — некоторое текущее время. Затем его решение нормируется, результатом будет апостериорная плотность вероятности $p(t, x | Y_0^t)$ вектора состояния X :

$$p(t, x | Y_0^t) = \frac{\varphi(t, x | Y_0^t)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x | Y_0^t)dx}, \quad t \in [t_0, \theta]. \quad (7)$$

На втором этапе определяется апостериорная плотность вероятности $p(t, x | Y_0^\theta)$ как решение уравнения Колмогорова–Феллера:

$$\frac{\partial p(t, x | Y_0^\theta)}{\partial t} = \mathcal{A}p(t, x | Y_0^\theta) - \lambda(t, x)p(t, x | Y_0^\theta) + \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi)p(t, \xi | Y_0^\theta)d\xi \quad (8)$$

на промежутке $[\theta, \theta + \Delta(\theta)]$ с начальным условием $p(\theta, x | Y_0^\theta)$ — апостериорной плотностью вероятности вектора состояния, полученной на первом этапе.

Оба этапа можно объединить в один, а именно решать уравнение (6) на промежутке $[t_0, \theta + \Delta(\theta)]$ при дополнительном условии $\mu(t, x, z) = 0$, если $t > \theta$. В результате получим ненормированную апостериорную плотность вероятности $\varphi(t, x | Y_0^\theta)$ как функцию текущего времени $\theta \in [t_0, T]$ и будущего момента времени $\theta \leq t \leq \theta + \Delta(\theta)$, для которого оценивается вектор состояния объекта наблюдения. При переходе к апостериорной плотности вероятности $p(t, x | Y_0^\theta)$ нужна нормировка, аналогичная (7):

$$p(t, x | Y_0^\theta) = \frac{\varphi(t, x | Y_0^\theta)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x | Y_0^\theta)dx}, \quad t \in [\theta, \theta + \Delta(\theta)], \quad \theta \in [t_0, T].$$

Уравнения вида (6) и (8) называют обобщенными уравнениями Фоккера–Планка–Колмогорова [13]. Для уравнения (6) слагаемое $\mu^-(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t)$ — это функция поглощения, а $\mu^+(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t)$ — функция восстановления. Это означает, что можно рассматривать специальный случайный процесс $X(t)$, который характеризуется коэффициентами сноса $f(t, x)$ и диффузии $g(t, x)$, интенсивностью разрыва траекторий $\lambda(t, x)$ и распределением величины приращения вектора состояния при разрыве,

определяемой плотностями вероятности $\psi(t, \Delta | x)$ или $\eta(t, x | \xi)$, с дополнительными условиями: траектории $X(t)$ могут обрываться и обрывы образуют пуассоновский поток событий с интенсивностью $\mu^-(t) = \mu^-(t, X(t), Z(t))$, а могут появляться новые ветви, и ветвления также образуют пуассоновский поток событий с другой интенсивностью $\mu^+(t) = \mu^+(t, X(t), Z(t))$.

К этому можно добавить, что вероятность $\mathbb{P}^-(t, \Delta t)$ обрыва траектории и вероятность $\mathbb{P}^+(t, \Delta t)$ ветвления траектории на промежутке времени $[t, t + \Delta t]$ при $X(t) = x$ и $Z(t) = z$ удовлетворяют условию, аналогичному (3):

$$\mathbb{P}^-(t, \Delta t) = \mu^-(t, x, z)\Delta t + o(\Delta t), \quad \mathbb{P}^+(t, \Delta t) = \mu^+(t, x, z)\Delta t + o(\Delta t).$$

Обрывы и ветвления траекторий случайного процесса $X(t)$ могут быть только на промежутке $[t_0, \theta]$, а на промежутке $(\theta, \theta + \Delta(\theta)]$ поведение траекторий определяется заданными коэффициентами сноса и диффузии, а также параметрами разрыва траекторий. Таким образом, функция $\varphi(t, x | Y_0^\theta)$ характеризует распределение вектора X — состояния объекта наблюдения, описываемого уравнением (1), — с учетом того, что траектории случайного процесса $X(t)$ могут иметь разрывы, обрываться и разветвляться в случайные моменты времени. Распределением моментов времени появления обрывов и ветвлений управляет случайный процесс $Z(t)$. При $t = \theta$ функция $\varphi(t, x | Y_0^\theta)$ определяет распределение вектора состояния X с учетом всех имеющихся к текущему моменту времени косвенных измерений Y_0^θ , по этой функции можно найти оптимальную оценку текущего вектора состояния объекта наблюдения, т. е. решить задачу фильтрации [9]. При $t > \theta$ функция $\varphi(t, x | Y_0^\theta)$ задает распределение прогноза вектора состояния X с учетом имеющихся измерений к моменту времени θ , т. е. с опережением по времени на $(t - \theta)$, по этой функции можно найти прогноз для вектора состояния объекта наблюдения, т. е. решить задачу прогнозирования.

4. Приближенный метод прогнозирования

Как и в [4], для приближенного определения прогноза вектора состояния $\hat{X}(t + \Delta(t))$ можно модифицировать алгоритмы, предложенные в [5, 6] для решения задачи оптимальной фильтрации с помощью метода статистических испытаний (метода Монте-Карло). Алгоритмы прогнозирования основаны на моделировании траекторий специального случайного процесса $X(t)$ с учетом разрывов, обрывов и ветвлений при фиксированных измерениях Y_0^t или Z_0^t . При этом можно применять известные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков.

Например, можно использовать простой в реализации метод численного решения стохастических дифференциальных уравнений — стохастический метод Эйлера [8]:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k) \Delta W_k, \\ Y_{k+1} &= Y_k + hc(t_k, X_k) + \sqrt{h}\zeta(t_k) \Delta V_k, \quad Z_k = \frac{Y_{k+1} - Y_k}{h}, \\ t_k &= t_0 + hk, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где ΔW_k и ΔV_k — s -мерный и d -мерный случайные векторы соответственно, их координаты независимы и имеют стандартное нормальное распределение, h — шаг численного интегрирования. Приведенные формулы используются для моделирования “фрагментов”

траекторий на промежутках времени между двумя последовательными событиями типа разрыва, обрыва или ветвления траектории.

Для численного решения в случае жестких задач рекомендуется использовать асимптотически несмещенный метод, построенный в работе [14]. Этот метод не требует мелкого шага численного интегрирования и, кроме того, для систем с постоянным шумом имеет более высокий порядок сходимости в среднеквадратическом, чем стохастический метод Эйлера. Возможно применение и других методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений [15–17].

При моделировании моментов времени разрывов, обрывов и ветвлений траекторий используется метод “максимального сечения” [18–21]. Так, моделирование времени τ , через которое произойдет разрыв траектории, осуществляется по правилу

$$\tau = \theta_{N_1}, \quad N_1 = \min \left\{ \vartheta: \alpha_\vartheta \leq \frac{\lambda(t_* + \theta_\vartheta)}{\lambda^*} \right\}, \quad \theta_\vartheta = \sum_{i=1}^{\vartheta} \xi^i, \quad \lambda^*: \lambda(t) \leq \lambda^* = \text{const}, \quad (9)$$

где $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^\vartheta, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих показательное распределение с параметром λ^* : $\xi^i = -\ln \beta_i / \lambda^*$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\vartheta, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\vartheta, \dots$ — последовательности независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на интервале $(0, 1)$; $\lambda(t)$ — значение функции $\lambda(t, x)$ на вспомогательных траекториях процесса $X(t)$, т.е. $\lambda(t) = \lambda(t, X(t))$; t_* — начальный момент времени t_0 или момент времени последнего разрыва траектории. В момент разрыва траектории новое значение вектора состояния моделируется согласно плотности $\eta(t_* + \tau, x | X_{k+1})$ или моделируется величина скачка Δ_{k+1} согласно плотности $\psi(t_* + \tau, \Delta | X_{k+1})$.

Моделирование времени τ , через которое произойдет обрыв или ветвление траектории, осуществляется аналогично, при этом

$$\tau = \theta_{N_2}, \quad N_2 = \min \left\{ \vartheta: \alpha_\vartheta \leq \frac{|\mu(t_* + \theta_\vartheta)|}{\mu^*} \right\}, \quad \theta_\vartheta = \sum_{i=1}^{\vartheta} \xi^i, \quad \mu^*: |\mu(t)| \leq \mu^* = \text{const}, \quad (10)$$

где в дополнение к уже введенным обозначениям $\mu(t)$ — значение функции $\mu(t, x, z)$ на вспомогательных траекториях процесса $X(t)$ и траектории $Z(t)$, полученной в результате измерений на оцениваемой траектории, т.е. $\mu(t) = \mu(t, X(t), Z(t))$; t_* — начальный момент времени t_0 или момент времени последнего ветвления траектории. При условии $\mu(t_* + \tau) < 0$ происходит обрыв (моделирование такой траектории прекращается), а при $\mu(t_* + \tau) > 0$ — ветвление (далее моделируются две траектории, имеющие как минимум одну общую точку — точку ветвления).

Применяя более экономичный модифицированный метод “максимального сечения” [18–21], в соотношениях (9) и (10) можно положить

$$N_1 = \min \left\{ \vartheta: 1 - \alpha > \prod_{i=1}^{\vartheta} \left(1 - \frac{\lambda(t_* + \xi_i)}{\lambda^*} \right) \right\},$$

$$N_2 = \min \left\{ \vartheta: 1 - \alpha > \prod_{i=1}^{\vartheta} \left(1 - \frac{|\mu(t_* + \xi_i)|}{\mu^*} \right) \right\},$$

где α — равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ случайная величина.

Отметим, что сетка по времени $\{t_k\}$ должна быть суперпозицией равномерной сетки с шагом h , а также моментов разрывов, обрывов или ветвлений траекторий $X(t)$.

На основе результатов моделирования траекторий специального случайного процесса $X(t)$ с разрывами, обрывами и ветвлениями в каждый момент времени можно оценить функцию распределения и плотность вероятности, а также найти оценку вектора состояния как для текущего времени (фильтрация), так и для будущего (прогнозирование), например, усредняя по ансамблю траекторий с учетом того, что на этапе прогнозирования обрывы и ветвления не происходят.

Описанный подход может эффективно применяться при решении задач прогнозирования в частных случаях, а именно для систем диффузионного типа:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

т. е. в случае, если траектории случайного процесса $X(t)$ не имеют разрывов, и для систем скачкообразного типа:

$$dX(t) = dQ(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

когда $X(t)$ — случайный процесс с кусочно-постоянными траекториями (в приведенных уравнениях обозначения такие же, как и для уравнения (1)).

Погрешность оценивания вектора состояния объекта наблюдения (по сравнению с точным решением задачи прогнозирования) обусловлена применением приближенных методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений и нахождением статистической оценки для среднего значения по ансамблю траекторий. В работе [22] получены соотношения для параметров алгоритма (шага интегрирования h и объема моделируемых траекторий M), при которых достигается минимум трудоемкости статистического алгоритма для заданной точности вычислений. По аналогии с [22] можно показать, что для уравнивания численной и статистической погрешностей в предложенном алгоритме условно оптимальным является число испытаний $M = O(h^{2p})$, где p — порядок слабой сходимости используемого численного метода решения стохастических дифференциальных уравнений. Отметим, что используемый ниже стохастический метод Эйлера имеет первый порядок слабой сходимости.

В заключительной части рассмотрим пример моделирования и оценивания состояния для линейной системы наблюдения.

Пусть система наблюдения описывается уравнениями:

$$dX(t) = -5e^{-t} \sin 2tX(t)dt + dW(t) + dQ(t), \quad X(0) = X_0;$$

$$dY(t) = 0.5X(t)dt + 0.5dV(t), \quad Y(0) = 0,$$

где $t \in [0, 1]$, $X, Y \in \mathbb{R}$; $W(t)$ и $V(t)$ — одномерные стандартные винеровские процессы; случайная величина X_0 распределена согласно нормальному закону с математическим ожиданием 1 и дисперсией 0.0025; $W(t)$, $V(t)$ и X_0 независимы.

Величина скачка имеет нормальное распределение с математическим ожиданием -0.5 и дисперсией 0.04, интенсивность скачков $\lambda = 2$.

Далее на рис. 1 приведены результаты моделирования системы наблюдения, оценивания состояния по результатам измерений и прогнозирования стохастическим методом Эйлера с шагом $h = 0.01$: толстая линия — измеряемая траектория $X(t)$, пунктир — измерения $Y(t)$, тонкая линия — результат оценивания, полученный с помощью моделирования траекторий вспомогательного процесса с разрывами, обрывами и ветвлениями

(начальное число вспомогательных траекторий $M = 10000$), точки — результат оценивания, полученный с помощью фильтра и предиктора Калмана–Бьюси. Прогнозирование осуществляется для фиксированного момента времени $T' = 1$, т. е. $\Delta(t) = 1 - t$. Рис. 1а соответствует начальному моменту времени $\theta = t_0 = 0$ (только прогноз), рис. 1б — промежуточному моменту $\theta = 0.5$ (фильтрация и прогноз), а рис. 1в — конечному моменту $\theta = T' = 1$ (только фильтрация). На рис. 1г толстой линией показано количество траекторий вспомогательного процесса с разрывами, обрывами и ветвлениями, точками — число обрывов, тонкой линией — число ветвлений в зависимости от времени. В процессе моделирования объем выборки менялся в пределах от 9399 до 14431.

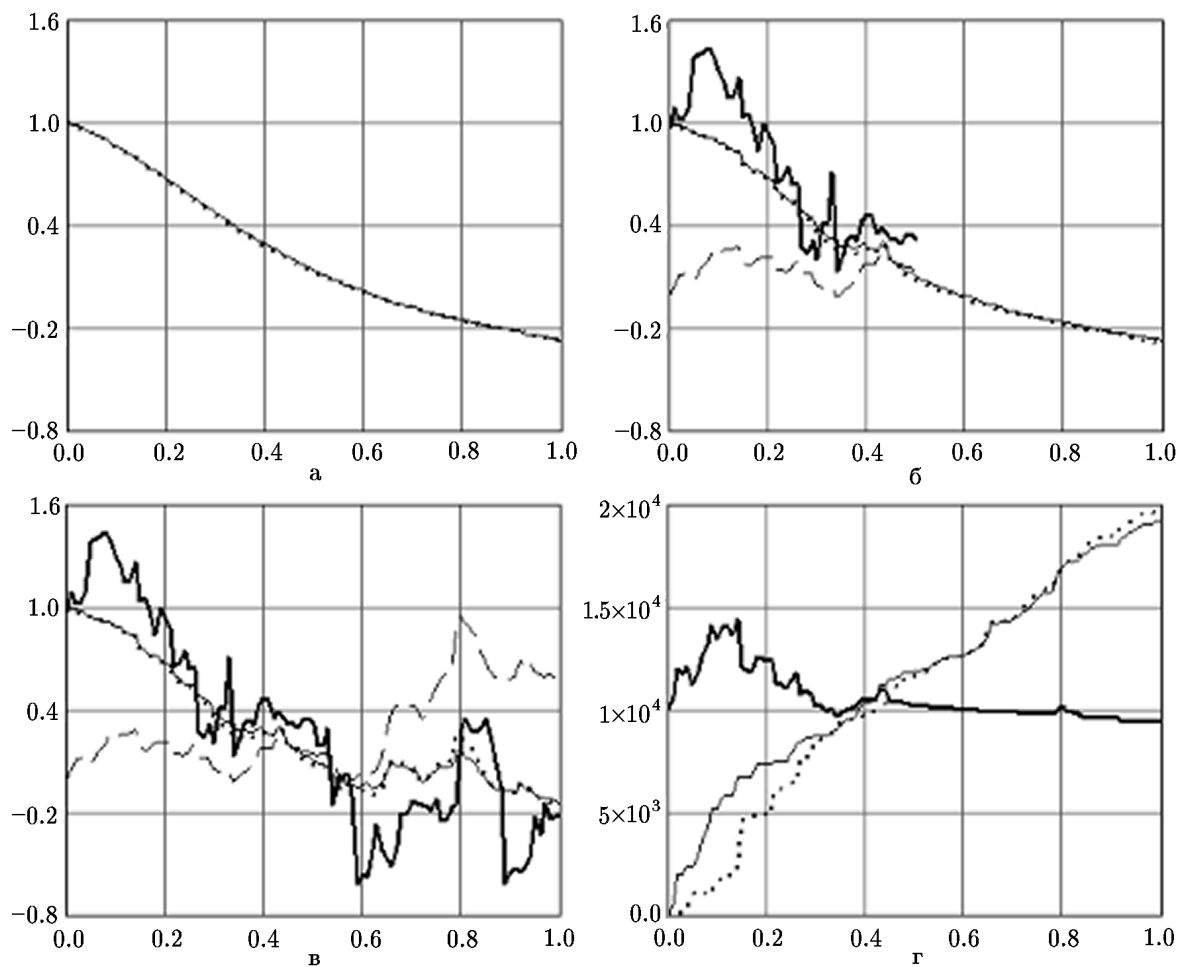


Рис. 1. Результаты моделирования системы наблюдения и оценивания (а; б; в — для моментов времени $\theta = 0; 0.5; 1$ соответственно; г — количество траекторий вспомогательного случайного процесса, число обрывов и ветвлений)

На рис. 2а и 2б показаны математическое ожидание и дисперсия ошибки оценивания состояния соответственно, полученные по результатам стократного моделирования системы наблюдения: тонкая линия — на основе моделирования траекторий вспомогательного процесса с разрывами, обрывами и ветвлениями (начальное число вспомогательных траекторий $M = 10000$), точки — на основе фильтра Калмана–Бьюси.

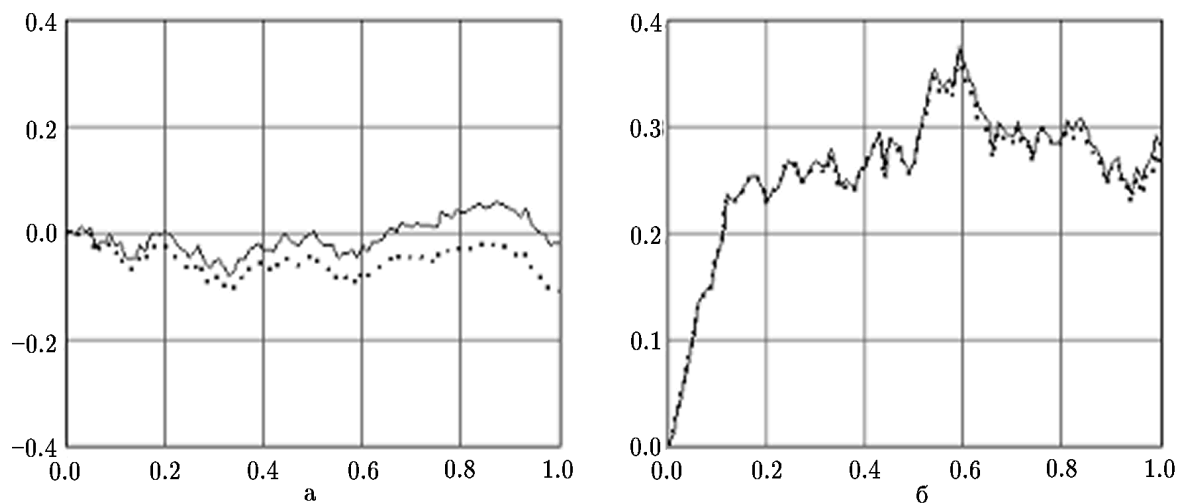


Рис. 2. Математическое ожидание (а) и дисперсия (б) ошибки оценивания состояния при стохастическом моделировании системы наблюдения

Выбор линейной модели системы наблюдения для апробации обусловлен возможностью сравнения результатов с оценкой, полученной с помощью фильтра и предиктора Калмана–Бьюси [3, 8]. Как видно по результатам, предлагаемый подход к решению задачи прогнозирования обеспечивает хорошее согласование с наиболее часто используемым в технических системах фильтром и предиктором. В то же время предлагаемый подход не ограничивается только линейными моделями, а может применяться для нелинейных моделей, в том числе и с негладкими коэффициентами в уравнениях объекта наблюдения или измерительной системы.

5. Заключение

В статье рассмотрена задача прогнозирования в нелинейных стохастических дифференциальных системах с пуассоновской составляющей, а именно задача оценивания вектора состояния объекта наблюдения в будущий момент времени по результатам косвенных измерений, имеющихся к текущему моменту. Составной частью этой задачи является задача фильтрации. Предложено решать задачи фильтрации и прогнозирования с помощью моделирования траекторий вспомогательной стохастической системы с разрывами, обрывами и ветвлениями. Разрывы траекторий обусловлены исходной постановкой задачи, т. е. наличием пуассоновской составляющей в уравнении модели объекта наблюдения, а обрывы и ветвления моделируются по результатам измерений оцениваемого вектора состояния.

При моделировании моментов времени разрыва, обрыва и ветвления используется метод “максимального сечения” [18–21], а при моделировании “фрагментов” траекторий между двумя последовательными моментами времени разрыва, обрыва или ветвления можно применять методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений, например стохастический метод Эйлера [8] или асимптотически несмещенный метод, построенный в работе [14]. Усреднение по ансамблю траекторий вспомогательной стохастической системы дает приближенное решение задачи прогнозирования по критерию минимума среднеквадратической ошибки, погрешность при оценивании вектора

состояния объекта наблюдения обусловлена применением приближенных методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений и зависит от выбора метода и его параметров (шага интегрирования и объема моделируемых траекторий).

Литература

1. **Параев Ю.И.** Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. — М.: Советское радио, 1976.
2. **Пугачев В.С., Сеницын И.Н.** Теория стохастических систем. — М.: Логос, 2004.
3. **Сеницын И.Н.** Фильтры Калмана и Пугачева. — М.: Логос, 2007.
4. **Рыбаков К.А.** Алгоритмы прогнозирования состояний в стохастических дифференциальных системах на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2015. — № 1. — С. 25–38.
5. **Рыбаков К.А.** Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2012. — № 3. — С. 91–110.
6. **Рыбаков К.А.** Модифицированный алгоритм оптимальной фильтрации сигналов на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Авиакосмическое приборостроение. — 2013. — № 3. — С. 15–20.
7. **Рыбаков К.А.** Приближенное решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации для стохастических дифференциальных систем методом статистических испытаний // Сиб. журн. вычисл. матем. / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 4. — С. 377–391.
8. **Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортакровский А.С.** Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. — М.: Вузовская книга, 2008.
9. **Рыбаков К.А.** Приближенный метод фильтрации сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа // Научный вестник МГТУ ГА. — 2014. — № 207. — С. 54–60.
10. **Аверина Т.А., Рыбаков К.А.** Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2013. — № 3. — С. 85–116.
11. **Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.** Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1985.
12. **Situ R.** Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications. — Springer, 2005.
13. **Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.** Анализ систем случайной структуры. — М.: Физматлит, 1993.
14. **Аверина Т.А.** Устойчивые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича // Вестник Бурятского государственного университета. — 2012. — № 9. — С. 91–94.
15. **Artemiev S.S., Averina T.A.** Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — Utrecht: VSP, 1997.
16. **Кузнецов Д.Ф.** Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. — СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2010.
17. **Kloeden P.E., Platen E.** Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Berlin: Springer, 1995.
18. **Аверина Т.А.** Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 1. — С. 16–23.

19. **Аверина Т.А., Михайлов Г.А.** Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 6. — С. 1005–1016.
20. **Михайлов Г.А., Аверина Т.А.** Алгоритм “максимального сечения” в методе Монте-Карло // Доклады АН. — 2009. — Т. 428, № 2. — С. 163–165.
21. **Михайлов Г.А., Рогазинский С.В.** Модифицированный метод “мажорантной частоты” для численного моделирования обобщенного экспоненциального распределения // Доклады АН. — 2012. — Т. 444, № 1. — С. 28–30.
22. **Аверина Т.А., Рыбаков К.А.** Два метода анализа стохастических мультиструктурных систем с распределенными переходами // Сиб. журн. вычисл. матем. / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2008. — Т. 11, № 1. — С. 1–18.

*Поступила в редакцию 8 июля 2015 г.,
в окончательном варианте 11 декабря 2015 г.*

Литература в транслитерации

1. **Paraev YU.I.** Vvedenie v statisticheskuyu dinamiku processov upravleniya i fil'tracii. — М.: Sovetskoe radio, 1976.
2. **Pugachev V.S., Sinicyn I.N.** Teoriya stokhasticheskikh sistem. — М.: Logos, 2004.
3. **Sinicyn I.N.** Fil'try Kalmana i Pugacheva. — М.: Logos, 2007.
4. **Rybakov K.A.** Algoritmy prognozirovaniya sostoyaniy v stokhasticheskikh differencial'nykh sistemakh na osnove modelirovaniya special'nogo vetvyashchegosya processa // Differencial'nye uravneniya i processy upravleniya. — 2015. — № 1. — С. 25–38.
5. **Rybakov K.A.** Svedenie zadachi nelineynoy fil'tracii k zadache analiza stokhasticheskikh sistem s obryvami i vetvleniyami traektoriy // Differencial'nye uravneniya i processy upravleniya. — 2012. — № 3. — С. 91–110.
6. **Rybakov K.A.** Modificirovannyy algoritm optimal'noy fil'tracii signalov na osnove modelirovaniya special'nogo vetvyashchegosya processa // Aviakosmicheskoe priborostroenie. — 2013. — № 3. — С. 15–20.
7. **Rybakov K.A.** Priblizhennoe reshenie zadachi optimal'noy nelineynoy fil'tracii dlya stokhasticheskikh differencial'nykh sistem metodom statisticheskikh ispytaniy // Sib. zhurn. vychisl. matem. / РАН. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2013. — Т. 16, № 4. — С. 377–391.
8. **Panteleev A.V., Rudenko E.A., Bortakovskiy A.S.** Nelineynye sistemy upravleniya: opisanie, analiz i sintez. — М.: Vuzovskaya kniga, 2008.
9. **Rybakov K.A.** Priblizhennyy metod fil'tracii signalov v stokhasticheskikh sistemakh diffuzionno-skachkoobraznogo tipa // Nauchnyy vestnik MGTU GA. — 2014. — № 207. — С. 54–60.
10. **Averina T.A., Rybakov K.A.** Dva metoda analiza stokhasticheskikh sistem s puassonovskoy sostavlyayushchey // Differencial'nye uravneniya i processy upravleniya. — 2013. — № 3. — С. 85–116.
11. **Korolyuk V.S., Portenko N.I., Skorokhod A.V., Turbin A.F.** Spravochnik po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike. — М.: Nauka, 1985.
12. **Situ R.** Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications. — Springer, 2005.
13. **Kazakov I.E., Artem'ev V.M., Bukhalev V.A.** Analiz sistem sluchaynoy struktury. — М.: Fizmatlit, 1993.

14. **Averina T.A.** Ustoychivye chislennyye metody resheniya stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy v smysle Stratonovicha // Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. — 2012. — № 9. — С. 91–94.
15. **Artemiev S.S., Averina T.A.** Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — Utrecht: VSP, 1997.
16. **Kuznecov D.F.** Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya: teoriya i praktika chislennogo resheniya. — SPb.: Izd-vo Politekhnicheskogo universiteta, 2010.
17. **Kloeden P.E., Platen E.** Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Berlin: Springer, 1995.
18. **Averina T.A.** Novye algoritmy statisticheskogo modelirovaniya neodnorodnykh puassonovskikh ansambley // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2010. — Т. 50, № 1. — С. 16–23.
19. **Averina T.A., Mikhaylov G.A.** Algoritmy tochnogo i priblizhennogo statisticheskogo modelirovaniya puassonovskikh ansambley // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2010. — Т. 50, № 6. — С. 1005–1016.
20. **Mikhaylov G.A., Averina T.A.** Algoritm “maksimal'nogo secheniya” v metode Monte-Karlo // Doklady AN. — 2009. — Т. 428, № 2. — С. 163–165.
21. **Mikhaylov G.A., Rogazinskiy S.V.** Modificirovannyy metod “mazhorantnoy chastoty” dlya chislennogo modelirovaniya obobshchennogo eksponentsial'nogo raspredeleniya // Doklady AN. — 2012. — Т. 444, № 1. — С. 28–30.
22. **Averina T.A., Rybakov K.A.** Dva metoda analiza stokhasticheskikh mul'tistrukturnykh sistem s raspredelennymi perekhodami // Sib. zhurn. vychisl. matem. / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2008. — Т. 11, № 1. — С. 1–18.

