

6. Коробко В. И., Коровкин В. П. Теплообмен в полуограниченных плоских ламинарных газовых струях. — Изв. АН БССР. Сер. физико-энерг., 1980, № 1.
7. Gorla R. S. R. Combined natural and forced convection in a laminar wall jet along a vertical plate with uniform surface heat flux. — Appl. Scient. Res., 1976, vol. 31, N 6.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.
10. Белоглазов Б. П., Гиневский А. С. Расчет ламинарных спутных струй с точным удовлетворением условия постоянства избыточного импульса. — Учен. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 4.

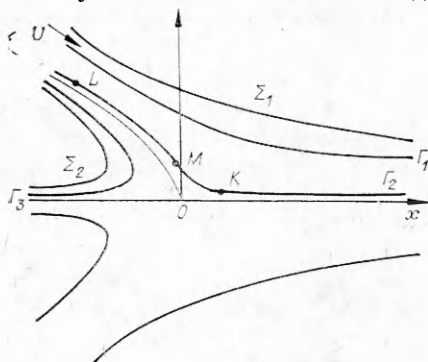
УДК 532.522+532.526

О СОУДАРИИ ПЛОСКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

М. В. Рубцов
(Новосибирск)

Для нахождения отличий реального течения при высокоскоростном соударении металлических пластин от известного [1, 2] невязкого течения в [3] рассмотрена задача о симметричном соударении плоских струй вязкой жидкости со свободной границей. Задача решается приближенно в предположении существования пограничного слоя поправок к невязкому течению вблизи свободных границ при достаточно большом числе Рейнольдса. Решение находится в первом приближении из упрощенного уравнения на поправку $w(\varphi, \psi)$ к скорости $u_0(\varphi, \psi)$ невязкого течения вдоль линии тока. Упрощенное уравнение получается из уравнений Навье — Стокса оценкой членов по порядку величин. Представляет интерес рассмотреть этим методом задачу о соударении струй, когда каждая из них состоит из нескольких слоев жидкости с разной вязкостью и одинаковой плотностью.

1. Пусть имеется стационарное движение несжимаемой вязкой жидкости в области, изображенной на фиг. 1. Две струи одинаковой толщины h движутся из бесконечности с одинаковой скоростью U под углом γ к оси симметрии.



Фиг. 1

Направим ось x декартовых координат (x, y) по оси симметрии и рассмотрим одну половину области течения. Набегающая струя состоит из N слоев одинаковой плотности ρ и различных вязкости μ_l и толщины δ_l , $l = 1, 2, \dots, N$, $\sum_{l=1}^N \delta_l = h$. Область течения ограничена осью x и двумя свободными границами Σ_1 и Σ_2 . В области течения находятся $N-1$ границ раздела жидкостей $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{N-1}$. Составляющие скорости вдоль x, y обозначим через u, v . Нормируя x, y на h, u , v на U , давление p на ρU^2 , запишем уравнения Навье — Стокса в виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + v_l \frac{\partial u_l}{\partial y} &= - \frac{\partial p_l}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_l} \Delta u_l, \\ u_l \frac{\partial v_l}{\partial x} + v_l \frac{\partial v_l}{\partial y} &= - \frac{\partial p_l}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}_l} \Delta v_l, \\ \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{\partial v_l}{\partial y} &= 0, \quad \text{Re}_l = \frac{\rho U h}{\mu_l}, \quad l = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Граничные условия на границах Σ_1, Σ_2 записаны в [3]:

$$(1.2) \quad \mathbf{V}|_{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

где \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы внешней нормали и касательной к границе Σ ; \mathbf{V} — вектор скорости; T — тензор напряжений

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i), \quad i, j = 1, 2, \\ x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad u_1 = u, \quad u_2 = v.$$

На линиях Γ_l граничные условия выбираются из условия непрерывности векторов скорости и напряжений

$$(1.3) \quad \mathbf{V}|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{V}_+|_{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{V}_-|_{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\tau}, \\ \mathbf{n} \cdot T_+|_{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \cdot T_-|_{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{n} \cdot T_+|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot T_-|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n}.$$

Задача состоит в нахождении функций u_l , v_l , p_l , удовлетворяющих условиям (1.1)—(1.3).

2. Предполагая, что функции u_l , v_l , p_l обладают достаточной гладкостью и при $\lim_l \text{Re}_l \rightarrow \infty$ искомое течение переходит в невязкое течение [1, 2], запишем уравнения (1.1) в ортогональных координатах (φ, ψ) , где φ , ψ есть действительная и мнимая части комплексного потенциала невязкого течения. Опуская индекс l , имеем

$$(2.1) \quad \frac{u}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{g}{H_2} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{g}{H_1 H_2} \left(u \frac{\partial H_1}{\partial \psi} - g \frac{\partial H_2}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \\ + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial u H_1}{\partial \psi} - \frac{\partial g H_2}{\partial \varphi} \right) \right\}, \\ \frac{u}{H_1} \frac{\partial g}{\partial \varphi} + \frac{g}{H_2} \frac{\partial g}{\partial \psi} + \frac{u}{H_1 H_2} \left(g \frac{\partial H_2}{\partial \varphi} - u \frac{\partial H_1}{\partial \psi} \right) = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial \psi} + \\ + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial g H_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial u H_1}{\partial \psi} \right) \right\}, \quad \frac{\partial u H_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial g H_1}{\partial \psi} = 0.$$

Через u , g в (2.1) обозначены составляющие скорости вдоль осей φ , ψ , а H_1 , H_2 есть коэффициенты Ламэ. Если обозначить через u_0 скорость невязкого течения вдоль линии тока, то $H_1 = H_2 = 1/u_0$.

В [3] упрощенные уравнения движения были получены оценкой членов по порядку величин. В данной работе рассмотрим асимптотическое разложение решения по степеням ε , воспользовавшись малостью параметра $\varepsilon^2 = 1/\text{Re}$ при достаточно больших Re [4—6]. Ограничимся двучленным внутренним и внешним разложениями. Для внешнего разложения имеем

$$(2.2) \quad u^0 = u_0 + \varepsilon u^1, \quad g^0 = g_0 + \varepsilon g^1, \quad p^0 = p_0 + \varepsilon p^1,$$

где нулевое приближение u_0 , $g_0 \equiv 0$, p_0 — известное невязкое потенциальное течение. Подставляя (2.2) в (2.1) и приравнявая члены при одинаковых ε , получаем уравнения для первого приближения внешнего разложения

$$u_1 \partial u_0 / \partial \varphi + u_0 \partial u^1 / \partial \varphi = -\partial p^1 / \partial \varphi, \\ u_0 \frac{\partial g^1}{\partial \varphi} + 2u^1 \frac{\partial u_0}{\partial \psi} - g^1 \frac{\partial u_0}{\partial \psi} = -\frac{\partial p^1}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial u^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial g^1}{\partial \psi} = 0,$$

откуда следует

$$(2.3) \quad \frac{\partial u^1 / u_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial g^1 / u_0}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial u^1 / u_0}{\partial \varphi} + \frac{\partial g^1 / u_0}{\partial \psi} = 0, \quad u_0 u^1 + p^1 = 0,$$

т. е. $(u^1 - i g^1) / u_0$ — аналитическая функция. Третье равенство в (2.3) получается из условия плоскопараллельности течения при $\varphi \rightarrow -\infty$ и $p^1(-\infty, \psi) = 0$, $u^1(-\infty, \psi) = 0$.

Из срачивания нулевых (одночленных) приближений внешнего и внутреннего разложений следует $u_i = u_0$, $g_i = 0$, $p_i = p_0$ [5]. Рассмотр-

рим двучленное внутреннее разложение

$$u_i = u_0 + \varepsilon \tilde{w}, \quad g_i = \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2, \quad p_i = p_0 + \varepsilon p_1.$$

Записывая уравнение несжимаемости во внутренних переменных $(\varphi, \tilde{\psi})$, имеем

$$\frac{\partial g_1/u_0}{\partial \tilde{\psi}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{w}/u_0}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_2/u_0}{\partial \tilde{\psi}} = 0,$$

откуда $g_1/u_0 = a(\varphi)$. Поскольку функция g_1/u_0 постоянна внутри пограничного слоя при $\varphi = \text{const}$, сращивая внешнее разложение g^1 с внутренним разложением g_1 на внешней границе погранслоя, получим

$$(2.4) \quad g^1(\varphi, \psi = \psi_0)/u_0(\varphi, \psi = \psi_0) = a(\varphi).$$

Из (2.4) следует, что гармоническая функция g^1/u_0 непрерывна при переходе из одного слоя жидкости в соседний через прямолинейный пограничный слой в переменных (φ, ψ) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, функцию g^1/u_0 можно аналитически продолжить через внутренние погранслои на всю область течения [7]. При аналитическом продолжении в каждом слое жидкости гармоническая функция u^1/u_0 определяется с точностью до постоянной, однако из условия $u^1(\varphi, \psi) \rightarrow 0$, $g^1(\varphi, \psi) \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow -\infty$ следует, что эта постоянная равна нулю.

Записывая уравнения движения во внутренних переменных, в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно получить

$$(2.5) \quad \frac{\partial \tilde{w}u_0}{\partial \varphi} = -\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} \left\{ u_0^2 \frac{\partial \tilde{w}/u_0}{\partial \tilde{\psi}} \right\}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \tilde{\psi}} = 0.$$

При выводе (2.5) было учтено, что $\partial u_0/\partial \tilde{\psi} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из третьего граничного условия (1.2), записанного во внутренних переменных, имеем

$$\left[p_0 + \varepsilon p_1 + 2\varepsilon^3 \left(u_0 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi} - g_1 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{\psi}} \right) \right] \Big|_{\Sigma} = 0$$

или

$$(2.6) \quad p_1|_{\Sigma} = -2\varepsilon^2 \left(u_0 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi} - g_1 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{\psi}} \right) \Big|_{\Sigma}$$

и в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ $p_1|_{\Sigma} = 0$. Так как $p_1(\varphi, \tilde{\psi}) \equiv 0$ в погранслое на свободной границе, то, сращивая внешнее разложение давления $p_0 + \varepsilon p_1$ с внутренним разложением $p_0 + \varepsilon \cdot 0$, согласно (2.6), получаем

$$(2.7) \quad p^1|_{\Sigma} = 0.$$

Кроме того, на внешней границе погранслоя имеем из (2.3)

$$(2.8) \quad u_0 u^1|_{\Sigma} + p^1|_{\Sigma} = 0.$$

Сравнивая (2.7) и (2.8), видим, что

$$(2.9) \quad u^1|_{\Sigma} = 0.$$

По принципу максимума для гармонической функции $u^1(\varphi, \psi)/u_0(\varphi, \psi)$, определенной во всей области течения, имеем с учетом (2.9)

$$(2.10) \quad u^1(\varphi, \psi) \equiv 0.$$

Для функции $g^1(\varphi, \psi)/u_0(\varphi, \psi)$, сопряженной $\nabla_{\Sigma}^2 u^1/u_0$, справедливо

$$g^1(\varphi, \psi)/u_0(\varphi, \psi) \equiv \text{const},$$

а из условия $g^1(\varphi, \psi) \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow -\infty$ имеем $g^1(\varphi, \psi) \equiv 0$.

Используя третье уравнение (2.3) и (2.10), можно видеть, что на внешних границах внутренних погранслоев $p^1(\varphi) = 0$, а сращивание внешнего и внутреннего разложений давления дает $p_1(\varphi, \tilde{\psi}) \equiv 0$. Тогда первое

уравнение (2.5) запишется в виде

$$(2.11) \quad \frac{\partial \tilde{w} u_\varepsilon}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} \left(u_0^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\psi}} \right) = \frac{\partial^2 \tilde{w} u_\varepsilon}{\partial \tilde{\psi}^2}.$$

Таким образом, коэффициенты при первых степенях ε в асимптотическом разложении решения оказываются равными нулю, за исключением \tilde{w} во внутреннем разложении. Равномерно-пригодным приближением первого порядка по ε будет

$$u = u_0(\varphi, \psi) + \varepsilon \tilde{w}(\varphi, \tilde{\psi}), \quad g(\varphi, \psi) \equiv 0, \quad p(\varphi, \psi) = p_0(\varphi, \psi).$$

Возвращаясь к внешним переменным, уравнение (2.11) можно записать в виде

$$(2.12) \quad \frac{\partial w u_0}{\partial \varphi} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w u_0}{\partial \psi^2} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 w u_0}{\partial \psi^2}, \quad w = \varepsilon \tilde{w}.$$

На свободной границе $\partial u_0 / \partial \varphi = 0$ и (2.11) принимает вид

$$\partial \tilde{w} / \partial \varphi = \partial^2 \tilde{w} / \partial \tilde{\psi}^2,$$

а в переменных (φ, ψ) уравнение (2.11) имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2},$$

полученный в [3] оценкой членов в уравнениях Навье — Стокса по порядку величин. Запись уравнения движения в форме (2.12) удобна также тем, что она позволяет учесть взаимное влияние соседних пограничных слоев, так как во внешних переменных расстояние между погранслоями конечно.

Граничными условиями для (2.12) являются

$$(2.13) \quad \left. \left(\frac{\partial u_0^2}{\partial \tilde{\psi}} + \frac{\partial u_0 w}{\partial \tilde{\psi}} \right) \right|_{\Sigma} = 0, \quad w_+ |_{\Gamma} = w_- |_{\Gamma},$$

$$\frac{1}{\text{Re}_+} \left. \left(\frac{\partial u_0^2}{\partial \tilde{\psi}} + \frac{\partial u_0 w_+}{\partial \tilde{\psi}} \right) \right|_{\Gamma} = \frac{1}{\text{Re}_-} \left. \left(\frac{\partial u_0^2}{\partial \tilde{\psi}} + \frac{\partial u_0 w_-}{\partial \tilde{\psi}} \right) \right|_{\Gamma}.$$

Индексами $+$ или $-$ в (2.13) помечены величины справа или слева от границы раздела Γ . Используя уравнение (2.12) и граничные условия (2.13), можно найти приближенное решение поставленной задачи, которое может быть найдено, например, численным счетом.

Особенностью данной задачи является то, что погранслои захватывают весь поток вниз по течению при любом $\varepsilon \neq 0$. Установившаяся поправка w к скорости потока, хотя и оказывается порядка ε^2 , тем не менее вызвана расширением погранслоев с поправкой w порядка ε . Следующие члены внутреннего разложения внесут относительную поправку порядка ε в вычисленное значение \tilde{w} . Представляется правомерным не учитывать поправку порядка ε^2 во внешнем разложении, так как погранслои захватывают весь поток вниз по течению.

3. Для вычисления установившейся скорости расходящихся струй проинтегрируем первое уравнение (2.12) по φ от $-\infty$ до $+\infty$, по ψ от линии тока $\psi = 0$ до свободной границы. Получим

$$\int_0^{\Sigma} w_{+\infty} u_0 d\psi - \int_0^{\Sigma} w_{-\infty} u_0 d\psi = - \frac{1}{\text{Re}_k} \int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{\partial u_0 w_k}{\partial \tilde{\psi}} \right|_{\psi=0} d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}_k} \int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{\partial u_0 w_k}{\partial \tilde{\psi}} \right|_{\Gamma_k} d\varphi - \frac{1}{\text{Re}_{k+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{\partial u_0 w_{k+1}}{\partial \tilde{\psi}} \right|_{\Gamma_k} d\varphi + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{\operatorname{Re}_{N-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_0 w_{N-1}}{\partial \psi} \Big|_{\Gamma_{N-1}} d\varphi - \frac{1}{\operatorname{Re}_N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_0 w_N}{\partial \psi} \Big|_{\Gamma_{N-1}} d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{Re}_N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_0 w_N}{\partial \psi} \Big|_{\Sigma} d\varphi, \quad \Gamma_k - \text{ближайшая к } \psi = 0 \text{ граница раздела.}$$

Член $\int_0^{\Sigma} w_{-\infty} u_0 d\psi = 0$, так как $w_{-\infty} = 0$ по условию задачи, $u_0 \rightarrow 1$ при $\varphi \rightarrow +\infty$, поэтому $\int_0^{\Sigma} w_{+\infty} u_0 d\psi = \int_0^{\Sigma} w_{+\infty} d\psi = w_{+\infty} \Delta\psi$, где $\Delta\psi$ — толщина струи от линии $\psi = 0$ до свободной границы. Используя граничные условия (2.13), полученное равенство можно переписать следующим образом:

$$(3.1) \quad w_{+\infty} \Delta\psi = -\frac{1}{\operatorname{Re}_k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_0 w_k}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0} d\varphi +$$

$$+ \sum_{l=k}^{N-1} \left(\frac{1}{\operatorname{Re}_{l+1}} - \frac{1}{\operatorname{Re}_l} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_0^2}{\partial \psi} \Big|_{\Gamma_l} d\varphi - \frac{1}{\operatorname{Re}_N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_0^2}{\partial \psi} \Big|_{\Sigma} d\varphi.$$

Рассмотрим выражение $\int \frac{\partial u_0^2}{\partial \psi} d\varphi$. Производную $\partial u_0^2 / \partial \psi$ можно записать как $2u_0^2 \partial \ln u_0 / \partial \psi$. Для аналитической функции Жуковского $\ln u_0 - i\theta$ (θ — аргумент комплексной скорости) справедливы условия Коши — Римана

$$\partial \ln u_0 / \partial \varphi = -\partial \theta / \partial \psi, \quad \partial \ln u_0 / \partial \psi = \partial \theta / \partial \varphi,$$

откуда

$$(3.2) \quad \partial u_0^2 / \partial \psi = 2u_0^2 \partial \theta / \partial \varphi.$$

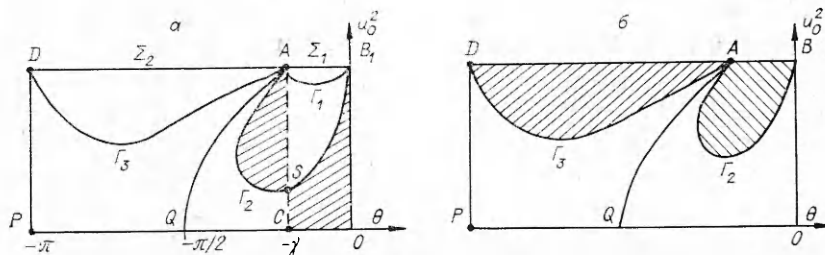
Будем считать, что число Рейнольдса Re_k слоя, содержащего критическую точку, настолько велико, что производная

$$\left| \frac{\partial u_0 w_k}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0, \varphi < 0} \ll \left| \frac{\partial u_0 w_k}{\partial \psi} \Big|_{\Gamma_k, \varphi < 0},$$

Γ_k — граница раздела слоя, содержащего критическую точку. При $\varphi > 0$ $\partial u_0 w / \partial \psi \Big|_{\psi=0} = 0$ в силу симметрии течения. Тогда первым членом в правой части (3.1) можно пренебречь. С учетом (3.2) запишем (3.1) в виде

$$\frac{w_{+\infty} \Delta\psi}{2} = \sum_{l=k}^{N-1} \left(\frac{1}{\operatorname{Re}_{l+1}} - \frac{1}{\operatorname{Re}_l} \right) \int_{\psi=\Gamma_l} u_0^2 d\theta - \frac{1}{\operatorname{Re}_N} \int_{\psi=\Sigma} d\theta.$$

В плоскости (u_0^2, θ) область течения имеет вид прямоугольника $OBDP$ (фиг. 2, а). Свободные границы Σ_1, Σ_2 лежат на стороне BD . Точка A соответствует бесконечности в набегающей струе, точки B и D — бесконеч-



Фиг. 2

ности в толстой и тонкой расходящихся струях. Границам $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ соответствуют линии $A\Gamma_1B, A\Gamma_2SB$ и $A\Gamma_3D$. Линии AQ, PD, OB соответствуют линии $\psi = 0$, а OP — критической точке. Для толстой струи характерно, что при $\psi < \cos \gamma/2$ кривая $u_0^2(\psi, \theta)|_{\psi=\text{const}}$ имеет участок двузначности $A\Gamma_2S$. Значение интеграла $\int u_0^2 d\theta$ для толстой струи при $\psi > \cos \gamma/2$ и для тонкой струи равно площади криволинейных четырехугольников $A\Gamma_1BOC$ и $A\Gamma_3DPC$. Для толстой струи при $\psi < \cos \gamma/2$ $\int u_0^2 d\theta$ равен разности заштрихованных площадей $BSCO$ и $A\Gamma_2S$. Резу-

C/ψ_Σ	Угол соударения		
	45°	60°	75°
0,0025	-0,506	-0,450	-0,387
0,005	-0,442	-0,406	-0,353
0,010	-0,347	-0,335	-0,298
0,015	-0,276	-0,278	-0,253
0,020	-0,220	-0,231	-0,213
0,025	-0,174	-0,190	-0,178
0,030	-0,136	-0,155	-0,147
0,035	-0,103	-0,123	-0,119
0,040	-0,074	-0,095	-0,093
0,045	-0,048	-0,069	-0,069
0,05	-0,026	-0,046	-0,047
0,10	0,112	0,109	0,112
0,20	0,222	0,253	0,279
0,40	0,303	0,375	0,436
0,60	0,342	0,437	0,524
0,80	0,369	0,482	0,592
1,00	0,393	0,524	0,654

льтаты численного расчета интеграла $\int_{\psi=C} u_0^2 d\theta$ для толстой струи приведены в таблице. Через ψ_Σ обозначено значение ψ на свободной границе.

В частном случае двухслойной струи имеем

$$(3.3) \quad \frac{w_{+\infty} \Delta \Psi}{2} = \left(\frac{1}{\text{Re}_2} - \frac{1}{\text{Re}_1} \right) \int_{\psi=\Gamma} u_0^2 d\theta - \frac{1}{\text{Re}_2} \int_{\psi=\Sigma} d\theta.$$

Если двухслойной оказывается тонкая струя и $\text{Re}_1, \text{Re}_2 \neq \infty$, то $\frac{w_{+\infty} \Delta \Psi}{2} = -\frac{(1 - \cos \gamma) w_{+\infty}}{4}$, а $\int_{\psi=\Sigma} d\theta = -(\pi - \gamma)$, откуда

$$w_{+\infty} = -\frac{4}{(1 - \cos \gamma)} \left[\frac{\pi - \gamma}{\text{Re}_2} + \left(\frac{1}{\text{Re}_2} - \frac{1}{\text{Re}_1} \right) \int_{\psi=\Gamma} u_0^2 d\theta \right].$$

Аналогично для толстой струи

$$w_{+\infty} = \frac{4}{(1 + \cos \gamma)} \left[-\frac{\gamma}{\text{Re}_2} + \left(\frac{1}{\text{Re}_2} - \frac{1}{\text{Re}_1} \right) \int_{\psi=\Gamma} u_0^2 d\theta \right].$$

При $\text{Re}_1 \gg \text{Re}_2$ (более вязкий внешний слой) в толстой струе

$$(3.4) \quad w_{+\infty} = -\frac{4}{\text{Re}_2 (1 + \cos \gamma)} \left[\gamma - \int_{\psi=\Gamma} u_0^2 d\theta \right],$$

т. е. значение $w_{+\infty}$ определяется площадью криволинейных сегментов, ограниченных свободными границами и границами раздела в плоскости (u_0^2, θ) (см. фиг. 2, б). Если внутренний слой невязкий ($\text{Re}_1 = \infty$), то $w_{+\infty}$ в этом слое следует положить равной нулю. Тогда $w_{+\infty} \Delta \Psi = w_{+\infty} \delta$ (δ — толщина вязкого слоя),

$$(3.5) \quad w_{+\infty} = -\frac{2}{\delta \text{Re}_2} \left[\gamma - \int_{\psi=\Gamma} u_0^2 d\theta \right],$$

что отличается от (3.4).

Данный факт объясняется следующим соображением. При $\text{Re}_1 \gg \text{Re}_2$ можно указать два характерных расстояния φ_1 и φ_2 от критической точки вдоль φ . На расстоянии φ_1 $w(\varphi_1)$ близко к выражению (3.5) в вязком слое δ и близко к нулю во внутреннем слое. На расстоянии φ_2 поправка $w(\varphi_2)$ выравнивается по сечению расходящейся струи и близка к выражению (3.4). При $\text{Re}_1 \rightarrow \infty$ φ_1 и φ_2 неограниченно возрастают. Поэтому если следить за расстоянием φ_1 , то при $\varphi_1 \rightarrow \infty$ получим случай (3.5), если следить за расстоянием φ_2 , получим случай (3.4).

При $Re_2 \gg Re_1$ (более вязкий внутренний слой) в толстой струе

$$(3.6) \quad w_{+\infty} = - \frac{4}{Re_1(1 + \cos \gamma)} \int_{\psi=\Gamma} u_0^2 d\theta.$$

Интересной особенностью формулы (3.6) является то, что при Γ , близких к Σ , $\int_{\psi=\Gamma} u_0^2 d\theta$ положителен, но при $\psi < \psi_*$, где ψ_* определяется только углом соударения γ , интеграл $\int_{\psi=\Gamma} u_0^2 d\theta$ меняет знак и поправка w к скорости u_0 становится положительной, т. е. скорость толстой струи после соударения возрастает. Этот результат интересен тем, что в вязкой жидкости диссипация энергии вследствие внутреннего трения обычно вызывает уменьшение массовой скорости. В данном случае происходит перестройка течения таким образом, что скорость толстой струи оказывается больше по сравнению с невязким течением, в котором диссипации энергии нет. Механически увеличение установившейся скорости во внутреннем слое можно объяснить тем, что на достаточно близких к $\psi = 0$ линиях Γ выпуклый участок LM (см. фиг. 1), где поправка w возрастает, много больше вогнутого участка MK , где w убывает, поэтому общее приращение w оказывается положительным.

Определим приращения потоков массы M , импульса J и кинетической энергии E , уносимых толстой двухслойной струей, в сравнении с невязким случаем. Пусть k_1 и k_2 — толщины, w_1 и w_2 — установившиеся поправки к скорости расходящихся струй. Запишем законы сохранения массы и импульса вдоль оси x :

$$k_1 U(1 + w_1) + k_2 U(1 + w_2) = 2hU, \quad k_2 U^2(1 + w_2)^2 - k_1 U^2(1 + w_1)^2 = 2hU^2 \cos \gamma.$$

Исключая k_1 , получим

$$k_2 = h(1 + \cos \gamma + w_1(1 - \cos \gamma)/2 - 3(1 + \cos \gamma)w_2/2).$$

Из (3.3) следует, что всегда $w_1 < 0$. При $w_2 > 0$ $k_2 < k_2^0 = h(1 + \cos \gamma)$, где k_2^0 — толщина невязкой толстой струи. Выражения для M , J и E записываются в виде

$$(3.7) \quad M = k_2 U(1 + w_2) = hU \left(1 + \cos \gamma + \frac{w_1(1 - \cos \gamma)}{2} - \frac{w_2(1 + \cos \gamma)}{2} \right) < M_0,$$

$$J = k_2 U^2(1 + w_2)^2 = hU^2 \left(1 + \cos \gamma + \frac{w_1(1 - \cos \gamma)}{2} + \frac{w_2(1 + \cos \gamma)}{2} \right) < J_0,$$

$$E = \frac{k_2 U^3}{2}(1 + w_2)^3 = \frac{hU^3}{2} \left(1 + \cos \gamma + \frac{w_1(1 - \cos \gamma)}{2} + \frac{3w_2(1 + \cos \gamma)}{2} \right).$$

Индексом 0 помечены соответствующие характеристики невязкой толстой струи. Неравенство $M < M_0$ очевидно. Рассмотрим неравенство $J < J_0$.

Сумму поправок $w_1(1 - \cos \gamma)/2 + w_2(1 + \cos \gamma)/2$ можно записать как

$$s_1 + s_2 = \frac{w_1(1 - \cos \gamma)}{2} + \frac{w_2(1 + \cos \gamma)}{2} = \frac{2}{Re} \left(\int_{A\Gamma_3D} u_0^2 d\theta - \int_{A\Gamma_2B} u_0^2 d\theta \right).$$

Разность интегралов $\int_{A\Gamma_3D} u_0^2 d\theta$ и $\int_{A\Gamma_2B} u_0^2 d\theta$ равна незаштрихованной площади на фиг. 2, б, взятой со знаком —, поэтому $s_1 + s_2 < 0$ и $J < J_0$.

Приращение потока кинетической энергии определяется суммой

$$s_1 + 3s_2 = \frac{2}{Re} \left(\int_{A\Gamma_3D} u_0^2 d\theta - \int_{A\Gamma_2B} u_0^2 d\theta - 2 \int_{A\Gamma_2B} u_0^2 d\theta \right),$$

откуда видно, что возможны случаи течения (толстая и тонкая струи должны быть двухслойными с достаточно тонким внутренним вязким слоем), при которых поток кинетической энергии E , уносимый толстой струей, будет больше соответствующего потока в невязком случае. В самом деле, незаштрихованная площадь на фиг. 2, б при приближении Γ_2, Γ_3 к $\psi = 0$ неограниченно уменьшается, а $\int_{A\Gamma_2B} u_0^2 d\theta$ приближается к площади криволинейного треугольника AQC (см. фиг. 2, а), т. е. стремится к конечной величине. Запишем выражения потоков массы m , импульса j и энергии e , уносимых тонкой струей:

$$(3.8) \quad m = k_1 U (1 + w_1) = hU \left[1 - \cos \gamma + \frac{w_2 (1 + \cos \gamma)}{2} - \frac{w_1 (1 - \cos \gamma)}{2} \right],$$

$$j = k_1 U^2 (1 + w_1)^2 = hU^2 \left[1 - \cos \gamma + \frac{w_2 (1 + \cos \gamma)}{2} + \frac{w_1 (1 - \cos \gamma)}{2} \right],$$

$$e = \frac{k_1 U^3}{2} (1 + w_1)^3 = \frac{hU^3}{2} \left[1 - \cos \gamma + \frac{w_2 (1 + \cos \gamma)}{2} + \frac{3w_1 (1 - \cos \gamma)}{2} \right].$$

Сравнивая выражения (3.7) и (3.8), можно видеть, что $m > m_0$, $j < j_0$, $e < e_0$, где m_0, j_0, e_0 — характеристики тонкой струи в невязком случае. Сложение E из (3.7) и e из (3.8) приводит к

$$E + e = E_0 + e_0 + hU^3 [w_2 (1 + \cos \gamma) + w_1 (1 - \cos \gamma)] =$$

$$= hU^3 [1 + 2(s_1 + s_2)],$$

откуда

$$E + e < E_0 + e_0,$$

т. е. полная кинетическая энергия, уносимая обеими расходящимися струями, меньше приносимой набегающими струями энергии на величину, пропорциональную незаштрихованной площади на фиг. 2, б.

Автор выражает благодарность В. М. Меньщккову за ценные замечания при обсуждении работы.

Поступила 26 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. Кумулятивный заряд и принцип его работы. — УМН, 1957, т. 12, вып. 4(76).
2. Birkhoff G., McDougall D., Pugh E., Taylor G. Explosives with lined cavities. — J. Appl. Phys., 1948, vol. 19, p. 563.
3. Рубцов М. В. О пограничном слое при соударении плоских струй с малой вязкостью. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 51. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1981.
4. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. — УМН, 1957, т. 12, № 5(77).
5. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
6. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.