

ния при длине волны $\lambda = 0,35$ мкм показали, что соответствующая граничная интенсивность излучения уменьшается по сравнению с $\lambda = 1,06$ мкм до $\sim 10^9$ Вт/см².

ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов С. И., Прохоров А. М., Фортгов В. Е. Применение мощных лазеров для исследования вещества при сверхвысоких давлениях // УФН.— 1984.— Т. 142, вып. 3.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1986.
3. Уилкинс М. Л. Расчет упруго пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1967.
4. Делоне Н. Б. Взаимодействие лазерного излучения с веществом.— М.: Наука, 1989.
5. Зигель Р., Витковски С., Баумхаккер Х. и др. Обзор исследований по лазерной плазме, выполненных в Институте физики плазмы им. М. Планка в Гарчинге // Квант. электроника.— 1972.— № 2(8).
6. Анисимов С. И., Имас Я. А., Романов Г. С., Ходыко Ю. В. Действие излучения большой мощности на металлы.— М.: Наука, 1970.
7. Найт Ч. Дж. Теоретическое моделирование быстрого поверхностного испарения при наличии противодействия // РТК.— 1979.— Т. 17, № 5.
8. Броуд Г. Л. Динамика газа с излучением: общий численный метод // Действие ядерного взрыва.— М.: Мир, 1971.
9. Динс Дж., Уолш Дж. Теория удара: некоторые общие принципы и метод расчета в эйлеровых координатах // Высокоскоростные ударные явления.— М.: Мир, 1973.
10. Калиткин И. И., Кузьмина Л. В. Таблицы квантово-статистического уравнения состояния одиннадцати элементов.— М.: ИПМ АН СССР, 1975.
11. Рябин В. А., Остроумов М. А., Свит Т. Ф. Термодинамические свойства веществ.— Л.: Химия, 1977.
12. Bloembergen N., Patel C. K. N., Avizonis P. et al. American Physical Society study: science and technology of directed energy weapons. Pt 2 // Rev. Modern Physics.— 1987.— V. 59, N 3.
13. Бергельсон В. И., Немчинов И. В. Параметры плазмы, образующейся под действием микросекундных импульсов излучения лазеров на алюминиевую преграду в вакууме // Квант. электроника.— 1978.— Т. 5, № 10.
14. Кузнецов И. М. Термодинамические функции и ударные адиабаты воздуха при высоких температурах.— М.: Машиностроение, 1965.
15. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред.— М.: Наука, 1984.
16. Немес Дж. А., Ранда П. У. Явления, сопровождающие тепловыделение в частично прозрачных твердых телах // Аэрокосмическая техника.— 1990.— № 1.
17. Забабахин Е. И. Явления неограниченной кумуляции // Механика в СССР за 50 лет.— М.: Наука, 1970.— Т. 2.

г. Сергеев Посад

Поступила 18/X 1990 г.,
в окончательном варианте — 4/IV 1991 г.

УДК 533.6.011

С. А. Щербаков

О ФОРМИРОВАНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ МЕСТНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЗОНЫ

Вблизи точки f формирования на звуковой линии (ЗЛ) ударной волны (УВ), которая ограничивает местную сверхзвуковую зону (МСЗ), получено автомодельное решение уравнения плоского потенциального течения. Согласно этому решению, на границе МСЗ существует УВ переменной интенсивности, причем в точку f приходит характеристика, на которой непрерывны производные газодинамических параметров по координатам. Интенсивность УВ от точки f нарастает с бесконечной производной, поэтому для построения решения анализируются асимптотические соотношения на УВ. Показатель автомодельности изменяется в диапазо-

© С. А. Щербаков, 1993

не $0,3975 \leq k \leq 0,4166$, причем минимальной погрешности, которую внесит учет квадратичных членов, соответствует $k = 0,4017$.

1. Проблеме волновой структуры МСЗ посвящен ряд работ [1—8]. В [1] доказаны теоремы существования непрерывного решения при трансзвуковом обтекании плоских тел, а также отмечено, что, согласно заключительной теореме, в случае перехода от непрерывного течения к разрывному УВ возникает на границе, а не внутри МСЗ. В [2] разработан математический аппарат теории разрывных решений в трансзвуковом приближении. В переменных годографа скорости исследуются автомодельные решения уравнения Трикоми, и приведен пример решения с замыкающим МСЗ и перпендикулярным ЗЛ прямым скачком уплотнения. Такое решение оказалось нерегулярным внутри МСЗ, поскольку линии тока здесь имеют петлю, и поэтому физически ошибочно. Уточнение этого решения исключением нерегулярности с помощью скачка разрежения [3] остается все же дискуссионным, так как асимптотически такой скачок не согласуется с принципом возрастания энтропии.

Имеются публикации различных утверждений, которые иногда взаимоисключают друг друга. Так, предположение о несуществовании рассмотренной ниже структуры трансзвукового течения сделано в [4] со ссылкой на неопубликованные результаты. Однако подобная структура — продолжение скачком уплотнения звуковой линии — вычислена в [5] на основе построения интегральной кривой в классе автомодельных решений уравнения Кармана. Это решение в свою очередь нуждается в дополнительном анализе (см. [6], с. 642)*.

Автомодельные решения в рассматриваемом ниже интервале для показателя автомодельности анализировались в [7, 8]. Однако, из-за того что не удалось удовлетворить уравнению ударной поляры на УВ, эти решения были признаны физически нереальными. Основное отличие от [7, 8] в приводимых ниже результатах заключается в ином предствлении граничных условий для автомодельного решения с УВ, интенсивность которой нарастает от точки формирования с бесконечной производной.

2. Приведем основные уравнения и формулы трансзвукового приближения теории годографа. Уравнение Чаплыгина для функции тока $\psi(V, \theta)$ (V, θ — модуль и угол наклона вектора скорости) вблизи ЗЛ преобразуется в уравнение Трикоми:

$$(2.1) \quad \psi_{\eta\eta} - \eta\psi_{\tau\tau} = 0, \quad \eta = (V - 1)/V, \quad \tau = (\kappa + 1)^{-1/2}\theta.$$

Здесь и ниже для рассматриваемого совершенного газа κ — показатель адиабаты Пуассона; газодинамические величины приведены к безразмерному виду так, что за единицу масштаба скорости и плотности приняты критические значения V_* и ρ_* , а давления $p = \rho_* V_*^2$. Независимую переменную τ отсчитываем от ее значения на линии тока в точке f .

В трансзвуковом приближении имеем формулы преобразования из плоскости годографа скорости в физическую плоскость x, y :

$$(2.2) \quad dx = \psi_{\tau\eta}d\eta + \psi_{\eta}d\tau, \quad dy = d\psi.$$

В (2.2) абсцисса x разделена на $(\kappa + 1)^{1/2}$ и сохранены только те слагаемые, которые в выражении для якобиана преобразования дают

$$\Delta = \eta\psi_{\eta}^2 - \psi_{\tau}^2.$$

Уравнение (2.1) имеет автомодельное решение $\psi = |\tau|^{2k}F(\xi)$ ($F(\xi)$ — общая (состоящая из двух линейно независимых частных решений) гипергеометрическая функция, $\xi = 1 - (4\eta^3)/(9\tau^2)$ — автомодельная переменная, k — показатель автомодельности). В переменных τ, ξ для Δ и x из (2.2) имеем

$$(2.3) \quad \Delta = (1 - \xi)^{1/3} \{ [kF + (1 - \xi)F']^2 - (1 - \xi)F'^2 \} |\tau|^{4(k-1/3)};$$

* В [6] со ссылкой на [5] неправильно указан интервал $3/4 < k < 11/12$, поскольку в [5] приведен результат для $k = 2/5$.

$$(2.4) \quad x = \frac{\text{sign } \tau}{6k+1} [18(1-\xi)]^{2/3} (kF - \xi F') \left(\frac{y}{F}\right)^n, \quad n = \frac{1+6k}{6k}.$$

С помощью формул (2.4) в плоскость x, y отображается линия $\xi = \text{const}$, причем n — показатель автомодельности решения уравнений

$$(2.5) \quad \eta \eta_x = \tau_y, \quad \eta_y = \tau_x,$$

которые следуют непосредственно из (2.2). Поскольку в рассматриваемом классе решений УВ совпадает в физической плоскости с линией $\xi = \text{const}$, то вдоль ее образующей, учитывая второе равенство (2.2), получим

$$(2.6) \quad \tau \sim \psi^{4/3k} \sim y^{1/2k}, \quad \eta \sim \tau^{2/3} \sim \psi^{1/3k} \sim y^{1/3k},$$

откуда вытекает, что в точке формирования УВ производная модуля скорости вдоль ее образующей равна бесконечности при $k > 1/3$ и нулю при $k < 1/3$. Если $k < 1/2$, то также равна нулю производная угла наклона τ . Обозначим u и v проекции вектора скорости соответственно на ось x и y . На УВ с уравнением $x = x_0 y^n$, $x_0 = \text{const}$, согласно (2.6), находим соотношения

$$(2.7) \quad u = 1 + c_u y^{2m}, \quad p = \kappa^{-1} + c_p y^{2m}, \quad \rho = 1 + c_\rho y^{2m}, \quad v = c_v y^{3m},$$

где $m = n - 1$ и предполагается, что константы c_u, c_p, c_ρ, c_v различны по обе стороны скачка. Вычисляя с помощью (2.7) поток массы G и компоненты потока импульса P_x, P_y с точностью до членов $\sim y^{4m}$ по сравнению с единицей имеем

$$G = y + \frac{c_\rho + c_u}{2m+1} y^{2m+1} + \frac{c_\rho c_u - n x_0 c_v}{4m+1} y^{4m+1},$$

$$P_x = \frac{\kappa+1}{\kappa} y + \frac{c_p + 2c_u + c_\rho}{2m+1} y^{2m+1} + \frac{c_u^2 + 2c_u c_\rho - n x_0 c_v}{4m+1} y^{4m+1},$$

$$P_y = \frac{x_0}{\kappa} y^{m+1} + \frac{n x_0 c_p - c_v}{3m+1} y^{3m+1} + \frac{c_u + c_\rho}{5m+1} c_v y^{5m+1}.$$

Раскладывая полную энтальпию H и энтропийную функцию $S = pr^{-\kappa}$ также в ряд по степеням y , получаем

$$2H = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} + 2 \left(c_u + \frac{\kappa c_p - c_\rho}{\kappa-1} \right) y^{2m} + \left(c_u^2 + 2c_\rho \frac{c_\rho - \kappa c_p}{\kappa-1} \right) y^{4m},$$

$$S = \kappa^{-1} + (c_p - c_\rho) y^{2m} - \left(\kappa c_\rho c_p - \frac{\kappa+1}{2} c_\rho^2 \right) y^{4m}.$$

Это показывает, что в приведенных выше асимптотических при $y \rightarrow 0$ разложениях основными являются члены $\sim y^{2m}$, поскольку члены $\sim y^{4m}$ вносят «паразитный» эффект несохранения полной энтальпии и возникновения завихренности.

Таким образом, из равенства потоков массы, импульса и энергии имеем три условия на УВ:

$$[c_\rho + c_u] = 0, \quad [c_p + 2c_u + c_\rho] = 0, \quad [n x_0 c_p - c_v] = 0.$$

Здесь квадратные скобки означают разность заключенной в них функции или выражения слева и справа от разрыва. Отсюда следует, что в потенциальном течении до УВ $c_p = c_\rho = -c_u$. Из первых двух полученных равенств на УВ имеем, что и за ней выполняются аналогичные равенства, т. е. завихренность течения не проявляется вблизи точки f . Поэтому наряду с равенствами $[x] = 0$ и $[\psi] = 0$ или $[y] = 0$ при построении решения надо удовлетворить только третьему из выписанных соотношений, которое означает равенство касательной компоненты скорости на УВ:

$$(2.8) \quad [\tau] + [\eta] x' = 0.$$

Эти граничные условия на УВ получены лишь в предположении существования автомодельного решения (2.7) с точностью до основных членов $\sim y^{2m}$, причем обеспечены равенства всех потоков.

Если проинтегрировать уравнения (2.5) по области, содержащей УВ, то из второго уравнения вытекает также (2.8), а из первого

$$(2.9) \quad [\eta^2] + 2[\tau]x' = 0.$$

Входящие в это равенство слагаемые имеют порядок $\sim y^{4m}$, как это непосредственно следует, например, из сравнения с третьим слагаемым в выражении G , которое отличается от (2.9) лишь коэффициентом 2 перед $\tau x'$. Исключая x' из (2.9) с помощью (2.8), получаем уравнение ударной поляры в трансзвуковом приближении (здесь и ниже индексами 1 и 2 отмечаем параметры до и после скачка):

$$(2.10) \quad 2(\tau_2 - \tau_1)^2 = (\eta_1 + \eta_2)(\eta_1 - \eta_2)^2.$$

В [4, 7, 8] предполагалось, что при построении решения необходимо точно удовлетворить равенству (2.10), и поскольку это не удалось, то утверждалось, что на ЗЛ не может возникнуть УВ, если в точку ее зарождения не приходит слабый разрыв (характеристика, на которой разрывны производные от u, v, p, ρ по координатам). Однако зарождение УВ внутри МСЗ противоречит отмеченной выше теореме [1]. Из физических соображений ясно, что рассматриваемая УВ возникает на пересечении воли сжатия, которые попадают на замыкающий участок границы МСЗ. Известно лишь одно решение [9], которое описывает пересечение волн сжатия с формированием УВ внутри сверхзвукового потока и которое, так же как и предлагаемое ниже, обладает бесконечной производной интенсивности УВ в точке ее зарождения. В таких решениях не удается одновременно удовлетворить всем перечисленным выше условиям на УВ, включая (2.10). Лишь в решениях [6, 10] эти условия полностью выполнены, так как УВ в первом приближении вырождается в характеристику, т. е. имела равную нулю производную интенсивности. Газодинамические параметры на такой УВ в первом приближении непрерывны.

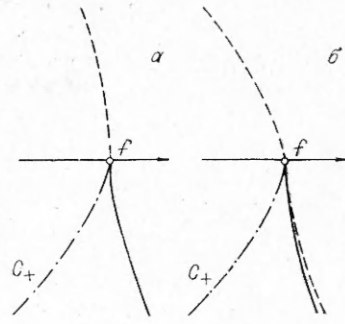
Проведенный выше анализ показывает, что условие (2.10) может быть получено только с привлечением членов $\sim y^{4m}$, точный баланс которых в автоматическом приближении (2.7) не обеспечен. Поэтому точное выполнение (2.10) на невырождающейся в характеристику УВ переменной интенсивности строго не аргументировано вблизи точки ее формирования. Здесь надо оценивать построенные решения по наименьшей погрешности, которую вносит учет членов $\sim y^{4m}$. Такая оценка была проведена в [8], однако с неправомерным отказом от условия $[x] = 0$ в пользу (2.10).

3. Предполагаемая структура решения в физической плоскости окрестности точки f (начала координат) показана на рис. 1. Рис. 2 соответствует плоскости годографа. Здесь линии, выходящие из начала координат, суть $\xi = \text{const}$ (константа приведена рядом с линией). На положительной оси η переменная $\xi = -\infty$, на отрицательной $\xi = +\infty$, а на оси τ , с которой совпадает ЗЛ, $\xi = 1$. Уравнение характеристики $\xi = 0$. В зоне $-1 \leq \xi \leq 1, \tau \geq 0$ гипергеометрическую функцию-решение представим в виде суммы двух линейно независимых частных решений уравнения (2.1):

$$F(\xi) = c_1 F_1(\xi) + c_2 \xi^{2k+1/6} F_2(\xi),$$

$$F_1 = F(-k, 1/2 - k; 5/6 - 2k; \xi), \quad F_2 = F(k + 1/6, k + 2/3; 2k + 7/6; \xi).$$

Входящие в это выражение функции F_1 и F_2 существуют лишь при $|\xi| \leq 1$ и при условии, что не равны целому отрицательному числу выражения $5/6 - 2k$ или $7/6 + 2k$. Множитель перед F_2 вносит особенность на характеристике $\xi = 0$, если $2k + 1/6$ не равно целому положительному числу. Однако при таких k не существует F_1 и, если $c_1 = 0$, то не должно



Р и с. 1

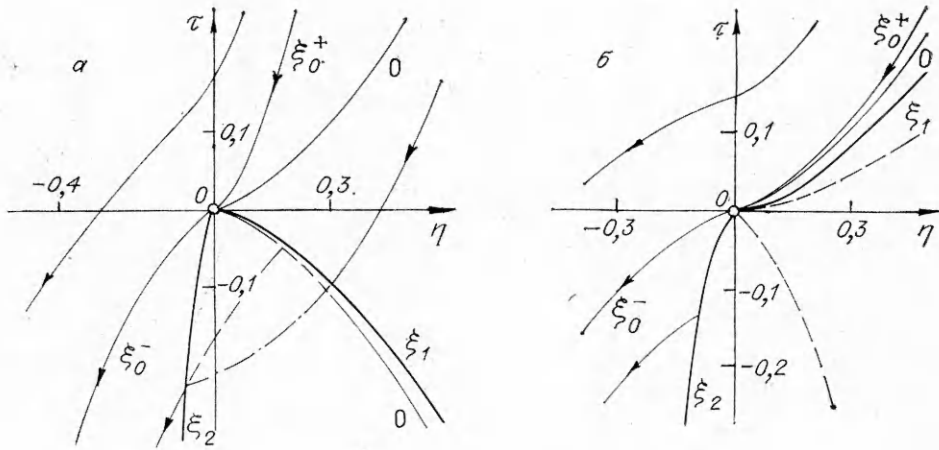


Рис. 2

быть $\psi(0, \tau) = 0$. Использование вместо F_1 в этом случае другого частного решения с логарифмической особенностью также не согласуется с отмеченным выше условием непрерывности производных от ψ на C_+ -характеристике (рис. 1). Поэтому приравняв $c_2 = 0$, $c_1 = -1$, имеем решение, в котором показатель автомодельности k пока не определен:

$$(3.1) \quad \psi = -\tau^{2k} F_1(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad \tau \geq 0,$$

$$\psi_\tau = -2 [kF_1 + (1 - \xi) F_1'] \tau^{2k-1}, \quad \psi_\eta = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} (1 - \xi)^{2/3} F_1' \tau^{2k-2/3}.$$

Уравнение «нулевой» линии тока, проходящей через начало координат, $\psi(\tau, \xi_0) = 0$ или $F_1(\xi_0) = 0$. Так как $F_1(0) = 1$, то, для того чтобы при $\tau > 0$ эта линия находилась между ЗЛ и характеристикой, как это видно из сопоставления рис. 1 и 2, необходимо выполнить неравенство (Γ — гамма-функция)

$$F_1(1) = \frac{\Gamma(5/6 - 2k) \Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6 - k) \Gamma(1/3 - k)} < 0.$$

Отсюда следует область допустимых значений для показателя автомодельности $5/12 > k - i/2 > 1/3$ ($i = 0, 1, \dots$). Ограничение снизу в этом неравенстве получено из условия конечности ψ_η при $\tau \rightarrow 0$, так как в противном случае решение (3.1) имело бы нефизическую особенность в точке f .

Используя формулы аналитического продолжения гипергеометрической функции [6], в сверхзвуковой области течения при $-\infty \leq \xi \leq -1$ и $-1 \leq \xi \leq 0$ для $\tau \leq 0$ соответственно получим

$$(3.2) \quad \psi = -|\tau|^{2k} |\xi|^k [A_1 F_3(\xi^{-1}) + B_1 \text{sign}(\tau) |\xi|^{-1/2} F_4(\xi^{-1})],$$

$$F_3 = F(-k, 1/6 + k; 1/2; \xi^{-1}), \quad F_4 = F(1/2 - k, 2/3 + k; 3/2; \xi^{-1}),$$

$$A_1 = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(5/6 - 2k)}{\Gamma(1/2 - k) \Gamma(5/6 - k)}, \quad B_1 = -\frac{2\pi^{1/2} \Gamma(5/6 - 2k)}{\Gamma(-k) \Gamma(1/3 - k)};$$

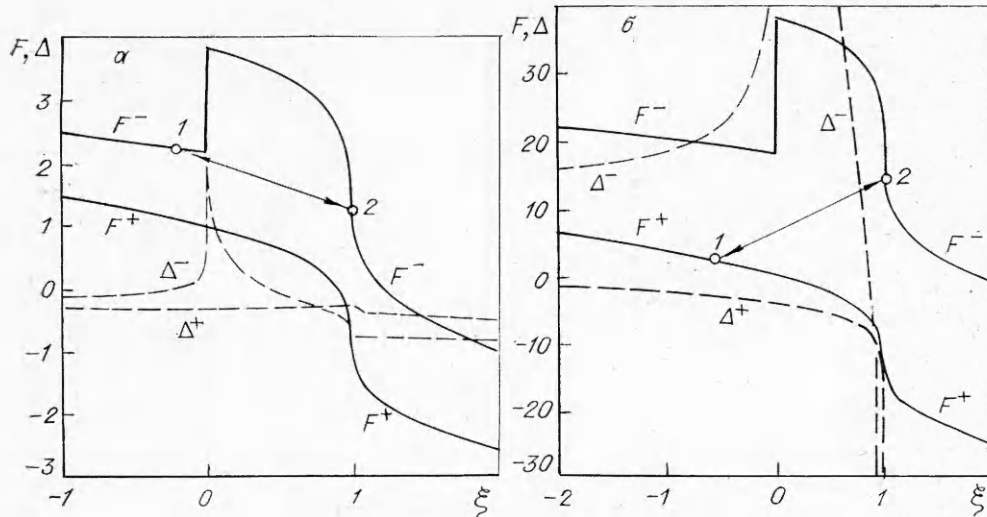
$$(3.3) \quad \psi = |\tau|^{2k} [A_2 F_1(\xi) + B_2 |\xi|^{2k+1/6} F_2(\xi)],$$

$$A_2 = \frac{-1/2}{\sin[\pi(2k + 1/6)]}, \quad B_2 = -\frac{\Gamma(5/6 - 2k) \Gamma(-2k - 1/6)}{\Gamma(-2k) \Gamma(2/3 - 2k)} 2^{-4k-1/3}.$$

Гипергеометрическая функция на ЗЛ имеет особенность при аналитическом продолжении в дозвуковую область $F'(\xi) \sim (1 - \xi)^{-2/3}$. Поэтому, выделяя эту особенность, при $\xi \geq 1$ находим

$$(3.4) \quad \psi = |\tau|^{2k} \xi^k [a_1 F_3(\xi^{-1}) - b_1 \text{sign}(\tau) F_4(\xi^{-1}) \xi^{-1/2}],$$

$$[a_1 = 2A_1 \sin[\pi(k - 1/6)], \quad b_1 = 2B_1 \cos[\pi(k - 1/6)].$$



Р и с. 3

Наконец, продолжая аналогично это решение в сверхзвуковую зону при $0 \leq \xi \leq 1$ и $\tau \leq 0$, получаем

$$(3.5) \quad \psi = |\tau|^{2k} [a_2 F_1(\xi) + b_2 \xi^{2k+1/6} F_2(\xi)],$$

$$a_2 = -2A_2 \sin [\pi(4k - 1/6)], \quad b_2 = 2B_2 \cos [\pi(2k + 1/6)].$$

Анализируя (3.2), убеждаемся в двузначности решения с k из интервалов при $i \geq 1$. В сверхзвуковой области течения в данном случае линии тока поворачивают в обратном направлении. Ясно, что решение с такой нерегулярностью ошибочно, как и [2], поэтому далее рассматриваем только первый интервал для показателя k , т. е. полагаем $i = 0$.

4. Гипергеометрическая функция-решение, вычисленная по формулам (3.1)–(3.5) для $k = 0,3792$, показана сплошными линиями на рис. 3, а при $-1 \leq \xi \leq 2$ (за рамками чертежа эти линии сливаются при $|\xi| \rightarrow \infty$), кривая F^+ соответствует на рис. 2, а области при $\tau > 0$, а F^- является решением в нижней полуплоскости. На полукубической параболы $\xi = 0$ эта функция терпит разрыв

$$[F^-(0)] = \{1/2 + \sin [\pi(4k - 1/6)]\} / \sin [\pi(2k + 1/6)].$$

Такой разрыв приводит к скачку функции тока, который представлен на рис. 2, а штриховой линией. Якобиан преобразования Δ вычислен по формуле (2.3) при фиксированном τ и показан на рис. 3 штриховыми линиями с теми же индексами, что и у F . Видно, что в окрестности характеристики с разрывом $[F]$ якобиан Δ становится положительным, меняя знак справа и слева от $\xi = 0$. В согласии с теоремой преобразования это указывает [6] на скачок уплотнения, который отображается на область, покрывая зону с $\Delta \geq 0$.

Приведенная на рис. 3, а гипергеометрическая функция качественно не изменится и для других значений k из первого интервала, но в существенной зависимости от k оказывается размер зоны с положительным якобианом. Так, если для $k = 0,3792$ эта зона расположена при $-0,205 \leq \xi \leq 0,407$, то по мере роста k размер зоны увеличивается, и при $k = 0,4075$ ее левая граница $\xi = -\infty$. Правая граница не превышает $\xi = 1$. По мере дальнейшего роста k с прямой $\Delta = 0$ на рис. 3 пересекается при $\xi < 0$ уже не Δ^- , а Δ^+ , причем абсцисса точки пересечения увеличивается. Этому случаю соответствует рис. 3, б. Точки 1 и 2 кривой F^- на рис. 3, а соединяются с помощью ударной поляры (штрихпунктирная линия на рис. 2, а), однако при этом не выполняется равенство $[x] = 0$, т. е. толщина УВ не равна нулю. Если в этом равенстве исключить $|\tau_1/\tau_2|$ с помощью соотношения $[\psi] = 0$, то в результате получаем уравнение

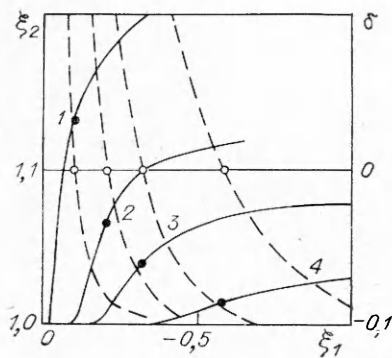


Рис. 4

кости переменных ξ_1 и ξ_2 существует для каждого k линия $X(\xi_1, \xi_2) = 0$, на которой вместе с $|\psi| = 0$ выполняется $|x| = 0$. При этом не удовлетворяется точно (2.10), но условие (2.8) выполняется на каждой кривой $X = 0$ при $\xi_2 \approx 1$.

На рис. 4 сплошные линии 1–4 ($X = 0$) построены для $k = 0,4158$; $0,415$; $0,4142$ и $0,4125$. Для ξ_1 и ξ_2 , принадлежащих кривым $X = 0$, вычислена левая часть равенства (2.8), которую обозначим δ . Функции $\delta(\xi_1)$ представлены на рис. 4 штриховыми линиями. Видно, что для каждого из рассмотренных показателей штриховая линия пересекает ось $\delta = 0$. Точка пересечения дает искомое решение с УВ, на которой в рассматриваемом автомодельном приближении выполнены все граничные условия (равенства потоков массы, импульса и энергии). Число Маха за ударной волной $M_2 < 1$ при $k > 0,4075$ и $M_2 > 1$ при $k < 0,4075$.

Для $k = 0,4125$ гипергеометрическая функция-решение показана на рис. 3, б с таким же, как и на рис. 3, а, обозначением линий. Годограф течения вблизи точки формирования УВ приведен на рис. 2, б. Здесь нулевой линии тока соответствуют значения $\xi_0^+ = 0,216$ и $\xi_0^- = 2,016$, а границам скачка $\xi_1 = -0,6010$ и $\xi_2 = 1,0138$. Якобиан преобразования положителен между линиями $\xi^1 = -3,464$ и $\xi^2 = 0,864$ (штриховые линии на рис. 2, б). В полученном решении отношение углов отклонения потока на УВ постоянно и равно $\tau_1/\tau_2 = -6,5272$.

5. Как уже отмечалось, скачок уплотнения, ограничивающий МСЗ, формируется под действием волн сжатия, которые приходят от ЗЛ на замыкающий участок границы зоны. Действительно, в полученном решении при $k \rightarrow 5/12$ нулевая линия тока стремится к полукубической параболы $\xi = 0$ в верхней полуплоскости рис. 2, б. Поэтому вблизи точки f сверхзвуковое течение приближается к течению в простой волне сжатия, причем формирование УВ предшествует образованию пучка характеристик. Структура течения аналогична той, которая получена в задаче обтекания сверхзвуковым потоком вогнутой поверхности стенки [9].

Отметим, что, как следует из рис. 2, б, угол отклонения линии тока в точке f (начале координат) принимает минимальное значение по сравнению с τ на ЗЛ и на «сверхзвуковой границе» УВ ξ_1 . Такое поведение угла наклона вектора скорости согласуется с приближенным решением [11], где отмечено, что возникновению нерегулярности волн на замыкающем участке МСЗ отвечает перекрутка сверхзвукового потока, когда предельное значение τ достигается на ЗЛ выше, чем в точке ее пересечения со стенкой обтекаемого тела.

В указанном выше диапазоне показатель автомодельности изменяется непрерывно, и поэтому решение локальной задачи формирования УВ неединственно. Физически это, по-видимому, обосновано тем, что интенсивность УВ на границе МСЗ варьируется в зависимости от условий обтекания, причем изменения только масштабного коэффициента недостаточно — изменяется в узком диапазоне и показатель степени в формулах (2.7).

$X(\xi_1, \xi_2) = 0$. Оказывается, что на кривой F^- не существует точек $\xi_1 < 0$ и $\xi_2 > 1$, при которых выполнялось бы уравнение $X = 0$. Поэтому не выполняется и соотношение (2.8).

Отмеченное выше поведение якобиана (2.3) при $k \rightarrow 5/12$ говорит о необходимости поиска решения, в котором точка f принадлежит не кривой F^- , как это показано на рис. 3, а, а левой ветви линии F^+ на рис. 3, б. Это означает, что при переходе через УВ угол отклонения потока меняет знак от положительного к отрицательному. Действительно, из расчетов видно, что при $0,3975 < k < 5/12$ в плос-

Оставаясь в рамках локальной задачи, определяем единственное значение $k = 0,4017$ по минимальной величине погрешности, которую вносит учет квадратичных членов в (2.10). В этом случае на УВ $\xi_1 = -4,0922$, $\xi_2 = 0,9855$ и $\tau_1/\tau_2 = -1,8824$, нулевой линии тока соответствуют $\xi_0^+ = 0,59$ и $\xi_0^- = 1,64$, $\Delta > 0$ при $-7,4007 \leq \xi \leq 0,77$.

Таким образом, в построенном решении на УВ

$$(5.1) \quad \psi \sim [\eta]^{13k} \sim [p]^{3k}, \quad 3k \approx 6/5;$$

$$(5.2) \quad \omega = \omega_0 \psi^\alpha, \quad \alpha = (1 - k)/k \approx 3/2.$$

Равенство (5.2) для завихренности ω получено из доказанного в [6] соотношения для приращения энтропии $[S] \sim [p]^3$. Коэффициент пропорциональности ω_0 определяется с помощью разложения адиабаты Гюгонио в ряд по степеням $[S]$ и $[p]$. Из (5.1) следует, что интенсивность УВ в точке ее зарождения имеет бесконечную по длине образующей производную. Отметим, что в решении [9] интенсивность УВ $[p] \sim \psi^{1/2}$.

После преобразования показанных на рис. 2, б линий в физическую плоскость, используя (2.2), получаем для характерных линий уравнение $x = c_x |y|^n$, $n = 1,404$ с $c_x = -0,2593$ на ЗЛ, $c_x = 0,3172$ на УВ и $c_x = -0,8153$ на приходящей в точку f характеристике. Эти линии (соответственно штриховая, сплошная и штрихпунктирная) построены на рис. 1, а. Видно, что ЗЛ и характеристика C_+ вогнуты, а УВ выпукла по направлению к набегающему потоку. В точке f линии касаются друг друга и перпендикулярны нулевой линии тока (со стрелкой).

Наиболее вероятным является отмеченное выше решение с минимальной погрешностью, которому отвечают $n = 1,4149$, $c_x = 0,2958$ на УВ, $c_x = -0,8024$ на C_+ -характеристике и $c_x = -0,7454$; $0,3312$ на ЗЛ. Эти линии построены на рис. 1, б. Видно, что основное отличие от показанного на рис. 1, а решения заключается в ЗЛ, которая имеет точку перегиба f и ограничивает область течения за УВ. Такая УВ относится к слабому семейству, так как число Маха за ней больше единицы.

Полученное решение согласуется с теоремами [1] и объясняет в трансзвуковом приближении возникновение УВ, замыкающей МСЗ, когда в точку формирования приходит характеристика без особенности. Это решение альтернативно заключениям [4, 7, 8], однако нет оснований утверждать, что оно нефизично, поскольку требование точного выполнения (2.9) или (2.10) означает баланс квадратичных членов, которыми заведомо пренебрегают в классе автомодельных трансзвуковых решений. Поэтому определение x' из (2.9) для получения (2.10) плохо обусловлено, т. е. небольшая погрешность вычисления $[\eta^2]$ приводит к значительной ошибке x' , следовательно, не удастся точно выполнить (2.10).

Существенному улучшению материала данной работы способствовало обсуждение предварительных результатов проведенного исследования на семинаре Г. Г. Черного и в дискуссиях с В. Н. Диеперовым и Ю. Б. Лифшицем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ.— 1946.— Т. 10, вып. 4.
2. Франкль Ф. И. Пример околосзвукового течения газа с областью сверхзвуковых скоростей, ограниченных вниз по потоку скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения // ПММ.— 1956.— Т. 19, вып. 4.
3. Чернов И. А., Шевырев С. П. О первом примере Франкля течения в местной сверхзвуковой зоне с ударной волной // Аэродинамика.— Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1973.— Вып. 2(5).
4. Гудерлей К. Г. Теория околосзвуковых течений.— М.: ИЛ, 1960.¹
5. Germain P. Ecoulements transsoniques homogènes // Progress in Aeronautical Sciences.— N. Y.: Pergamon Press, 1964.— V. 5.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.
7. Лифшиц Ю. Б. О течении в окрестности точки встречи звуковой линии со скачком уплотнения // Инж. журн.— 1965.— Т. 5, вып. 1.

8. Цветков А. П., Чернов И. А. Задача о местной сверхзвуковой зоне в классе автомодельных течений // Учен. зап. ЦАГИ.— 1974.— Т. 5, № 2.
9. Черный Г. Г. Возникновение и форма поверхности разрыва в потоках газа // Теоретическая гидродинамика/Под ред. Л. И. Седова.— М.: Оборонгиз, 1952.— Вып. 2.
10. Бойченко В. С., Лифшиц Ю. Б. Трансзвуковое течение около выпуклого угла // Учен. зап. ЦАГИ.— 1976.— Т. 7, № 2.
11. Щербаков С. А. Расчет трансзвукового обтекания кормовой части плоского или осесимметричного тела // ЖВММФ.— 1989.— Т. 29, № 9.

г. Жуковский

Поступила 17/V 1989 г.,
в окончательном варианте — 13/IX 1991 г.

УДК 534.222.2

Э. Э. Лин, Э. Н. Пащенко, Б. П. Тихомиров

РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДЕТОНАЦИИ ПЛОСКОГО СЛОЯ КОНДЕНСИРОВАННОГО ВЗРЫВЧАТОГО ВЕЩЕСТВА С УМЕНЬШАЮЩЕЙСЯ ПЛОТНОСТЬЮ

В [1] численным путем получено неавтомодельное решение задачи о распространении детонационной волны (ДВ) в плоском слое конденсированного взрывчатого вещества (ВВ) с уменьшающейся по степенному закону плотностью ρ_0 :

$$(1) \quad \rho_0 = \rho_{00}(1 - x/L_0)^\delta, \quad \delta > 0.$$

Здесь x — текущая координата; ρ_{00} — начальная плотность ВВ в сечении $x = 0$, граничащем с абсолютно жесткой стенкой; L_0 — условная длина, на которой ρ_0 формально обращается в нуль; δ — показатель степени, варьируемый в диапазоне $0 \dots 2$. Распределения калорийности, т. е. удельного энерговыделения Q_0 на единицу массы по толщине слоя ВВ, были взяты в двух предельных видах [2—4]:

$$(2) \quad Q_0 = Q_{00}(\rho_0/\rho_{00})^2;$$

$$(3) \quad Q_0 = Q_{00} = \text{const},$$

соответствующих либо чисто упругой, либо чисто тепловой природе внутренней энергии продуктов взрыва (ПВ) при политропическом уравнении состояния с показателем политропы $k = 3$ (Q_{00} — калорийность, отвечающая плотности ρ_{00}). Изучение поведения ДВ было основано на решении задачи о распаде разрыва в начальных условиях, возникающего в момент времени $t = 0$ в тонком слое ВВ, примыкающем к жесткой стенке. Установлено возрастание сжатия и массовой скорости ПВ во фронте пересжатой ДВ по мере ее распространения. Получено, что коэффициент преобразования химической энергии слоя ВВ с уменьшающейся плотностью в кинетическую энергию потока ПВ, а также в кинетическую энергию несжимаемой метаемой пластины больше, чем в случае нормальной детонации ВВ с постоянной плотностью.

В данной работе предпринята попытка рассмотреть детонацию плоского слоя ВВ с изменяющимися по законам (1)—(3) параметрами с помощью аналитических методов, не связанных с изучением распада разрыва.

Пусть в момент времени $t = 0$ из массивной инертной подложки в слой ВВ со стороны максимальной плотности ρ_{00} приходит ударная волна, сразу вызывающая детонацию в сечении $x = 0$. В дальнейшем (при $t > 0$) подложку рассматриваем как абсолютно жесткую стенку. Положим по аналогии с задачей о сильном точечном взрыве [2], что давление p_1 во фронте ДВ по порядку величины равно средней энергии единицы объема