тому, что отрицательно заряженная холодная масса воздуха, образующаяся под облаком, опускается вниз, увлекая за собой отрицательные ионы. Оценка показывает, что электрическое поле отрицательного заряда земли вследствие малой подвижности ионов создает слишком малую вертикальную составляющую его скорости по сравнению с гидродинамической скоростью тонущего холодного воздуха, направляющегося в виде струй к земле. Эти воздушные струи, охлажденные испарением капель воды, уносят отрицательные заряды от нижней части облака к земле и являются, по существу, гравитационным генератором. На высоте нескольких метров над землей возникает область с инверсией градиента потенциала и отрицательные заряды перетекают на поверхность земли.

Таким образом, облачная часть атмосферы осуществляет подпитку земли за счет отрицательно заряженных нисходящих потоков воздуха и восполняет потерю отрицательного заряда в области с безоблачной погодой.

Авторы выражают благодарность П. Л. Капице и Л. В. Овсянникову за внимание к работе.

Поступила 12 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Френкель Я. И.** Теория основных явлений атмосферного электричества.— «Изв. АН СССР. Сер. географическая и геофизическая», 1944, т. 7, № 5, с. 244—272.
2. **Чалмерс Дж.** Атмосферное электричество. Л., Гидрометеоиздат, 1974.
3. **Kelvin W.** Atmospheric electricity.—Roy. Inst. Lect. Pap. on Elect. and Mad., 1860, p. 208—26.
4. **Chauveau B.** Études de la variation de l' electricité atmospherique.— «Annales de B. C. M.», 1900, t. 5, p. 1.

УДК 537.521.7

К ТЕОРИИ МОЛНИИ

Б. Н. Козлов

(Москва)

1. Механизм развития молнии. Развитие молнии является автоколебательным релаксационным процессом принципиально электромагнитной природы, единым для линейной и шаровой разновидностей молнии [1, 2]. Каждый автоколебательный цикл молнии состоит из стадии «электромагнитной активности» и последующей стадии «электромагнитного штиля». Процесс связан с зарядовой трассой — столбом воздуха, выходящим из облака, обрывающимся в атмосфере, выделенным из окружающей среды ионизацией воздуха и пониженной его плотностью. Зарядовая трасса молнии в связи с автоколебательным режимом процесса периодически переходит из состояния слабоионизованной, почти непроводящей зарядовой дорожки в хорошо проводящий ствол и обратно. Вдоль трассы молнии, как вдоль однопроводной волноводной линии типа штыревой антенны, от облака до головы трассы регулярно проходят особого рода апериодические электромагнитные волны (трассовые волны), определяющие перенос энергии и заряда молнии. Процесс распространения трассовых волн является существенно нелинейным и неравновесным, поскольку эти волны характеризуются способностью создавать необходимую для своего распространения, зависящую от поля волны, неравновесную высокую электропроводность в трассе за фронтом волны ионизующим действием поля волны. Трассовая волна возникает в начале каждого цикла в точке пересечения оси трассы и поверхности облака, после чего полусферически распространяется в пространстве вне облака с электромагнитной (определяемой решением уравнений Максвелла) скоростью, близкой к скорости света. В облаке во время распространения трассовой волны вследствие стримерных разрядов с поверхностей кристаллов льда и капель воды кратковременно возникает высокая электропроводность, благодаря которой облако ведет себя как хороший проводник. Этот факт, т. е. высокая проводимость облака во время разряда молнии, теоретически выводимый в отдельной работе, в данном случае может рассматриваться как опытный, поскольку энергия молнии, близкая к исходной электрической энергии облака [3], может быть получена от облака только при высокой электропроводности облака. Энергия молнии переносится трассовыми волнами в основном вне трассы молнии в форме энергии электромагнитного поля и лишь поглощается в объеме трассы. Электромагнитное поле трассовой волны, распространяясь в воздухе вне трассы молнии со скоростью света, проникает в объем трассы с боков путем дифракции. Поэтому фронт трассовой волны движется вдоль трассы вне ее и у ее поверхности, а также внутри трассы, по крайней мере в ее тонком поверхностном слое, со скоростью света. Появляясь в трассе, поле трассовой волны создает в ней макроскопический (распределенный по объему) ансамбль электронных лавин, возникающих из начальных электронов или ионов, составляющих «затравочную» ионизацию трассы. Интенсивный, почти мгновенно протекающий сразу за фронтом волны электронно-лавинный процесс приводит к почти идеальной электропроводности участка трассы за фронтом волны (трассоида [2]), тогда как весьма малая электропроводность участков трассы перед фронтом волны, где отсутствует поле, с джоулевыми потерями не связана. Поэтому трассовые волны распространяются вдоль исходно слабоионизованных, почти не проводящих трасс так же, как вдоль хорошо проводящих волноводных линий. Чем мощнее трассовая волна, тем больше электропроводность, включаемая ее полем за фронтом волны, и тем ближе распространение к идеальному. В условиях молнии трассовые волны, питаемые очень высокими потенциалами, распространяются практически идеально со скоростью света, удлинение трассы молнии не связано со значительным переносом энергии и заряда молнии и происходит скачкообразно со скоростью продольного электрического дрейфа зарядов, периодически вносимых в трассу трассовыми электромагнитными волнами, распространяющимися с электромагнитной скоростью. Процесс распространения молнии является, таким образом, двухскоростным.

В объемах за пределами трассы, в частности па продолжении трассы вдоль ее оси, распространяющееся поле значительной электропроводности создать не может, поскольку вне трассы отсутствует достаточная затравочная концентрация зарядов. Существенно также, что в канале молнии (особенно сильно нагреваемой области у оси трассы) прилипание электронов ввиду высокой температуры не происходит и избыточные отрицательные заряды существуют в форме свободных электронов. Повышенная температура канала и уменьшенная плотность воздуха в нем приводят к улучшенным условиям протекания тока в канале (осевой сердцевине трассы) по сравнению с оболочкой (остальной областью трассы) и соответственно к осевой концентрации тока, приводящей к дополнительному нагреву канала, и т. д.

Достигнув головы трассы, трассовая волна отражается, поскольку геометрическое продолжение трассы является областью, где ввиду отсутствия значительной затравочной ионизации высокая электропроводность включиться не может, и поэтому эта область ведет себя как диэлектрик. Трассовая волна отражается, таким образом, от головы трассы как от конца обрывающейся однопроводной волноводной линии, теряя при этом часть энергии на излучение. Отраженная волна обычно почти сразу же поглощается в головной части трассы, где сопротивление трассы особенно велико. Поглощение энергии волны преимущественно в головной части трассы до некоторой степени аналогично известному факту поглощения энергии упругой волны на конце сужающегося шнура («эффект пастушьего кнута»). Ввиду постепенного нарастания сопротивления в головной части трассы и «размытости» фронта волны интенсивность отраженной и излучаемой волн сравнительно невелика. (Как известно, на размытой границе сред и в случае размытых фронтов волны могут затухать вообще без отражения и излучения).

Затуханием трассовой электромагнитной волны оканчивается стадия электромагнитной активности в каждом цикле и начинается стадия электромагнитного штиля в том же цикле. После затухания трассовой волны трасса остается заряженной до потенциала облака и имеет высокую электропроводность всюду, кроме участка на границе с облаком. В приоблачном участке электропроводность сразу же отключается вследствие очень интенсивных процессов рекомбинации и прилипания, поскольку электрическая напряженность на поверхности трассы в этом участке оказывается меньше критической величины E^*, необходимой для поддержания высокой электропроводности. Трасса в момент перехода из активной в штилевую стадию поэтому отключается от облака и перестает получать из облака энергию и заряд. Электрическая напряженность на поверхности головной части трассы в начале штилевого периода весьма велика («эффект острия») и много больше напряженности внешнего поля (создаваемого зарядами остальных участков трассы и зарядами облака). Внешнее (по отношению к голове трассы) поле не оказывает поэтому в начальной фазе штилевой стадии направляющего воздействия на дрейф зарядов головы трассы, т. е. на удлинение трассы. Дрейфовое движение головы трассы в этих начальных фазах штилевых стадий определяется собственным полем зарядов головы трассы, вследствие чего неустойчиво и хаотично. Любое случайное возмущение меняет направление продвижения головы трассы, а высокая электропроводность трассы обеспечивает развитие неустойчивостей притоком энергии. В эти моменты наряду с хаотическим блужданием головы трассы возможно обусловленное неустойчивостью ветвление трассы. Голова трассы, связанная с резко повышенной концентрацией поля и энерговыделения [2], светится в этой фазе особенно ярко, а ее скорость, постоянно меняясь по направлению, имеет наибольшие значения по абсолютной величине. Неупорядоченные движения головы трассы в начальной фазе штилевой стадии каждого цикла не связаны с систематическим перемещением головы трассы в каком-либо определенном направлении, например вдоль внешнего поля, которое голова трассы в эти моменты не чувствует ввиду его малости по сравнению с собственным полем зарядов головы трассы. Голова молниевой трассы в это время хаотически блуждает внутри некоторого объема, образуя своеобразные узлы траектории головы, и в среднем остается на месте, хотя и движется быстро.

Всестороннее дрейфовое растекание зарядов трассы приводит к уменьшению электрической напряженности на поверхности трассы. Когда эта напряженность становится меньше критической величины E^* всюду на поверхности трассы, ионизация прекращается, а интенсивные релаксационные процессы рекомбинации и прилипания быстро (за времена порядка 10^{-8}—10^{-10} с) выключают неравновесную высокую электропроводность в трассе. Дрейфовое растекание зарядов трассы при отсутствии значительной электропроводности приводит к дальнейшему снижению напряженности поля на ее поверхности, в частности, в области головы. Внешнее поле становится существенным по сравнению с собственным полем зарядов головы трассы. В этих условиях поле, внешнее по отношению к зарядам головы трассы, направляет дрейфовое движение зарядов головы, и это движение становится упорядоченным, а не хаотичным. С этого момента начинается вторая фаза штилевой стадии, связанная с систематическим продвижением головы разряда. С релаксационным уменьшением потенциала трассы вследствие растекания зарядов при отсутствии значительной электропроводности трассы, особенно на границе с облаком, возрастают разность потенциалов между облаком и трассой и напряженность поля в исходной точке трассы — точке пересечения оси трассы и поверхности облака. В момент, когда напряженность в исходной точке на поверхности одного из кристаллов или капель облака достигает критического значения, необходимого для возникновения трассовой волны — электромагнитной волны искрового пробоя,— в исходной точке возникает очередная трассовая волна, что соответствует началу нового пульсационного цикла.

В каждом цикле трасса заново возрождается и удлиняется на некоторую величину вследствие продольного дрейфа зарядов под действием поля. Самораспространяющийся процесс развития молнии может возникнуть из любой вытянутой слабоионизованной области малых размеров (зародыша молнии), если эта область появляется в воздухе и соединяется с облаком, имеющим достаточно высокий потенциал. Трассовые волны зарождаются обычно на остриях игольчатых кристаллов, имеющихся в грозовых облаках [4], поскольку температура грозовых облаков отрицательна [5—7].

При наблюдении с больших расстояний структура узлов, т. е. областей хаотических блужданий головы трассы, обычно не видна, и узлы обнаруживаются как более широкие и яркие участки трассы с возможными изломами траектории или ветвлением. Поскольку в узлах происходит лишь быстрое хаотическое движение головы разряда без систематического продвижения разряда, в наблюдениях узловые участки воспринимаются как «остановки». Таким образом, «остановки ступенчатого лидера» молнии в действительности являются фазами особенно быстрого движения, которое, однако, хаотично и к постоянному, систематическому перемещению разряда не приводит. Трасса с явно видимыми узлами значительных размеров воспринимается как «четочная молния» [3]. Более детальное рассмотрение позволяет наблюдать очень быстрое хаотическое движение головы трассы в каждом узле при более ярком свечении. При малых скоростях движения головы трассы, когда направленное смещение головы трассы за время одного цикла невелико, последовательность узлов, быстро возникающих один за другим, воспринимается с больших расстояний как один движущийся узел, который может быть отождествлен с шаровой молнией больших размеров. Обычная шаровая молния является перемещающейся зоной свечения головы трассы в слабом, сильно замедленном варианте молниевого процесса, когда трасса в целом невидима [1, 2].

По определению [2] трассоид есть зарядово-токовая зона трассовой электромагнитной волны, т. е. участок трассы за фронтом волны, где распространяющимся со скоростью света полем волны включена высокая электропроводность (зависящая от электрической напряженности поля) и возникли под действием поля высокие концентрации токов и нескомпенсированных объемных зарядов. Вершина трассоида находится в точке пересечения оси трассы и фронта трассовой волны и движется вдоль оси трассы со скоростью света. Трассоид как элемент трассовой электромагнитной волны является принципиально электромагнитным образованием, всегда касающимся фронта электромагнитного поля своей вершиной. В этом принципиальное отличие трассоидов от стримеров, которые обычно описываются уравнениями электростатики, т. е. являются электростатическими образованиями и удлиняются со скоростью, много меньшей скорости света [8—10]. Искровые разряды лабораторных масштабов хорошо описываются стримерной теорией [8—10]. Эта теория, обоснованная теоретически и экспериментально в лабораторном диапазоне длин искровых промежутков, неприменима, однако, к молниевым разрядам [2]. В условиях молнии определяющим является принципиально электромагнитный механизм релаксационных автоколебаний и факт распространения фронтов энергии, заряда и тока с электромагнитной скоростью при удлинении трассы разряда с дрейфовой скоростью, т. е. двухскоростной режим [1, 2]. По стримерной теории вершина стримера совпадает с вершиной разряда. По релаксационной картине вершина трассоида движется от источника (облака) до вершины разряда, после чего трассоид исчезает, а через некоторое время от источника к голове распространяется следующий трассоид и т. д. По стримерной теории молния является распространением единственного стримера, удлиняющегося со скоростью, много меньшей скорости света. По релаксационной теории молниевый процесс определяется последовательным прохождением от облака до головы разряда, движущейся со скоростью дрейфа, многих (порядка сотни) трассоидов, каждый из которых распространяется со скоростью света.

Релаксационный автоколебательный механизм разряда действует при километровых длинах разряда. Релаксационная теория строится асимптотически, т. е. для условий вдали от стримерно-релаксационной границы подобно тому, как стримерная теория [8—10] строится асимптотически для условий вдали от лавино-стримерного перехода. Переходные области весьма сложны для расчетов. Асимптотическое описание вдали от переходной области хорошо соответствует реальным условиям молнии. Но асимптотическое описание, относящееся к условиям вдали от переходной области между стримерным и релаксационным механизмами, не определяет параметров переходной области. Одним из основных проявлений релаксационного механизма искрового разряда является ступенчатый характер распространения молнии. Наименьшая наблюдаемая длина пульсационной ступени молнии 10 м [3], поэтому релаксационный механизм возникает при длинах разряда больше этой величины. Молнии никогда не бывают короче нескольких сотен метров [11]. Поэтому граница между стримерным и релаксационным механизмами искрового разряда в атмосферном воздухе соответствует длине разряда в сотни метров. Электромагнитно-релаксационная картина молниевого разряда хорошо согласуется с данными наблюдений. Регулярно повторяющееся распространение трассовых волн от облака до головы трассы со скоростью света фиксируется в наблюдениях как мгновенные вспышки молниевой трассы — мерцания молнии [3, 8, 12], а в случае инфрамолний, когда трасса в целом невидима,— в виде мерцания головы трассы, т. е. шаровой молнии [13, 7, 14]. По наблюдениям линейных молний во время вспышек «яркое свечение охватывает все пройденные ступени» [11], в чем проявляется прохождение трассоида в каждом цикле вдоль всей трассы от облака до головы. Весьма существенным является вытекающий из релаксационной теории и обнаруживаемый в наблюдениях факт существования молний, выходящих из облака, но не достигающих земли [3, 8, 12, 5]. (По стримерной теории разряд молнии, вышедший из облака, должен достичь земли.) Предсказываемые релаксационной теорией характерные длины молний (5 км) и их максимальные длины (200 км) согласуются с результатами [3, 5, 11, 12, 15] (по стримерной теории длина молнии должна составлять 0,2 км [10]). Вытекающий из релаксационной теории эффект повышенной яркости головы молниевой трассы зафиксирован в наблюдениях [8] и проявляется во всех случаях шаровой молнии [7, 14]. Наиболее четко и детально молниевый процесс (в варианте шаровой молнии) виден на фотоснимке [13], описание которого дано в [16]. На фотоснимке четко просматривается извивающийся характер траектории внутри узлов и видна повышенная светимость узловых участков. Это же наблюдается на фотоснимке В. М. Дерюгина [14]. Вытекающее из релаксационной теории примерное совпадение минимального энерговыделения линейной молнии с максимальным энерговыделением шаровой молнии подтверждается результатами [7, 2, 17].

Точное математическое описание трассового процесса, т. е. релаксационного электромагнитного автоколебательного процесса, определяющего развитие молнии, требует решения нестационарной (при удельной электропроводности среды, меняющейся со временем), двумерной (осесимметричной), нелинейной (удельная электропроводность среды зависит от поля волны) и неравновесной (ионизация среды не определяется температурой) задачи о распространении электромагнитного поля в неоднородной среде с учетом газодинамических движений и теплопроводности. Эти качества процесса являются свойствами принципиального определяющего характера и не могут быть исключены для упрощения расчетов. Крайняя сложность процесса требует специального упрощенного подхода к его математическому описанию. Такой подход возможен благодаря особенностям самого процесса. Главной его чертой является цикличность. Важные параметры состояния системы (потенциал облака, температура и плотность воздуха в трассе, длина трассы) не сильно меняются за время одного цикла и могут быть приняты постоянными в пределах цикла и меняющимися скачкообразно от цикла к циклу. Каждый цикл вместе с тем естественно распадается на электромагнитно-активную и штилевую стадии, и каждая из этих стадий может быть описана своими уравнениями, учитывающими ее основные черты. Таким образом, хотя в целом существенны все перечисленные выше особенности процесса, не поддающиеся одновременному учету ввиду крайней математической сложности, сформулированный подход позволяет эффективно все их учесть. Упрощающим является также асимптотический характер теории, связанный с очень высокими величинами питающих потенциалов, приводящих к резко выраженным электромагнитным свойствам процесса. В этом случае применимы уравнения, не описывающие переходных областей между электродинамикой и электростатикой, подобно тому как ультрарелятивистское приближение не описывает перехода к нерелятивистским соотношениям. Именно поэтому формулы релаксационной теории, опирающейся на электромагнитную картину явления, не переходят в формулы стримерной теории [8—10], опирающейся на уравнения электростатики. Это противоположные предельные случаи.

Когда имеется зарядовая трасса (в ее исходном состоянии слабоионизованной зарядовой дорожки [2]), трассовые волны могут распространяться при полном отсутствии внешнего поля. Самораспространяющийся процесс развития молнии, протекающий без заранее проложенной трассы, возможен при слабом внешнем поле, которое не влияет на распространение трассовых волн и лишь продвигает голову трассы разряда в определенном направлении. Примером может быть молниевый разряд из облака, имеющего два плоских, параллельных друг другу, электрически заряженных слоя, один из которых (N-слой) отрицателен и характеризуется высокой электропроводностью, а второй (p-слой), расположенный ниже, положителен и неэлектропроводен. Заряды слоев, вообще говоря, не равны. Между слоями (от отрицательного проводящего к положительному непроводящему) возникает направленный вниз разряд молнии. Достигнув положительного слоя и пронизав его, разряд продолжит свое распространение во внешней области, если там имеется хотя бы небольшая зародышевая трасса в виде исходной слабоионизованной зарядовой дорожки. Трассовая волна, достигнув ее конца, затухнет после отражения и частичного излучения, оставив трассу в состоянии сильноэлектризованного канала. Если имеется слабое (меньше 3 МВ/м) внешнее поле (обусловленное небольшой разностью зарядов слоев или зарядами других облаков), трасса будет удлиняться направленным дрейфом, периодически пополняясь энергией и зарядом благодаря регулярно проходящим трассовым волнам. При этом в условиях, когда диссипативное сопротивление корня трассы, т. е. ее внутреннего участка от точки возникновения до выхода из положительного слоя, мало (по сравнению с волновым сопротивлением трассы), разность потенциалов между основанием ствола трассы (ее внешнего участка) и положительным слоем будет равна разности потенциалов между слоями. В идеальном случае для математической простоты удельная электропроводность N-слоя считается бесконечной, а расстояние между слоями бесконечно малым. При этом облако становится двойным электрическим слоем с бесконечной электропроводностью, имеющим, вообще говоря, определенный нескомпенсированный заряд единицы поверхности, обусловленный разностью зарядов слоев. Поле, создаваемое таким облаком во внешнем пространстве, может быть весьма незначительным, тогда как разность потенциалов, питающая разряд, может быть очень большой. Эта в расчетном отношении наиболее простая модель предназначена прежде всего для выявления принципиальных особенностей трассовых волн и лишь весьма приближенно описывает фактическую ситуацию в атмосфере, где N- и p-зоны облака имеют большие размеры во всех направлениях [3]. Для более детальных расчетов ниже будет использована иная модель, в которой отсутствие существенного влияния внешнего поля на распространение трассовых волн видно не столь наглядно. Физически этот факт становится ясным при сопоставлении трассовых волн с электромагнитными волнами в линиях, например в кабеле. Поле зарядов, находящихся в источнике (генераторе), на распространение волн в линии не влияет, важна лишь разность потенциалов. В случае однопроводной линии это — создаваемая генератором разность потенциалов между линией и землей, а если линия направлена вертикально, возникает близкое подобие с трассой, выходящей из облака, с той, однако, разницей, что высокую электропроводность в трассе создают сами распространяющиеся вдоль нее волны.

2. Перенос энергии молнии. Распространение трассовых волн, переносящих энергию молнии, описывается уравнениями Максвелла

$$\text{(2.1)} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu_0 \partial \mathbf{H}/\partial t = 0, \ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t = \mathbf{J}, \\ \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho, \ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

где для воздуха принято $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$.

Рассмотрим предельную трассовую волну, на примере которой наиболее просто видна картина распределения поля трассовых волн в пространстве. Под предельной понимается трассовая волна, напряженность поля которой столь велика, что электропроводность, включаемая полем волны в трассе за фронтом волны, приводит к диссипативному (определяющему джоулевы потери) сопротивлению, пренебрежимо малому по сравнению с волновым сопротивлением трассы. В этих условиях потери энергии пренебрежимо малы и распространение происходит почти идеально. Трасса в исходном ее состоянии является слабоионизованной зарядовой дорожкой, но за фронтом волны становится хорошо проводящей. (Заметим, что обычная концентрация ионов в воздухе пренебрежимо мала по сравнению с исходной затравочной концентрацией в зарядовой дорожке.) В рассматриваемой постановке картина сводится к распространению ступенчатой электромагнитной волны вдоль трассы как идеально проводящей однопроводной линии. Задача решается в сферических координатах x, θ, φ в следующей постановке. Определить поле электромагнитной волны в конической области между идеально проводящей плоскостью $\theta > \theta_{00} = \pi/2$ (имитирующей поверхность облака) и тонким идеально проводящим конусом $\theta = \theta_0 \ll 1$ (имитирующим поверхность участка трассы за фронтом волны). Волна возникает в момент $t = 0$ включения разности потенциалов $V_0(t)$ в бесконечно малом зазоре между конусом и плоскостью в точке $x = 0$. Решение рассматривается для конечного интервала времени от начального момента $t = 0$ возникновения волны до момента t_0 достижения фронтом волны радиуса $x = a_0$, за пределами которого трасса отсутствует. Граничные условия состоят в обращении в нуль тангенциальной компоненты электрической напряженности на поверхностях $\theta = \theta_{00}$, $\theta = \theta_0$. Объемные заряды и токи в области определения поля, т. е. при $0 \leqslant x \leqslant a_0$, $\theta_0 < \theta < \theta_{00}$ отсутствуют. Условие источника формулируется заданием монотонно (степенным образом) меняющегося напряжения $V_0(t)$ на концах бесконечно малого участка между конусом $\theta = \theta_0$ и плоскостью $\theta = \theta_{00}$ в точке $x = 0$

$$\lim \int_{\theta_0}^{\theta_{00}} E_\theta x d\theta = V_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ V_{00}t^p, & t \geqslant 0, \quad p \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Решение уравнений Максвелла ищем в виде

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial\mathbf{A}/\partial t, \quad \mathbf{H} = \mu_0^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{A} = \Psi\mathbf{x}/x, \quad \Phi = F(x, t)\,\Lambda(\theta), \quad \Psi = G(x, t)\,\Lambda(\theta), \quad c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}.$$

Поверхностные плотности зарядов и токов ω, j на поверхностях $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_{00}$ определяются с помощью известных граничных соотношений, после чего получается заряд Q на конусе, отнесенный к единице длины сферического радиуса x, и радиальный ток I на конусе $Q = 2\pi x\varepsilon_0 E_\theta(x, \theta_0, t) \sin\theta_0$, $I = 2\pi x H_\varphi(x, \theta_0, t) \sin\theta_0$.

Функции F и G в (2.3) выражаются через величины Q, I соотношениями

$$F = \Lambda_0 Q/2\pi\varepsilon_0\Lambda(\theta_0), \quad G = \Lambda_0 I/2\pi\varepsilon_0\Lambda(\theta_0), \quad \Lambda_0^{-1} = (d\Lambda/\Lambda d\theta)_0 \sin\theta_0. \tag{2.4}$$

Для величин Q и I получаются уравнения

$$K\partial Q/\partial x + L\partial I/\partial t + E = 0, \quad \partial I/\partial x + \partial Q/\partial t = 0, \tag{2.5}$$

где $E = E_x$ — продольная компонента электрической напряженности поля, параметры K и L равны

$$K = \Lambda_0/2\pi\varepsilon_0, \quad L = \Lambda_0/2\pi\varepsilon_0 c_0^2. \tag{2.6}$$

Подстановка (2.3) в уравнения Максвелла (2.1) приводит при $E_x = 0$ к угловой функции $\Lambda(\theta)$ и величине Λ_0 по (2.4), равным

$$\Lambda = \ln \operatorname{ctg} \theta/2, \ \Lambda_0 = \ln \operatorname{ctg} \theta_0/2. \tag{2.7}$$

Длина трассы a_0 связана с радиусом b_0 ее наибольшего поперечного сечения равенством $b_0 = a_0 \operatorname{tg} \theta_0$. Для тонкой трассы $\theta_0 \ll 1$

$$\Lambda_0 = \ln 2\nu_0, \ \nu_0 = a_0/b_0. \tag{2.8}$$

При строго идеальной проводимости трассы продольная компонента E электрической напряженности равна нулю, при высокой, но конечной проводимости продольная компонента $E = E_x$ много меньше, чем поперечная E_θ. В пространстве вне трассы, где нет проводимости, продольной компонентой можно пренебречь ввиду ее малости. В трассе за фронтом волны, т. е. в трассоиде, где велика электропроводность, даже малая продольная компонента существенна, поскольку вызывает значительный ток. По закону Ома имеем

$$E = IR, \tag{2.9}$$

где R — сопротивление единицы длины трассоида. Уравнения (2.5), (2.9) являются хорошо известными «телеграфными» уравнениями [18, 19], которые выведены здесь вместе с конкретными выражениями параметров K, L для трассовых волн непосредственно из уравнений Максвелла.

Поскольку рассматривается волна, возникающая в начальный момент времени $t = 0$ в точке $x = 0$, а скорость распространения возмущений конечна, существует движущийся с некоторой скоростью c фронт волны. На фронте $x = x_0(t)$, по определению фронта, для заряда Q единицы длины трассы и тока I в трассе имеют место условия

$$Q(x_0, t) = 0, \ I(x_0, t) = 0. \tag{2.10}$$

Решение системы (2.5), (2.9) для $R = 0$ при условиях (2.2), (2.10) ищем в автомодельном виде

$$\begin{gathered} Q = CV_0(t)f(\xi)/K, \ I = CV_0(t)g(\xi)/Z, \\ V_0 = V_{00}t^p, \ \xi = x/x_0(t), \ x_0 = ct, \ c = \gamma c_0, \ Z = \beta Z_0, \\ Z_0 = \sqrt{KL}, \end{gathered} \tag{2.11}$$

где x_0 и c — соответственно радиус и скорость фронта волны; C, β, γ — неопределенные постоянные. Подстановка (2.11) в (2.5), (2.9) при $R = 0$ приводит к системе

$$\begin{gathered} (1 - \gamma^2\xi^2)df/d\xi + p\gamma^2\xi f + p\gamma g/\beta = 0, \\ (1 - \gamma^2\xi^2)dg/d\xi + p\gamma^2\xi g + p\beta\gamma f = 0. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Для функций $f(\xi)$, $g(\xi)$, определенных по (2.11) с точностью до постоянного множителя, принимается нормировка $f(0) = 1$, $g(0) = 1$. По (2.10), (2.11) имеем $f(1) = 0$, $g(1) = 0$. Таким образом, для системы (2.12) вводятся условия

$$f(0) = 1, \ g(0) = 1, \ f(1) = 0, \ g(1) = 0. \tag{2.13}$$

Решение системы (2.12) при условиях (2.13) определяет величины параметров $\beta = 1$, $\gamma = 1$ и имеет вид

(2.14) $$f(\xi) = (1 - \xi)^p, \quad g(\xi) = (1 - \xi)^p.$$

Поскольку по (2.11) скорость фронта равна $c = \gamma c_0$, фронт распространяется со скоростью света.

Решение системы (2.12) при условиях (2.13) для $p = 0$ определяется как предел последовательности решений (2.14) при $p \to 0$. Решение при $p = 0$, таким образом, имеет вид

(2.15) $$f(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \xi < 1, \\ 0, & \xi = 1, \end{cases} \quad g(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \xi < 1, \\ 0, & \xi = 1. \end{cases}$$

Заметим, что предельный переход $p \to 0$ в (2.14) выявляет физический смысл решения (2.15), непосредственное получение которого из (2.12), (2.13) не вполне очевидно.

Напряжение в трассе определяется формулой

(2.16) $$V = \int_{\theta_0}^{\theta_{00}} E_\theta x d\theta.$$

Из (2.16), (2.3), (2.4), (2.6), (2.7), (2.11) следует $V(x, t) = CV_0 f$. Вместе с тем по (2.16), (2.2) $V(0, t) = V_0(t)$, а по (2.13) $f(0) = 1$. Таким образом, $C = 1$ и $V(x, t) = V_0(t) f(\xi)$. Сопоставляя это с выражением для Q, по (2.11) находим

(2.17) $$V = KQ.$$

Джоулевы потери в трассе в рассматриваемом случае отсутствуют. Отношение напряжения $V_0(t) = V(0, t)$ на входе в трассу к входному току $I_0(t) = I(0, t)$ при распространении без потерь есть по определению волновое сопротивление трассы как волноводной линии. По (2.11), (2.3), (2.6) с учетом $C = 1$, $\beta = 1$, $g(0) = 1$ находим величину волнового сопротивления

(2.18) $$Z_0 = \Lambda_0 / 2\pi\varepsilon_0 c_0.$$

По (2.11), (2.14), (2.2) с учетом $C = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ получаем

(2.19) $$Q = (1 - x/c_0 t)^p V_0(t)/K, \quad I = (1 - x/c_0 t)^p V_0(t)/Z_0.$$

Из (2.19), (2.6), (2.18) видно, что в рассматриваемом случае идеальной волны (предельно мощной волны, включающей за своим фронтом идеальную электропроводность) ток I в трассе и заряд Q единицы длины трассы связаны соотношением $I = c_0 Q$, где c_0 — скорость света. Из (2.19) видно также, что фронты заряда и тока распространяются со световой, а не с дрейфовой скоростью, хотя заряды движутся со скоростью дрейфа. В условиях, когда диссипативное сопротивление трассоида (сопротивление, определяющее джоулевы потери) много меньше волнового сопротивления (2.18) (как это имеет место в случае молнии), распространение происходит почти идеально и при постоянном питающем потенциале характеризуется профилем, весьма близким к прямоугольному ступенчатому профилю (2.15).

С помощью (2.3), (2.4), (2.19), (2.7) получаем искомое решение уравнений Максвелла, описывающее распространение трассовых волн:

(2.20) $$\mathbf{E} = Q(x, t)\mathbf{n}_\theta / 2\pi\varepsilon_0 x \sin\theta, \quad \mathbf{H} = I(x, t)\mathbf{n}_\varphi / 2\pi x \sin\theta,$$

где область определения поля есть $0 \leqslant x \leqslant x_0(t)$, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_{00}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant$ $\leqslant 2\pi$, векторы $\mathbf{n}_\theta$, $\mathbf{n}_\varphi$ — орты сферической системы координат x, θ, φ, а функции $Q(x, t)$, $I(x, t)$ определены по (2.19). Поле внутри трассоида $0 \leqslant x \leqslant x_0(t)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ при идеальном распространении равно нулю, однако на поверхности трассоида величины напряженностей поля волны достигают по (2.20) наибольших значений. Плотность энергии поля $u = \varepsilon_0\mathbf{E}^2/2 + \mu_0\mathbf{H}^2/2$ и величина вектора плотности потока энергии $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{EH}]$ по (2.20) вне трассы равны

$$u = Q^2/4\pi^2\varepsilon_0 x^2 \sin^2\theta,\ \Pi = I^2/4\pi^2\varepsilon_0 c_0 x^2 \sin^2\theta \tag{2.21}$$

и равны нулю внутри трассы. Полная энергия поля волны получается интегрированием плотности энергии u по объему. Для энергии в единичном интервале длины x с помощью (2.21), (2.20) получается выражение

$$U = KQ^2/2 + LI^2/2. \tag{2.22}$$

Отсюда с учетом (2.17) видно, что K и L суть обратная емкость единицы длины трассы и самоиндукция единицы длины трассы. Формула (2.22) следует также непосредственно из уравнений (2.5). По (2.21) энергия трассовой волны, распределенная по пространству вне трассы, в случае тонких молниевых трасс, какими они реально являются, сконцентрирована в основном у поверхности трассы, которая выполняет роль направляющей волноводной линии. Из (2.20), (2.17), (2.6), (2.11), (2.15), (2.8) при $\theta_0 \ll 1$ следует, что на поверхности трассоида $\theta = \theta_0$ электрическая напряженность равна $E_1 = \nu_0 V_0/\Lambda_0 x$, а в наибольшем поперечном сечении $x = x_0$, где напряженность E_1 минимальна, она равна $E_0 = \nu V_0/\Lambda_0 x_0$. При значении $V_0 = 10^8$ В [3, 12], $\nu_0 \simeq 10^3$, $\Lambda_0 \simeq 7{,}6$, $x_0 \simeq 10^3$ м (что, как увидим, характерно для молнии) $E_0 \simeq 1{,}3\cdot 10^7$ В/м. Характерная напряженность на поверхности трассоида больше этой минимальной величины. Трассовые волны, несущие столь сильные электрические поля, включают в трассах за своими фронтами очень высокую электропроводность и распространяются поэтому почти идеально вплоть до головы трассы.

3. Энергетика молнии с учетом потерь. Распространение трассовых волн без потерь энергии рассмотрено выше путем решения уравнений Максвелла. Для описания трассовых волн с учетом потерь энергии решим уравнения (2.5), (2.9). Трассоид будет предполагаться для простоты ограниченным осесимметричной поверхностью, подобно меняющейся со временем и описываемой в цилиндрических координатах r, φ, x уравнением

$$r = r[x, x_0(t), r_0(t)], \tag{3.1}$$

в котором зависящие от времени параметры $x_0(t)$ и $r_0(t)$ являются соответственно длиной и радиусом наибольшего поперечного сечения трассоида. Ввиду подобия имеем

$$\nu_0 = x_0/r_0 = a_0/b_0, \tag{3.2}$$

где a_0 — максимальная длина трассоида (в данном цикле), равная длине трассы; b_0 — радиус наибольшего поперечного сечения трассоида в момент t_0, когда вершина трассоида $x = x_0(t)$ достигает вершины трассы $x = a_0$. Трассоид в последний момент своего существования $t = t_0$, когда его вершина достигает вершины трассы, становится возрожденной трассой, тогда как от прежней трассы к этому моменту практически ничего не остается. Вследствие интенсивно протекающей рекомбинации воздух за пределами новой трассы (появляющейся в конце активного периода каждого цикла) ионизован пренебрежимо мало по сравнению с воздухом в объеме вновь созданной трассы. В случаях хорошо проводящих и сильно вытянутых трассоидов, какими они реально являются, параметры K и L в уравнениях (2.5) и волновое сопротивление Z_0 не зависят от конкретной формы трассоида, выражаются при условии (3.2) формулами (2.6), (2.18), а потенциал V связан с зарядом Q единицы длины трассоида формулой (2.17), вытекающей также из смысла входящих в нее величин. Важно отметить неаддитивность входящего в (2.9) локального сопротивления R единицы длины трассоида. Интеграл от R, взятый по всей длине трассоида, физического смысла не имеет и может быть бесконечным в реальных условиях. Ввиду непостоянства тока I по длине трассоида физическое содержание имеет взятый по длине трассоида интеграл от величины $EI = RI^2$, выражающий мощность джоулевых потерь. Отношение этого интеграла к квадрату входного тока $I_0(t) = I(0, t)$ может быть названо *диссипативным*, или джоулевым сопротивлением Z_1, малая величина которого по сравнению с волновым сопротивлением (2.18) означает, что распространение близко к идеальному.

Потенциал трассоида $V(x, t)$ в основании $x = 0$, т. е. в месте контакта с облаком, равен потенциалу облака $V_0(t)$. Потенциал облака V_0, мало меняющийся за время одного цикла, при распространении трассовой волны в каждом цикле можно принять постоянным (скачкообразно меняющимся от цикла к циклу). Тогда из условия $V(0, t) = V_0$ с помощью (2.17) находим

$$Q_0 = Q(0, t) = V_0/K. \tag{3.3}$$

Соотношения (3.3), (2.10) выражают граничные условия задачи. Решение уравнений (2.5), (2.9) при условиях (3.3), (2.10) имеет вид

$$\begin{gathered} Q = V_0 f(\xi)/K, \; I = V_0 g(\xi)/Z, \; E = V_0 e(\xi)/x_0(t), \\ R = Z_0 h(\xi)/x_0(t), \; \xi = x/x_0(t), \; x_0 = ct, \; c = \gamma c_0, \; Z = \beta Z_0, \end{gathered} \tag{3.4}$$

где $f(\xi)$, $g(\xi)$, $e(\xi)$ — искомые безразмерные функции, для которых принято $f(0) = 1$, $g(0) = 1$; $h(\xi)$ — задаваемая безразмерная функция; Z_0 — волновое сопротивление (2.18); Z — входное сопротивление; β и γ — параметры, определяемые из решения и граничных условий. Сопротивление $R(x)$ единицы длины трассоида и его безразмерный эквивалент $h(\xi)$ фактически зависят от напряженности поля волны. В решении (3.4) величина $h(\xi)$ рассматривается как функциональный параметр, который должен быть согласован с реальной зависимостью R от поля путем рациональной аппроксимации. До момента $t = 0$ сопротивление R бесконечно, поскольку до $t = 0$ бесконечно удельное сопротивление трассы в ее основании. Потенциал трассы, заряженной предыдущей волной, после ее затухания со временем уменьшается, и соответственно растет разность потенциалов между облаком и трассой, что приводит к увеличению электрической напряженности между облаком и трассой. В некоторый момент в исходной точке $x = 0$ пересечения оси трассы и поверхности облака напряженность достигает критической величины E^{**} такой, что напряженность на поверхности ледяных (обычно игловидных) кристаллов облака или капель воды достигает «пробойной» величины E^*. Тогда в исходной точке возникают «локальный пробой» (интенсивный рост лавинной ионизации) и малая область, для которой $R \neq \infty$, а диссипативное сопротивление Z_1, характеризующее джоулево энерговыделение в области, меньше волнового сопротивления трассы Z_0. Такая область является зародышем трассоида трассовой волны, описываемой уравнениями (2.5), (2.9).

Подстановка (3.4) в уравнения (2.5), (2.9) приводит к системе

(3.5)
$$(1-\gamma^2\xi^2)df/d\xi+hg/\beta=0,$$
$$(1-\gamma^2\xi^2)dg/d\xi+\gamma\xi hg=0,$$
$$e=-df/d\xi+\gamma\xi dg/\beta d\xi=hg/\beta.$$

Граничные условия (3.3), (2.10) с принятой нормировкой $f(0)=1$, $g(0)=1$ примут вид (2.13). Решение системы (3.5) при (2.13) есть

(3.6)
$$f(\xi)=\beta^{-1}\int_\xi^1 h(\xi)\,g(\xi)\,d\xi/(1-\gamma^2\xi^2),$$
$$g(\xi)=\exp\left[-\int_0^\xi h(\xi)\,\xi d\xi/(1-\gamma^2\xi^2)\right],$$
$$e(\xi)=\beta^{-1}h(\xi)\exp\left[-\int_0^\xi h(\xi)\,\xi d\xi/(1-\gamma^2\xi^2)\right].$$

Значения параметров β, γ определяются из (3.6) с помощью (2.13)

(3.7)
$$\beta=\int_0^1\frac{h(\xi)\exp\left[-\int_0^\xi h(\xi)\,\xi d\xi/(1-\xi^2)\right]}{1-\xi^2}d\xi,\quad \gamma=1.$$

Скорость фронта волны по (3.4), (2.7) $c=\gamma c_0=c_0$, т. е. равна скорости света. Для класса решений, соответствующих $h=\mathrm{const}$, из (3.6) с учетом (3.7) находим

(3.8)
$$f(\xi)=1-\frac{2}{B(1/2,h/2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!\,[1-(1-\xi^2)^{n+h/2}]}{2^{2n}(n!)\,(2n+h)},$$
$$g(\xi)=(1-\xi^2)^{h/2},\quad e(\xi)=2(1-\xi^2)^{h/2}/B(1/2,\ h/2),$$

где $B(p,\ q)$ — бета-функция.

Параметр β в данном случае имеет вид

(3.9)
$$\beta=2^{-1}hB(1/2,\ h/2).$$

При малых $h(h\ll 1)$ из (3.9) следует $\beta\simeq 1+h\ln 2$, при больших $h(h\gg 1)$ из (3.9) получается асимптотическая формула $\beta\simeq\sqrt{\pi h/2}$. Приведем выражения для функций $f_h(\xi)$, $g_h(\xi)$, $e_h(\xi)$, т. е. функций $f(\xi)$, $g(\xi)$, $e(\xi)$ по (3.6)—(3.8) для некоторых конкретных значений h, и соответствующие значения β

(3.10)
$$f_0=\begin{cases}1, & 0\leqslant\xi<1,\\ 0, & \xi=1,\end{cases}\quad g_0=\begin{cases}1, & 0\leqslant\xi<1,\\ 0, & \xi=1,\end{cases}\quad e_0=0,\ \beta_0=1,$$
$$f_1=1-2(\arcsin\xi)/\pi,\ g_1=(1-\xi^2)^{1/2},\ e_1=2(1-\xi^2)^{1/2},\ \beta_1=\pi/2,$$
$$f_2=1-\xi,\ g_2=1-\xi^2,\ e_2=1-\xi^2,\ \beta_2=2,$$
$$f_3=1-2(\xi\sqrt{1-\xi^2}+\arcsin\xi)/\pi,\ g_3=(1-\xi^2)^{3/2},$$
$$e_3=4(1-\xi^2)^{3/2}/\pi,\ \beta_3=3\pi/4,$$
$$f_4=1-3(3-\xi^2)/2,\ g_4=(1-\xi^2)^2,\ e_4=3(1-\xi^2)^2/2,\ \beta_4=8/3.$$

Для описания трассового процесса в предположениях, ухудшающих условия его протекания, можно занизить электропроводность трассоида, упростив вместе с тем расчеты. Это можно осуществить, в частности, пренебрегая ионизирующей ролью поля, которое проникает в объем трассоида, предположив, что поле волны ионизирует воздух лишь на поверхности трассоида. В этом случае ионизация в любой точке возникает в момент прохождения через нее поверхности трассоида, после чего точка оказывается внутри объема трассоида, и в ней происходит релаксационное уменьшение коэффициента ионизации вследствие рекомбинационных процессов. В результате в каждой точке внутри трассоида некоторое время существуют ионизованное состояние и соответствующая удельная электропроводность, которую можно назвать реликтовой. Еще одно ухудшающее предположение состоит в расчете тока в трассоиде без учета роли нагрева и понижения плотности воздуха в трассе, особенно у ее оси.

Электрическое поле создает в газе концентрацию электронов $n_1 = \chi_1/\chi_2$, где χ_1 — коэффициент размножения электронов, выражаемый через первый параметр Таунсенда α_1 и скорость дрейфа электронов v формулой $\chi_1 = \alpha_1 v$; χ_2 — коэффициент рекомбинации [2]. Если поле E_1, создавшее концентрацию n_1, мгновенно исчезает, концентрация электронов начинает спадать от величины $n_1 = \chi_1/\chi_2$ при значении χ_1, соответствующем имевшемуся полю, до нуля по уравнению (1) работы [2] при $\chi_1 = 0$, т. е. по уравнению $dn/dt = -\chi_2 n^2$. Концентрация n будет, таким образом, спадать по закону

$$n = n_1/(1 + \chi_1 t) = 1/\chi_2(t + \tau_1),\ \tau_1 = 1/\chi_1,\ \chi_1 = \alpha_1 v, \tag{3.11}$$

где α_1 и v соответствуют полю E_1, создавшему концентрацию n_1.

Опытные значения первого коэффициента Таунсенда α_1 в зависимости от напряженности поля E и относительной плотности воздуха δ (плотности воздуха в единицах его плотности при температуре $T_0 = 273{,}16$ К и давлении $p_0 = 10^5$ Н/м^2) приближенно передаются формулой (с точностью примерно 30%)

$$\begin{gathered}\alpha_1/\delta = A_1(E/\delta)^{1/2} \exp(-B_1\delta/E),\ A_1 = 120\ \text{В}^{-1/2}\cdot\text{м}^{-1/2},\\ B_1 = 1{,}5\cdot 10^7\ \text{В}\cdot\text{м}^{-1},\ 3\cdot 10^6\ \text{В/м} \leqslant E/\delta \leqslant 3\cdot 10^8\ \text{В/м}.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Молнии обычно переносят отрицательные заряды [3], поэтому ниже для конкретности рассматриваются отрицательные (электронные) трассоиды. Экспериментальная зависимость скорости дрейфа электронов от напряженности поля может быть представлена (с точностью примерно 30%) в виде

$$\begin{gathered}v = \varkappa_1 E/\delta \text{ при } 0{,}3\cdot 10^6\ \text{В/м} \leqslant E/\delta \leqslant 3\cdot 10^6\ \text{В/м},\\ v = \varkappa_0(E/\delta)^{1/2} \text{ при } 3\cdot 10^6\ \text{В/м} \leqslant E/\delta \leqslant 300\cdot 10^6\ \text{В/м},\\ \varkappa_1 = 0{,}057\ \text{м}^2\cdot\text{В}^{-1}\cdot\text{с}^{-1},\ \varkappa_0 = 100\ \text{м}^{3/2}\cdot\text{В}^{-1/2}\cdot\text{с}^{-1}.\end{gathered} \tag{3.13}$$

Значения коэффициента рекомбинации χ_2 (определяемого диссоциативным механизмом) приведены в [20]. Коэффициент χ_2 зависит от средней энергии электронов, убывая с ростом этой энергии. Средняя энергия электронов, ускоряемых в газе сильным ионизирующим полем, близка к энергии ионизации газа [21, 22]. Для воздуха потенциал ионизации равен примерно 15 В, и средняя энергия электронов в воздухе при сильном ионизирующем поле близка к этой величине. Так, в воздухе нормальной плотности при напряженностях 10^7—10^8 В/м, типичных для трассоидов, средняя энергия электронов равна примерно величине $\varepsilon = 10$ эВ. Зависимость коэффициента рекомбинации χ_2 от средней энергии электронов ε дается формулой [20] $\chi_2 = \chi_2^0 \varepsilon^{-1,8}$, где ε — энергия, эВ; $\chi_2^0 = 0{,}8 \times \times 10^{-13}$ м^3/с. Поскольку это значение получено экстраполяцией, оно требует экспериментального уточнения и используется ниже лишь для ориентировочных приближенных оценок.

Введем цилиндрические координаты r, φ, x с осью x, совпадающей с осью трассоида. Пусть r — радиальная координата поверхности трассоида в рассматриваемом поперечном сечении x, r' — радиальная координата рассматриваемой точки внутри трассоида в том же сечении, $r - r'$ — глубина точки внутри трассоида, v_0 — средняя радиальная скорость поверхности трассоида. Время t, прошедшее с момента прохождения поверхности трассоида через рассматриваемую точку, равно $t = (r - r')/v_0$. Поскольку это есть время нахождения точки внутри трассоида, ионизация в рассматриваемой точке релаксирует в течение такого времени, и концентрация электронов по (3.11) $n = v_0/\chi_2(r - r' + d_1)$, $d_1 = 1/\alpha_1$. Плотность тока вдоль трассоида $J = e_0 n v$, где e_0 — заряд электрона; v — продольная компонента скорости дрейфа. Продольная компонента $E = E_x$ электрической напряженности на поверхности трассоида много меньше поперечной компоненты E_r, примерно равной полной напряженности, а продольная компонента $v = v_x$ скорости дрейфа электронов много меньше поперечной компоненты $v_0 = v_r$, примерно равной полной скорости. Поэтому поперечная компонента v_0 скорости выражается через поперечную компоненту E_1 напряженности поля по (3.13), а продольная компонента скорости дрейфа $v = v_0 E/E_1$, где E — продольная компонента электрической напряженности. Для плотности тока имеем (при $\delta = 1$)

$$J = \sigma E = e_0 \varkappa_0^2 E/\chi_2 (r - r' + d_1). \quad (3.14)$$

При выводе этой формулы не учтено прилипание, которое при уменьшении поля ниже 3 МВ/м становится значительным. В целом при уменьшении поля до критической величины $E_0^* = 3$ МВ/м электропроводность в трассоиде исчезает из-за рекомбинации (за времена τ_1 порядка 10^{-8}—10^{-10} с) в связи с очень резким снижением коэффициента ионизации (3.12) и вследствие возникающего прилипания (с характерным временем 10^{-8} с).

Трассоид, возникнув в точке пересечения оси трассы и поверхности облака, удлиняется со скоростью света, расширяясь со скоростью дрейфа, и имеет тем больше радиус поперечного сечения, чем дальше это сечение от вершины (поскольку в этом сечении дольше происходил процесс расширения). Таким образом, трассоид имеет сильно вытянутую иглообразную форму с нулевым радиусом поперечного сечения в вершине $x = x_0(t)$ и максимальным в основании $x = 0$. Поэтому поверхность трассоида (3.1) целесообразно аппроксимировать полуэллипсоидом вращения:

$$x^2/x_0^2 + r^2/r_0^2 = 1, \quad x \geqslant 0. \quad (3.15)$$

Выше поверхность трассоида аппроксимировалась расходящимся конусом. Это отвечает условию максимальной математической простоты при решении уравнений Максвелла для волны, расходящейся из точки. При бесконечной электропроводности трассоида, когда джоулевых потерь в трассоиде нет, аппроксимация трассоида расширяющимся (по мере удаления от облака) телом не искажает значительно картину распространения по сравнению с более точной аппроксимацией телом сужающейся формы. Для учета конечной электропроводности необходима более точная аппроксимация, каковой является (3.15).

Радиус поперечного сечения трассоида на расстоянии x от поверхности облака представим в виде $r = r_0(t)\eta(\xi)$, где $\eta = r/r_0(t)$ — безразмерный радиус поперечного сечения; $\xi = x/x_0(t)$. Для (3.15) имеем

$$r = r_0(t)\eta(\xi),\ \eta(\xi) = (1 - \xi^2)^{1/2}. \tag{3.16}$$

Полный ток вдоль трассоида получится интегрированием (3.14) по всей площади поперечного сечения. Умножив (3.14) на $2\pi r'dr'$ и проинтегрировав по r' от 0 до r, получим

$$I = E/R = 2\pi e_0\varkappa_0^2\Omega rE/\chi_2, \tag{3.17}$$

где $\Omega = (1 + 1/\alpha_1 r)\ln(\alpha_1 r + 1) - 1$. При напряженностях порядка 10^7—10^8 В/м, определяющих ионизацию в трассоиде, и $\delta = 1$ величина $d_1 = 1/\alpha_1$ по (3.12) порядка 10^{-6}—10^{-5} м. Радиус r поперечного сечения трассоида порядка метра. Поэтому $\alpha_1 r = r/d_1 \gg 1$ и ввиду логарифмической, т. е. очень слабой, зависимости Ω от $\alpha_1 r$ в расчетах может быть принято единое для всех поперечных сечений трассоида значение $\Omega = \Omega_0$, определенное по характерной величине радиуса $r = r_0$. Таким образом, $\Omega \simeq \Omega_0 = \ln\alpha_1 r_0$. Из (3.17), (3.4), (2.18), (3.15), (3.2) следует

$$h = h_0/\eta(\xi),\quad h_0 = \varepsilon_0 c_0 \nu_0 \chi_2/e_0\varkappa_0^2\Lambda_0\Omega_0,\quad \Omega_0 = \ln\alpha_1 x_0/\nu_0. \tag{3.18}$$

Решение (3.6) для (3.18), (3.15) принимает вид

$$f(\xi) = \frac{1}{K_1(h_0)}\int\limits_{\xi}^{1}\frac{\exp[-h_0/(1-\xi^2)^{1/2}}{(1-\xi^2)^{3/2}}d\xi, \tag{3.19}$$

$$g(\xi) = \exp\left[-h_0\frac{1-(1-\xi^2)^{1/2}}{(1-\xi^2)^{1/2}}\right],\quad e(\xi) = \frac{\exp[-h_0/(1-\xi^2)^{1/2}]}{K_1(h_0)(1-\xi^2)^{1/2}},$$

где K_1 — функция Макдональда. При $h_0 \ll 1$ $\beta = 1 + h_0 + 0{,}5h_0^2\ln h_0/2 + 0{,}03681h_0^2$, при $h_0 \gg 1$ $\beta \simeq \sqrt{\pi h_0/2}$. В (3.19), как и в (3.10), наряду с (2.13), $e(1) = 0$, однако возможны решения, в которых $e(1) \neq 0$.

Заряды в трассоиде ввиду его высокой электропроводности сконцентрированы в поверхностном слое. Поверхностная плотность заряда ω выражается через заряд Q единицы длины трассоида формулой $\omega = Q/2\pi r$. По граничному условию напряженность E_1 на поверхности трассоида будет $E_1 = \omega/\varepsilon_0 = Q/2\pi\varepsilon_0 r$. С помощью (3.4), (2.6), (2.16) находим

$$E_1 = fE_0 r_0/r = fE_0/\eta,\ E_0 = V_0/\Lambda_0 r_0 = \nu_0 V_0/\Lambda_0 x_0 \tag{3.20}$$

(E_0 — напряженность в основании трассоида $x = 0$), где по (2.13), (3.4), (2.15), (2.16) $f = 1$, $\eta = 1$. Всегда $\eta \leqslant 1$ и обычно $f \simeq 1$ на всей длине трассоида, кроме весьма узкой прифронтовой зоны. Напряженность (3.20) значительно превышает критическую величину $E_0^* = 3$ МВ/м. Так, при $V_0 = 10^8$ В [3, 12], $\nu_0 \simeq 10^3$ (что, как увидим, реально имеет место), $\Lambda_0 = \ln 2\nu_0 = 7{,}6$ для $x_0 = 10^3$ м имеем наименьшую величину напряженности на поверхности трассоида $E_0 = 1{,}3\cdot10^7$ В/м, уже полученную выше с помощью уравнений Максвелла для трассоидов конической формы. Почти по всей длине трассоида обычно $f \simeq 1$, и по (3.20) получается $E_1 > E_0$. Типичным диапазоном напряженностей E_1 на поверхности трассоида является интервал от 10^7 до 10^8 В/м. При вычисленной напряженности $1{,}3\cdot10^7$ В/м характерное время спада ионизации после отключения поля по (3.11) $\tau_1 = 1/\chi_1 = 1/\alpha_1 v$ с учетом (3.12), (2.13) равно $0{,}2\cdot10^{-10}$ с, при характерной длине трассоида $x_0 = 1$ км параметр Ω_0 в (3.18) равен 12 и ввиду своего логарифмического характера очень слабо (при $\alpha_1 r_0 \gg 1$) зависит от конкретных условий.

«Самоионизация» трассоидов в сочетании с электромагнитной скоростью распространения трассовых волн приводит к наблюдаемым большим длинам молний. Расширение трассоида со скоростью дрейфа не успевает за время распространения трассовой волны со скоростью света на километровые расстояния привести к напряженности поля на поверхности трассоида ниже критической величины $E_0^* = 3$ МВ/м, при которой прекращается ионизационный процесс и исчезает электрическая связь с облаком как источником энергии молнии. Вместе с тем напряженность (3.20) существенно связана с электромагнитной природой процесса. При высоких питающих потенциалах, когда распространение имеет сильно выраженный электромагнитный характер и происходит квазиидеально ($\beta \simeq 1$), величины Q_0 и I_0, т. е. значения Q и I в основании трассы, связаны соотношением $Q_0 = I_0/c_0$, как это следует из (3.4), (2.13) или из (2.19). Существование достаточно сильных токов, равных при квазиидеальном распространении по (2.19), (3.4), (2.13) $I_0 \simeq V_0/Z_0$, связано со значениями $Q_0 \simeq I_0/c_0 = V_0/c_0 Z_0$, приводящими с учетом (2.18) к высокой напряженности E_0 по (3.20). В электростатической картине для хорошо проводящего стримера, ограниченного поверхностью (3.15) и примыкающего срезом к хорошо проводящей поверхности электрода, с помощью известного решения электростатической задачи о проводящем эллипсоиде во внешнем поле [19] можно убедиться, что $E_0 = 0$. Напряженность поля на поверхности стримера вблизи электрода получается меньше критической величины $E_0^* = 3$ МВ/м, и электропроводность в стримере у поверхности электрода не возникает. Стример оказывается отключенным, изолированным от электрода, и не может получать из него энергию от источника. Поэтому стримеры в воздухе нормальной плотности развиваются лишь в достаточно сильных внешних полях порядка 3 МВ/м или более, когда они могут черпать энергию, необходимую для их развития, непосредственно из внешнего поля. В электромагнитной картине релаксационной теории энергия транспортируется вдоль трассы разряда в форме электромагнитного потока от очень мощного источника (облака), расположенного в основании трассы. Это происходит, однако, лишь во время стадий электромагнитной активности. В начальные моменты штилевых стадий возникает электростатическое равновесие трассы и облака, электрическая напряженность на поверхности трассы в ее основании, т. е. на границе с облаком, обращается в нуль, и электропроводность в основании трассы исчезает. В начальные моменты штилевых стадий трасса, таким образом, электрически отключается от облака и развивается в штилевых стадиях автономно, не получая из облака энергию и заряд вплоть до возникновения трассовой волны очередного цикла.

Радиус r_0 основания трассоида возрастает по уравнению $dr_0/dt = v$, где скорость v определена по (3.13) при $E = E_0$ по (3.20). Трассоид возникает в точке $x = 0$, $r = 0$, поэтому $r_0(0) = 0$. Поскольку трассоид удлиняется со скоростью света c_0, его вершина $x = x_0$ достигает вершины трассы $x = a_0$ в момент $t_0 = a_0/c_0$. В этот момент радиус $r_0(t)$ основания трассоида (где его поперечное сечение максимально) достигает наибольшей величины $b_0 = r_0(t_0)$. Средняя скорость расширения трассоида в его основании $v_0 = b_0/t_0 = b_0 c_0/a_0$. Таким образом, при $\delta = 1$ с учетом (3.2) имеем

$$b_0 = (9\varkappa_0 a_0^2 V_0/4c_0^2\Lambda_0)^{1/3}, \quad v_0 = (9c_0\varkappa_0^2 V_0/4\Lambda_0 a_0)^{1/3} = c_0/\nu_0. \tag{3.21}$$

В решении «продольной» задачи поперечное расширение трассоида в его основании принимается по (3.2) происходящим с постоянной скоростью, равной v_0 по (3.21).

При распространении трассовой волны радиус r_0 основания ее трассоида возрастает со временем, а напряженность поля E_0 на поверхности трассоида в основании $x = 0$ по (3.20) уменьшается. В момент, когда напряженность E_0 достигает критической величины $E_0^* = 3$ МВ/м, электропроводность в участке трассы, примыкающем к облаку, исчезает (за времена порядка 10^{-8}—10^{-10} с). Трасса молнии оказывается электрически отключенной, изолированной от облака, и поток энергии из облака прекращается. При этом трассовая волна, вообще говоря, может распространиться далее на некоторое расстояние как прямоугольный электромагнитный импульс конечной длины вдоль волновода. Это распространение уже не поддерживается источником, и трассовая волна быстро затухает, израсходовав накопленный запас энергии. Для простоты примем, что распространение трассовой волны прекращается сразу же после отключения трассы от облака. Поскольку напряженность на поверхности основания трассоида равна по (3.20) $E_0 = V_0/\Lambda_0 r_0$, наибольший возможный радиус $r_0 = b_0^*$, определяемый условием $V_0/\Lambda_0 b_0^* = E_0^*$, будет максимальным радиусом основания наибольшего трассоида (трассоида последнего цикла), а длина $a_0 = a_0^*$ этого трассоида определится с помощью (3.21). Обозначив $a_0^* = l$, $b_0^* = s$, с учетом (3.2) имеем

$$l = 2c_0 V_0/3\Lambda_0 \varkappa_0 (E_0^*)^{3/2}, \quad s = V_0/\Lambda_0 E_0^*, \tag{3.22}$$

$$\nu_0 = 2c_0/3\varkappa_0 (E_0^*)^{3/2}, \quad \Lambda_0 = \ln 2\nu_0.$$

Поскольку величина l есть наибольшая во всех циклах длина трассоида, она является длиной молнии. Величина s, т. е. наибольший во всех циклах радиус основания трассоида, есть максимальный радиус светимости молнии. Подставив в (3.22) значения $c_0 = 3 \cdot 10^8$ м/с, $E_0^* = 3 \cdot 10^6$ В/м и по (3.13) $\varkappa_0 = 10^2$ м$^{3/2}\cdot$В$^{-1/2}\cdot$с$^{-1}$, из (3.22) находим $\nu_0 = 1150$, $\Lambda_0 = 7{,}74$.

Для l и s получаются выражения $l = 5{,}0 \cdot 10^{-5}\ V_0$, м, $s = 4{,}3 \times 10^{-8}\ V_0$, м. Потенциалы V_0 грозовых облаков находятся в диапазоне от $3 \cdot 10^7$ до 10^{10} В [3, 12, 5, 15, 7].

При наименьшем потенциале $3 \cdot 10^7$ В длина молнии получается равной 1,5 км, радиус светимости 1,3 м. Опытная минимальная длина молнии 2 км [3] и 1 км [12], минимальный наблюдавшийся радиус светимости распространяющейся молнии 0,5 м [3]. При наиболее вероятной величине потенциала облака 10^8 В [3, 12] теоретическая длина молнии 5 км, радиус светимости 4,3 м. Опытная наиболее вероятная («характерная») длина молнии 5 км [3, 5, 7]. Радиусы светимости молнии находятся в интервале от 0,5 до 5 м, к которому относится и вычисленная величина. При потенциале облака $3 \cdot 10^8$ В [5] длина молнии получается равной 15 км, по опытным данным 14 км [5]. Теоретическая величина максимального радиуса светимости в этом случае 13 м, соответствующих опытных данных, по-видимому, нет. Столь длинные молнии обычно горизонтальны, развиваются внутри облаков, где измерения параметров трассы разряда затруднены. При потенциале облака $4 \cdot 10^9$ В [15] теоретическая длина молнии 200 км. Наибольшая длина фактически наблюдавшихся молний 150—160 км [11, 6]. Величина потенциала 10^{10} В [3] является фактически нереализующимся верхним пределом, и поэтому молнии с соответствующей длиной в 500 км не возникают. Итак, релаксационная теория определяет длины молний в согласии с результатами наблюдений. Заметим, что по стримерной теории длина молнии должна составлять 0,2 км [10], что в 25 раз меньше опытной характерной длины молнии 5 км [3, 5, 7] и в 750 раз меньше опытной максимальной длины молнии 150 км [11, 6].

При распространении трассовой волны возможны условия, в которых высокая электропроводность, включаемая в трассе полем волны за ее фронтом, возникает не сразу за фронтом, а на некотором расстоянии от него. Это происходит, когда электрическая напряженность волны сравнительно невелика и достигает величины, достаточной для лавинной ионизации, лишь на некотором расстоянии от фронта. Тогда в месте включения высокой электропроводности возникает второй, в данном случае основной, фронт. Электропроводность трассы в межфронтовой зоне — области между передним и основным фронтами — связана с начальной затравочной ионизацией трассы и весьма мала. Хотя относительные потери энергии поля волны в межфронтовой зоне велики, основной поток энергии идет за основным фронтом и по отношению к полной энергии поля волны потери в межфронтовой зоне пренебрежимо малы. Поэтому потери энергии трассовой волны определяются диссипацией в области за основным фронтом, и если там относительные потери энергии невелики, распространение происходит почти идеально со скоростью основного фронта, очень близкой к скорости света. Заметим, что по известной теореме Зоммерфельда — Бриллюэна [19] передние фронты электромагнитных возмущений распространяются с фундаментальной скоростью (скоростью света в вакууме) независимо от свойств среды, а за передним фронтом следует обычно на близком расстоянии основной фронт, скорость которого зависит от конкретных условий распространения.

Распространение трассовой волны с передним и основным фронтами проще всего может быть описано с помощью кусочно-постоянной функции $h(\xi)$ в (3.4). В области $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$ за основным фронтом $\xi = \xi_1$ полем волны включается высокая электропроводность, характеризуемая величиной $h = h_0$, а в межфронтовой области $\xi_1 < \xi \leqslant 1$, где электропроводность соответствует исходной затравочной ионизации и весьма мала, $h = h_1 \gg h_0$. Поскольку функция $h(\xi)$ всюду конечна, $h \neq \infty$, из (3.6), (2.13) следует $\gamma = 1$, т. е. передний фронт $x_0(t)$ по (3.4) распространяется со скоростью света, $x_0 = c_0 t$. Основной фронт $x_1(t)$ распространяется при этом по (3.4) со скоростью $c_1 = \xi_0 c_0$, $x_1 = c_1 t = \xi_1 c_0 t$. Параметр ξ_1 определяется с помощью решения (3.6) и дополнительного условия, выражающего, что напряженность E_1 на поверхности трассоида, определяемая по (3.20), равна на основном фронте $x = x_1$, $\xi = \xi_1$, где $r = r_1$, критической напряженности $E_0^* = 3$ МВ/м, при которой происходит включение высокой электропроводности в трассе:

$$f(\xi_1)\,\eta^{-1}(\xi_1)\,E_0 = E_0^*. \tag{3.23}$$

Из решения (3.6) для условий, когда $h_0/h_1 \ll 1$, $1 - \xi_1 \ll 1$, следует

$$f(\xi_1) = \beta^{-1}(1-\xi_1)^{h_0/2}, \quad \beta = 2^{-1} h_0 B(1/2,\, h_0/2), \tag{3.24}$$

где $B(p,\, q)$ — бета-функция. В случае цилиндрического трассоида $r = r_0$ имеем $r_1 = r_0$, $\eta(\xi_1) = 1$ и для условий, когда $1 - \xi_1 \ll 1$, с помощью (3.23), (3.24) находим скорость $c_1 = \xi_1 c_0$ основного фронта

$$c_1 = \left[1 - 2^{-1}\left(\beta E_0^*/E_0\right)^{2/h_0}\right] c_0. \tag{3.25}$$

Используя определенные выше величины $\nu_0 = 1{,}150\cdot10^3$, $\Lambda_0 = 7{,}74$, $\Omega_0 = 12$, $\chi_2 = 10^{-15}$ м³/с, $\varkappa_0 = 100$ м$^{3/2}$/В$^{1/2}\cdot$с и приняв $\delta = 1$, по (3.18) находим $h_0 = 0{,}02$, $\beta = 1{,}02 \simeq 1$ и по (3.25) $c_1 = [1 - 2^{-1}(E_0^*/E_0)^{100}]c_0$. Поскольку $E_0^* = 3$ МВ/м и по приведенной выше оценке $E_0 = 13$ МВ/м, имеем $c_1 \simeq (1-2\cdot10^{-64})\ c_0$, т. е. практическое совпадение переднего и основного фронтов. Реально трассоид имеет форму, расширяющуюся от головы к основанию, т. е. примерно форму (3.15). В точках $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$ по (3.18), (3.16) $h = h_0/(1 - \xi^2)^{1/2}$, а при $\xi > \xi_1$ значение h определяется исходной малой ионизацией зарядовой дорожки (участка трассы перед фронтом волны), вдоль которой происходит распространение. Если при $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$ $h = h_0/(1 - \xi^2)^{1/2}$, а при $\xi > \xi_1$ для фактической величины h имеет место $h < h_1 = h_0/(1 - \xi_1^2)^{1/2}$, основной фронт движется быстрее, чем в случае, когда $h = h_0/(1 - \xi^2)^{1/2}$ во всем интервале $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Действительно, вдоль идеальной линии ($h = 0$) основной фронт, как и передний, распространяется со скоростью света, а при $h \neq 0$ с уменьшением h скорость распространения возрастает. Поэтому нижняя оценка скорости основного фронта при $h < h_1$ может быть получена с помощью (3.23) при (3.16), (3.19).

По (3.5) $dg = \beta\gamma\xi df$, и, поскольку $\gamma = 1$ и при $h_0 \ll 1$ $\beta \simeq 1$, с учетом (2.13) имеем для окрестности точки $\xi = 1$, $1 - \xi \ll 1$, $f \simeq g$. Уравнение (3.23) имеет вид

$$\eta(\xi_1) = k_0 g(\xi_1), \tag{3.26}$$

где $k_0 = E_0/E_0^*$. Отсюда с помощью (3.16), (3.19) при $h_0 \ll 1$ получается уравнение для $\xi_1 : \eta_1 = \ln k_0\eta_1^{-1} = h_0$, $\eta_1 = \eta(\xi_1)$ по (3.16). При $h_0 = 0{,}02$, $E_0 = 13$ МВ/м, $E_0^* = 3$ МВ/м находим $\xi_1 = 0{,}999\,996$. Таким образом, скорость основного фронта $c_1 = \xi_1 c_0$ почти совпадает со скоростью переднего фронта, т. е. со скоростью света.

Рассмотренные решения описывают распространение локально питаемых трассовых волн при отсутствии внешнего поля. Реально они относятся к обычным для молнии случаям, когда роль фактически имеющегося внешнего поля в ионизации газа в трассоиде пренебрежимо мала по сравнению с ролью собственного поля распространяющейся волны. Если внешнее поле существенно влияет на ионизацию газа в трассоиде, условия распространения трассовых волн улучшаются. Собственное поле трассовой волны на поверхности трассоида почти нормально к этой поверхности, поскольку продольная компонента мала по сравнению с поперечной. Внутри трассоида поперечная компонента пренебрежимо мала, так как она связана с зарядами трассоида, сконцентрированными на его поверхности. Поэтому внутри трассоида основной является продольная компонента электрического поля волны, т. е. электрическое поле трассовой волны внутри трассоида продольно (параллельно оси трассы). Это поле обычно мало и недостаточно для ионизации газа внутри трассоида. Если имеется продольное внешнее поле, примерно равное критической величине $E_0^* = 3$ МВ/м, собственное продольное поле волны, складываясь с внешним полем, приводит к интенсивной ионизации во всем объеме трассоида, что создает высокую его электропроводность. В отличие от реликтовой электропроводности, создаваемой поверхностным полем и сконцентрированной у поверхности трассоида, возникающая при наличии внешнего поля «активная» электропроводность носит объемный характер. В связи с этим, описывая распространение трассовых волн в сильных внешних полях, для упрощения расчетов реликтовую электропроводность можно не учитывать. Фактические условия распространения трассовых волн благоприятнее, поскольку потери энергии трассовых волн тем меньше, чем больше электропроводность, возникающая в трассоидах.

Пусть в некоторый объем газа приходит поле с электрической напряженностью E, вызывающей ионизацию. Вместе с тем происходит интенсивный процесс рекомбинации. В результате в единице объема газа устанавливается плотность числа электронов, равная [2] $n_1 = \chi_1/\chi_2$, где $\chi_1 = \alpha_1 v$ — коэффициент размножения электронов; α_1 и v определены по (3.12), (3.13). Плотность тока равна $J = e_0 n_1 v = e_0 \alpha_1 v^2/\chi_2$. С помощью (3.12), (3.13) и приведенного выше значения $\chi_2 = 10^{-15}$ м³/с для плотности тока находим

(3.27) $J/\delta = C_1(E/\delta)^{3/2} \exp(-B_1\delta/E), \quad C_1 = 192\ \text{Кл}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{В}^{-3/2}\cdot\text{м}^{-3/2}.$

Для математической простоты эта зависимость аппроксимируется приближенной формулой

(3.28)
$$J = \sigma(E - E^*)^2 = \sigma_0\delta^{-1}(E - E_0^*\delta)^2,$$
$$\sigma_0 = 2{,}6\cdot 10^{-2}\,\text{А/В}^2,\ E_0^* = 3\cdot 10^6\,\text{В/м},$$

причем при $E < E^*$ плотность тока считается равной нулю. Эта формула в наиболее важном диапазоне E/δ от $3\cdot 10^6$ до $3\cdot 10^7$ В/м занижает плотность тока, определенную по (3.27), при этом в интервале от $5\cdot 10^6$ до $3\cdot 10^7$ В/м воспроизводит ее с точностью до 10%. (Аналогичные формулы для плотности тока в [1, 2] были связаны с ошибочными исходными данными.)

Наиболее интересным и простым математически является случай, когда внешнее поле параллельно оси трассы и равно по величине критическому значению E^*, соответствующему началу локального пробоя (интенсивно нарастающей лавинной ионизации в рассматриваемой точке). В этом случае полная продольная напряженность будет равна $E' = E^* + E$, где E — продольная напряженность поля волны. Тогда, подставив в (3.28) в качестве E величину $E' = E^* + E$ (где теперь величина E связана с полем волны), получим

(3.29)
$$J = \sigma E^2 = \sigma_0\delta^{-1}E^2,\ \sigma_0 = 2{,}6\cdot 10^{-2}\ \text{А/В}^2.$$

Пусть $S = S(x) = \pi r^2(x)$ — поперечное сечение трассоида на расстоянии x от облака. Ток через это поперечное сечение $I = JS$, при этом по (3.29) $E = (I/\sigma S)^{1/2}$. Обозначая далее через E и I соответствующие величины с учетом их знаков (а не по абсолютной величине, как выше) и используя (3.16), найдем

(3.30)
$$E = I(\pi r^2\sigma|I|)^{1/2}.$$

Система (2.5), (3.30) подстановкой (3.4) с учетом (3.16) сводится к уравнениям

(3.31)
$$(1 - \gamma^2\xi^2)\eta\, df/d\xi + \sqrt{2g/\alpha\beta} = 0,$$
$$(1 - \gamma^2\xi^2)\eta\, dg/d\xi + \beta\gamma\xi\sqrt{2g/\alpha\beta} = 0,$$
$$\beta\eta e = \gamma\eta\xi\, dg/d\xi - \beta\eta\, df/d\xi = \sqrt{2\beta g/\alpha}.$$

Граничные условия (3.3), (2.10) с принятой нормировкой $f(0) = 1$, $g(0) = 1$ принимают вид (2.13). Трассовый параметр α в (3.31) имеет вид

(3.32)
$$\alpha = \sigma_0\Lambda_0 V_0/\varepsilon_0 c_0 v_0^2\delta.$$

Решение системы (3.31) при (2.13) находим в виде

(3.33) $$f(\xi) = \alpha^{-1}\int_{\xi}^{1} G(\xi)\,d\xi/(1-\gamma^2\xi^2), \quad g(\xi) = \beta G^2(\xi)/2\alpha,$$

$$e(\xi) = G(\xi)/\alpha\eta(\xi), \quad G(\xi) = \gamma\int_{\xi}^{1}\xi d\xi/(1-\gamma^2\xi^2)\,\eta(\xi),$$

где зависимость параметров β и γ от α выражается уравнениями

(3.34) $$\beta = 2\alpha G^2(0), \quad \int_0^1 G(\xi)\,d\xi/(1-\gamma^2\xi^2)\,\eta(\xi) = \alpha.$$

Решение (3.33), (3.34) для эллиптической формы трассоида (3.15) приведено в [1]. При $\alpha \ll 1$ это решение имеет вид $f(\xi) = 1 - \xi$, $g(\xi) = 1 - \xi^2$, $e(\xi) = 1$, зависимость параметров β, γ от α дается разложениями $\beta = 2/\alpha + 10\alpha/9 + \ldots$, $\gamma = \alpha - 10\alpha^3/9 + \ldots$ При $\alpha \gg 1$, что соответствует условиям молнии, решение имеет вид $f(\xi) \simeq 1$, $g(\xi) \simeq 1$, $e(\xi) \ll 1$ при всех ξ, кроме узкой прифронтовой зоны шириной $\Delta\xi = 1 - \gamma = \pi^2/16\alpha$, где $f(\xi)$ и $g(\xi)$ быстро спадают до нулевых значений на фронте, $e(\xi)$ быстро нарастает до значения на фронте $e(1) = 8\pi^2$. Параметры β и γ выражаются асимптотическими формулами

$$\beta \simeq 1 + \sqrt{2/\alpha}, \quad \gamma \simeq \sqrt{8\alpha/(8\alpha+\pi^2)} \simeq 1 - \pi^2/16\alpha.$$

С помощью найденных выше значений $\sigma_0 = 0{,}026$ А/В^2, $\nu_0 = 1150$, $\Lambda_0 = 7{,}74$ для $V_0 = 10^8$ В по (3.32) находим $\alpha = 5730$. Величины β и γ получаются равными $\beta = 1{,}02$, $\gamma = 0{,}9999$. Фронт $x_0 = \gamma c_0 t$ является в данном случае основным, поскольку напряженность поля на фронте превышает критическую величину $E_0^* = 3$ МВ/м. Действительно, напряженность внешнего поля по принятому условию равна в этом случае E_0^* и добавление поля волны приводит к интенсивной ионизации сразу за фронтом, где поле волны имеет конечную величину. Передний фронт в рассматриваемых условиях отсутствует, так как не учтены реликтовая и затравочная электропроводности. Скорость основного фронта $c = \gamma c_0 = 0{,}9999\,c_0$ практически не отличается от скорости света c_0.

Поскольку волновое сопротивление Z_0 является по определению входным сопротивлением идеальной линии, трасса ведет себя по отношению к трассовой волне заданной мощности тем идеальнее, чем ближе входное сопротивление Z к волновому Z_0. Поэтому условием идеальности трассы как волноводной линии для трассовых волн, переносящих энергию молнии, является

(3.35) $$Z' \equiv Z - Z_0 \ll Z_0.$$

Можно показать, что величина Z' отличается от определенного выше диссипативного сопротивления Z_1, определяющего джоулевы потери, лишь множителем порядка единицы и величина $\zeta = Z'/Z_0 \simeq Z_1/Z_0$ выражает (при $Z' \ll Z_0$) долю энергии, теряемую трассовой волной при ее распространении. Условие идеальности распространения (3.35) с учетом (3.4) может быть записано в виде

(3.36) $$D \equiv Z_0/(Z - Z_0) = 1/(\beta - 1) \gg 1.$$

Теряемая доля энергии равна $\zeta = 1/D$. Величина D, выражающая условием $D \to \infty$ идеальность распространения, аналогична добротности. Обычное понятие добротности относится к линейным системам. Молниевая трасса такой системой не является, поскольку ее электропроводность зависит от поля распространяющейся волны. Однако величина D по (3.36) характеризует отклонение процесса от идеального и при $D \to \infty$ определяет распространение без потерь. В этом смысле величина D может рассматриваться как добротность, которая, однако, зависит не только от свойств трассы, но и от мощности распространяющейся волны. Из (3.36) при больших D для решений (3.4), (3.19) и (3.4), (3.33) при (3.15), (3.16) следуют выражения соответственно $D = 1/h_0$ и $D = \sqrt{\alpha/2}$. С помощью вычисленных значений h_0 и α для $V_0 = 10^8$ В, $h_0 = 0{,}02$ и $\alpha = 5730$ находим соответственно $D = 50$ и 54.

Заметим, что для значительной передачи энергии вдоль молниевой трассы достаточно, чтобы $D \approx 1$, поскольку при этом потери порядка переносимой энергии и большие величины энергии порядка электрической энергии облака могут достигать земли.

Поступила 30 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Козлов Б. Н.** Принципы релаксационной теории шаровой молнии.— «Докл. АН СССР», 1975, т. 221, № 4, с. 802; т. 224, № 1, с. 10.
2. **Козлов Б. Н.** Теория шаровой молнии.— «Физика плазмы», 1978, т. 4, № 1, с. 159.
3. **Юман М.** Молния. М., «Мир», 1972.
4. **Мейсон Б. Дж.** Физика облаков. Л., Гидрометеоиздат, 1961.
5. **Фью А.** Гром.— УФН, 1976, т. 119, № 4, с. 735.
6. **Мейсон Б.** Генерация зарядов в грозах.— В кн.: Проблемы атмосферного электричества. Л., Гидрометеоиздат, 1969.
7. **Сингер С.** Природа шаровой молнии. М., «Мир», 1973.
8. **Мик Дж., Крэгс Дж.** Электрический пробой в газах. М., ИЛ, 1960.
9. **Лозанский Э. Д., Фирсов О. Б.** Качественная теория стримера.— ЖЭТФ, 1969, т. 56, № 2, с. 670.
10. **Лозанский Э. Д., Фирсов О. Б.** Теория искры. М., Атомиздат, 1975.
11. **Имянитов И. М.** Молния.— БСЭ, 1974, т. 16, с. 468.
12. **Шонланд Б.** Полет молнии. М., Гидрометеоиздат, 1970.
13. **Шагин И. М.** Гроза на Черном море (фотоснимок).— «Огонек», 1960, № 20; «Природа», 1966, № 9, с. 84.
14. **Дмитриев М. Т.** Шаровые молнии: новые наблюдения и новые гипотезы.— «Природа», 1971, № 6, с. 50.
15. **Аллен К. У.** Астрофизические величины. М., ИЛ, 1960.
16. **Стекольников И. С.** Гроза на Черном море (пояснения к снимку И. М. Шагина).— «Огонек», 1960, № 20, с. 32.
17. **Козлов Б. Н.** О максимальном энерговыделении шаровой молнии.— «Докл. АН СССР», т. 238, № 1, с. 4.
18. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. М., «Наука», 1976.
19. **Стрэттон Дж. А.** Теория электромагнетизма. М., Гидрометеоиздат, 1948.
20. **Douglas-Hamilton D. H.** Recombination rate measurements in nitrogen.— «J. Chem. Phys.», 1973, vol. 58, N 11, p. 4820.
21. **Schlumbohm H.** Electronenlawinen bei hohen E/P.—«Z. für Phys.», 1965, Bd 182, N 3, S. 306.
22. **Lacshminarasimha C. S., Lucas J.** The ratio of radial diffusion coefficient to mobility for electrons in helium, argon, air, methan and nitric oxide.— «J. Phys. D: Appl. Phys.», 1977, vol. 10, N 3, p. 313.