

## ГЕОМЕХАНИКА

УДК 539.3

### ФОРМУЛИРОВКА АЛГОРИТМА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОНСТАНТ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ МАССИВ ПОРОД С ВЫРАБОТКОЙ

**М. В. Курленя, В. Е. Миренков**

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,  
E-mail: mirenkov@misd.ru, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Предложен метод решения обратных задач, характеризуемых набором параметров, который использует систему сингулярных интегральных уравнений, связывающих граничные значения компонент напряжений и смещений и исключает регуляризацию. Расчет предполагает задание статического, кинематического и динамического аспектов и адаптацию их к условиям отработки конкретного пласта полезного ископаемого. Под статическим аспектом понимается классический расчет напряженно-деформированного состояния в окрестности выработки, кинематический учитывает собственный вес пород, а динамический рассматривает процесс отработки пласта и накопление повреждений во вмещающих породах.

*Граница, напряжения, смещения, параметры, уравнения, задача, решение*

DOI: 10.15372/FTPRI20190401

В механике горных пород в рамках упругости рассматриваются три типа обратных задач: об идентификации граничных условий, по определению механических параметров и геометрические, определяющие координаты внутренних дефектов. Такое разделение не всегда отвечает потребностям практики и достаточно условно. При реализации задач любого из трех типов нужно быть уверенным, что в двух других типах параметры сформулированы точно, поэтому решать эти задачи нужно одновременно.

Основным методом расчета процесса деформирования пород в окрестности выработок является метод конечных элементов, представленный коммерческими программами. Как правило, каждый исследователь формулировал свои граничные условия, не заботясь об их совместности, что существенно увеличило число некорректных задач. Обратные задачи входят составной частью в класс некорректных. Наличие угловых точек на контуре выработки, произвольные формулировки граничных условий (абсолютно жесткий пласт, нарушение конформности

в конечном числе точек, идеальное проскальзывание, жесткое сцепление на контактах и т. п.) никак не контролируются в процессе счета и искажают результат. Число параметров существенно увеличивается, если рассматривать взаимовлияющие ослабления в массиве пород, сюда относятся и задачи для полуплоскости с изолированным отверстием. Проблема многосвязных областей по восстановлению любого из характеризующих сплошную среду параметров некорректна, если дополнительная информация (переопределенность граничных условий) имеется только на одном из ослаблений. Ошибки не могут быть позднее сглажены путем подбора наиболее эффективных численных алгоритмов и/или использования мощных компьютеров. Общие требования для этих задач — необходимость преодоления некорректности путем регуляризации [1–4] или же получения точных уравнений, связывающих граничные значения компонент напряжений и смещений, исключающих регуляризацию.

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Определим параметры массива по упругому решению, для чего из замеров смещений выделим упругую часть. Это возможно в начале очистных работ, когда динамикой можно пренебречь, или осуществлять замеры смещений непрерывно и по мере увеличения выработанного пространства на разные фиксированные положения забоя. Смещения можно считать упругими до обрушения, но формул для пересчета смещений в параметры массива нет. С увеличением выработанного пространства растут его зона влияния и смещения от собственного веса, т. е. сумма статического и кинематического решений дает упругую часть и может использоваться для идентификации параметров, характеризующих массив пород с выработкой.

Учет влияния динамического аспекта на изменение смещений при отработке пласта невозможен без дополнительной натурной информации о протекании процесса. Это может быть отжим угля и его размеры, смещения на кромке пород и пласта, величина отпора крепи, пролет первого и последующего обрушений основной кровли и др. Любые такие сведения позволяют переходить к расчету полных смещений, характеризующих статический, кинематический и динамический аспекты развития деформирования массива пород с очистной выработкой, что требует соответствующих обоснований при использовании их для уточнения смещений от статического и кинематического расчетов. Верно и обратное — делить полные замеры смещений на составляющие. Статический и кинематический расчеты необходимо проводить стандартным способом [5–9]. Для любого положения забоя по заданным произвольно механическим параметрам пород и исходному полю напряжений нетронутого горного массива вычисляются смещения пород кровли и почвы выработки, выполняется статический расчет.

Предлагаемый метод позволяет выделить единственное решение, отвечающее реальному физическому процессу с приближенно заданными входными данными, рассчитать погрешность, исследовать эффективность различных дополнительных условий в выделении реального решения. Система сингулярных интегральных уравнений дает уникальную методику решения таких задач. Алгоритм решения представляет собой итерационный процесс, с помощью которого восстанавливаются функции, наилучшим образом удовлетворяющие заданным условиям. Метод основан на решении одной отдельной обратной задачи для каждой из варьируемых функций. Требование получения решения с достаточной точностью приводит к использованию метода на нескольких этапах расчета и к выполнению большого объема вычислений.

Выписывая, следуя [5], граничные условия первой и второй основных задач теории упругости и исключая комплексные потенциалы, получим систему сингулярных интегральных уравнений, связывающую граничные значения компонент напряжений и смещений:

$$f(t_0) + 2\mu g(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) + 2\mu g(t)}{t - t_0} dt, \tag{1}$$

$$\overline{\kappa f(t_0) - 2\mu g(t_0)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{\kappa f(t) - 2\mu g(t)}}{t - t_0} dt - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} [f(t) + 2\mu g(t)] d \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0},$$

где  $\kappa = 3 - 4\alpha$ ;  $\mu = E[2(1 + \alpha)]^{-1}$ ,  $E$  — модуль Юнга,  $\alpha$  — коэффициент Пуассона;

$$f(t) = i \int_0^t (X_n + iY_n) ds, \tag{2}$$

$X_n, Y_n$  — компоненты усилий в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $g = u + iv$ ,  $u, v$  — компоненты смещений в направлении осей  $x$  и  $y$ ,  $i$  — мнимая единица; черточка над функцией обозначает комплексно сопряженное значение;  $\Gamma$  — граница рассматриваемой области;  $t_0$  — аффикс точки границы  $\Gamma$ .

### СТАТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ

Рассмотрим задачу об очистной выработке, в которой число параметров, характеризующих массив вмещающих пород и обрабатываемого пласта, равно 12 (рис. 1). Примем, что

$$\sigma_y = \gamma H, \quad \sigma_x = \lambda \gamma H \tag{3}$$

есть напряженное состояние в центре будущей выработки в нетронутом массиве пород на глубине  $H$  от дневной поверхности,  $\lambda$  — боковой распор. Величины  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  определяют удельный вес пласта, вмещающего массив пород в зоне влияния выработки (кривая 1) в кровле и в зоне влияния выработки (кривая 2) в породах почвы. Физические характеристики пород и пласта ( $E_i$  и  $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ ) связывают напряжения и деформации. В [5–9] перечислены характеристики, учитываемые в статическом варианте рассмотрения процесса при классическом подходе.

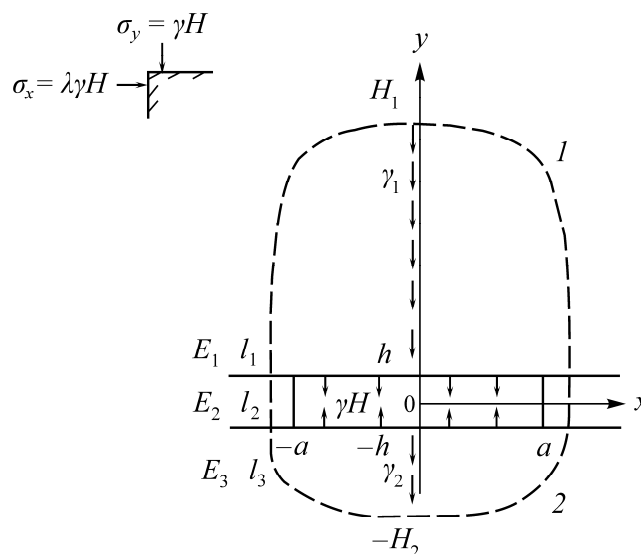


Рис. 1. Расчетная схема очистной выработки: 1 — граница зоны влияния выработки в породах кровли; 2 — зона влияния в породах почвы

## КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ

Для кинематического аспекта проблемы ведения очистных работ предложена феноменологическая теория учета собственного веса пород. Подчеркнем, что все расчеты напряженно-деформированного состояния пород, в которых утверждается возможность учета собственного веса пород, некорректны, так как в соответствии с общей теорией уравнений математической физики в задачах Коши данные Коши должны обращаться в ноль при удалении от выработки. В отдельный класс задач Коши выделены области, имеющие бесконечно удаленную точку. Поскольку задачи геомеханики рассматривают плоскость с отверстием или пространство с полостью, то они попадают в класс задач Коши. Для их корректной формулировки необходимы дополнительные задачи [5, 8], которые в сумме с напряженным состоянием нетронутого массива пород дают искомое решение в первом приближении. Учет собственного веса пород предполагает знание смещений пород кровли и почвы, определяемых экспериментально, т. е. коэффициента  $\kappa_0$ , равного отношению смещений кровли к смещениям почвы:

$$\kappa_0 = \frac{v_1}{v_2}. \quad (4)$$

Такая дополнительная информация о процессе ведения очистных работ позволяет рассматривать обратные задачи. Статический подход в классической интерпретации сводится к произвольному заданию всех 12 параметров, однако некоторые из них обычно полагаются равными. В этих условиях находятся напряжения, смещения и область влияния выработки.

Сложив смещения из решения статической задачи и смещения от собственного веса пород, определяем параметр  $\kappa$ . Сравнивая первое приближение с экспериментальным значением  $\kappa_0$ , вычислим величину несовпадения. Для оценки влияния собственного веса пород на смещения массива в окрестности выработки выделим в породах кровли и почвы элементарное породное волокно на длину зоны влияния выработки. В породах кровли направления действия собственного веса пород и граничных напряжений совпадают, а в породах почвы они направлены в разные стороны. Тогда смещения кровли выработки будут

$$v = \int_0^{H_1-h} \frac{\gamma H + \gamma_1 y}{E_1 A} dy = \frac{\gamma H(H_1 - h) + \frac{1}{2} \gamma_1 (H_1 - h)^2}{E_1 A},$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения волокна, а смещения почвы выработки —

$$v = \int_0^{H_2-h} \frac{\gamma H - \gamma_2 y}{E_3 A} dy = \frac{\gamma H(H_2 - h) - \frac{1}{2} \gamma_2 (H_2 - h)^2}{E_3 A}.$$

Для (4) имеем

$$\kappa = \frac{E_3}{E_1} \frac{\gamma H(H_1 - h) + \frac{1}{2} \gamma_1 (H_1 - h)^2}{\gamma H(H_2 - h) - \frac{1}{2} \gamma_2 (H_2 - h)^2}.$$

Обозначим через  $v_3$  и  $v_4$  смещения пород кровли и почвы соответственно из решения дополнительной задачи без учета веса пород, а смещения от собственного веса кровли —  $v_5$ , почвы —  $v_6$ . Тогда полные смещения кровли выработки  $v_1 = v_3 + v_5$ , почвы —  $v_2 = v_4 - v_6$ . Натурные замеры смещений кровли и почвы обозначим  $v_0$  и  $v_{00}$  будем считать, что их значения известны и требуется приведение расчета к экспериментальным данным.

#### АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОНСТАНТ

Если число параметров, характеризующих массив пород с выработкой,  $n$ , а рассматривается, например, параметр  $m < n$ , то параметры массива от  $m + 1$  до  $n$  не участвуют в уточнении их значений от 1 до  $m$ . Поэтому после последовательного перебора всех  $n$  параметров заканчивается цикл приближения при всех фиксированных величинах. Циклы продолжаются до достижения заданной точности приближения всех параметров, и в конечном счете приближения, вычисленные статически и кинематически, будут близки к экспериментальным.

Поскольку массив горных пород с выработкой имеет 12 параметров (рис. 1), а расчеты предполагается проводить численно с разной степенью точности по разным программам, то необходимо распределить эти параметры в ряд. Под этим понимается, что из 12 параметров первыми в ряду должны стоять наиболее важные. Первыми в ряд для идентификации следует поставить напряженное состояние в центре будущей выработки, т. е. (3). Коэффициенты Пуассона можно отнести в конец ряда, и разница между ними при численном счете быстро исчезает. Если удельный вес пород различен в разных частях окрестности выработки и может определяться либо по справочникам, либо в натуральных условиях по кернам, то величины (3) за счет неопределенности  $H$  возглавляют ряд на полном основании. Модули Юнга, кроме материала пород, зависят от мощности отрабатываемого пласта, который может разрушаться, проскальзывать по контактам, формируя зону отжима угля. Их нужно уточнять во вторую очередь.

Перейдем к идентификации величины  $\gamma H$  из (3), поставив ей в соответствие некоторое число и аналогично определив остальные параметры, характеризующие массив пород с выработкой. Рассчитаем напряженно-деформированное состояние и определим область влияния выработки. Знание этой зоны позволяет вычислить смещения от собственного веса пород в кровле и почве выработки, достигающие максимальных значений на контуре. Выбрав направление и шаг варьирования  $\gamma H$  и проведя все операции на каждом шаге, добиваемся наилучшего совпадения очередного расчета  $\kappa$  с  $\kappa_0$ . Останавливаем поиск и обозначаем полученное приближение как законченное первое в цикле идентификации  $\gamma H$  при прочих постоянных параметрах, т. е.  $(\gamma H)_1$ . Переходя к уточнению  $\lambda$ , все остальные параметры оставляем фиксированными вместе с новым значением  $(\gamma H)_1$ . Определив шаг варьирования  $\lambda$ , выполним все расчеты и сравним полученные величины  $\kappa$  и  $\kappa_0$ . При достижении наилучшего приближения между  $\kappa$  и  $\kappa_0$  фиксируем последнее значение  $\lambda_1$ .

Аналогично изменяем с выбранным шагом модуль Юнга  $E_1$  и на каждом шаге проводим полный цикл вычислений при фиксированных других параметрах. На каждом шаге сравниваем  $\kappa$  и  $\kappa_0$  до получения наилучшего приближения. Как следует из описанной последовательности определения параметров массива пород с выработкой, на каждом шаге варьируемого значения осуществляется большое количество вычислений. На этом заканчивается первый цикл идентификации и начинается второй с определения  $(\gamma H)_2$ , когда остальные параметры берутся из первого приближения. Число циклов находится заданной точностью приближения  $\kappa$  и  $\kappa_0$ .

Использование (1), (2) позволяет получить последовательные приближения к точному решению, но на некотором промежуточном или конечном шаге решения будут различаться за счет выбранной последовательности вычислений параметров. Для получения правильного результата можно использовать любой выбранный порядок приближения к искомым функциям, если не обращать внимания на число итераций. При использовании данного алгоритма в процессе идентификации параметров, характеризующих горный массив с выработкой, необходимо при любой вычислительной базе убедиться в корректной формулировке исходной задачи, чтобы быть уверенным в сходимости расчета к единственному решению.

В [3] доказано, что классическое решение для плоскости с математическим разрезом некорректно, а также некорректны задачи для сосредоточенной силы и угловых точек. Аналитическое решение для плоскости с круговым отверстием, сжимаемой постоянными усилиями, показывает бесконечные смещения при удалении от кругового отверстия, т. е. не имеет математического и физического смысла.

Схема очистной выработки с оставлением целика приведена на рис. 2. Расчетная область многосвязная, поэтому расчет существенно усложняется. Для упрощения вычислений целесообразно убрать целик и заменить его действие реакциями. Сформулируем граничные условия:

$$\tau(x) = 0, \quad \sigma_y = \sigma_0 = \text{const}, \quad -\alpha \leq x \leq -\beta, \quad (5)$$

$$u(x) = 0, \quad v(x) = v_0 = \text{const}, \quad -\alpha \leq x \leq -\beta. \quad (6)$$

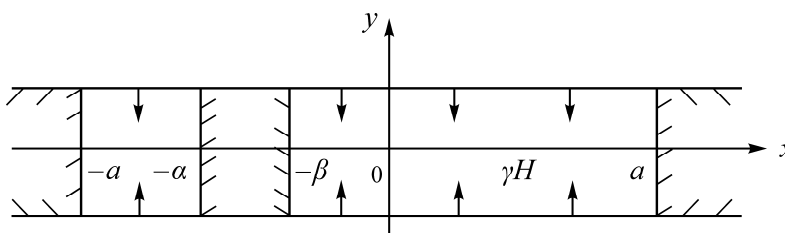


Рис. 2. Очистная выработка с оставлением целика

Выбрав граничные условия из (5), (6), приходим к схеме, показанной на рис. 1. Воспользовавшись алгоритмом для вычисления параметров массива пород, перейдем к его реализации. Если, не проверяя корректность формулировки задачи, начать расчет, то для понимания результатов следует обратиться к системе (1), (2). Выпишем для  $-\alpha \leq x \leq -\beta$  (рис. 2) из (1), (2) связь между нормальными и касательными напряжениями:

$$\sigma_y = a_1 u'(x) + b_1 \int_{-\alpha}^{-\beta} \frac{u'(t)}{t-x} dt + F_1, \quad \tau = a_2 v'(x) + b_2 \int_{-\alpha}^{-\beta} \frac{v'(t)}{t-x} dt + F_2 \quad (7)$$

или

$$u'(x) = a_3 \sigma_y(x) + b_3 \int_{-\alpha}^{-\beta} \frac{\tau(x)}{t-x} dt + F_3, \quad v'(x) = a_4 \tau(x) + b_4 \int_{-\alpha}^{-\beta} \frac{\sigma_y(t)}{t-x} dt + F_4, \quad (8)$$

где  $a_i, b_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — функции от упругих характеристик пород;  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — известные функции, выписываемые в квадратурах.

Очевидно, что формулировать граничные условия в виде (5), (6) нельзя, так как системы (7), (8) становятся вырожденными и требуют регуляризации или необходимости отказа от (5), (6) и поиска новых контактных условий.

## ВЫВОДЫ

На основе феноменологической теории учета собственного веса пород и развитого положения об учете динамической составляющей ведения очистных работ сформулированы статический, кинематический и динамический аспекты деформирования пород около очистной выработки, дающие возможность получить полные смещения массива. Предложен алгоритм идентификации исходного поля напряжений и параметров, характеризующих массив горных пород с выработкой, а также система сингулярных интегральных уравнений, позволяющая выписать в квадратурах решения первой, второй и третьей основных задач теории упругости, что исключает процесс регуляризации и сводит процесс идентификации параметров к итерационной процедуре, сходящейся к точному решению. В общем случае большое количество параметров требует для их идентификации вычислительные ресурсы, что относит проблему к числу труднорешаемых.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Постнов В. А.** Использование метода регуляризации Тихонова для решения задач идентификации упругих систем // МТТ. — 2010. — № 1. — С. 151–160.
2. **Jadamba B., Khan A. A., Raciti F.** On the inverse problem of identifying Lamé coefficients in linear elasticity, *Comput. Math. Appl.*, 2008, Vol. 56, № 2. — P. 431–443.
3. **Миренков В. Е.** О некоторых некорректных задачах в геомеханике // ФТПРПИ. — 2011. — № 3. — С. 20–27.
4. **Капцов В. П., Шифрин Е. И.** Идентификация плоской трещины в упругом теле с помощью инвариантных интегралов // МТТ. — 2008. — № 3. — С. 112–120.
5. **Курленя М. В., Миренков В. Е.** Деформирование весомого массива горных пород в окрестности прямолинейной конечной трещины // ФТПРПИ. — 2018. — № 6. — С. 14–20.
6. **Shen H. and Abbas S. M.** Rock slope reliability analysis based on distinct element method and random set theory, *J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2013, Vol. 61. — P. 15–22.
7. **Clausen J.** Bearing capacity of circular footings on a Hoek-Brown material, *J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2013, Vol. 57. — P. 34–41.
8. **Баренблатт Г. И., Христианович С. А.** Об обрушении кровли при горных выработках // Изв. АН СССР. ОТН. — 1955. — № 11. — С. 73–86.
9. **Серяков В. М., Риб С. В., Басов В. В., Фрянов В. М.** Геомеханическое обоснование параметров технологии отработки угольных пластов в зоне взаимовлияния очистного пространства и передовой выработки // ФТПРПИ. — 2018. — № 6. — С. 21–29.

*Поступила в редакцию 17/VI 2019*

*После доработки 17/VI 2019*

*Принята к публикации 03/VII 2019*