

О НЕАДИАБАТИЧЕСКОМ ОБТЕКАНИИ ТОНКИХ, ЗАОСТРЕННЫХ
ВПЕРЕДИ ТЕЛ ПОТОКОМ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА С БОЛЬШОЙ
СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

И. Ф. Шапнов

(Москва)

Исследуется неадиабатическое обтекание тонких, заостренных впереди тел установившимся потоком совершенного газа с большой сверхзвуковой скоростью.

Предполагается, что отсутствие адиабатичности вызывается наличием жестко связанной с телом зоны тепловыделения. Показывается справедливость закона плоских сечений. Приводится критерий подобия, учитывающий тепловыделение, оправданность введения которого иллюстрируется результатами численных расчетов, проведенных методом характеристик для основной системы уравнений. Показывается также, что в этой постановке задачи, когда теплоподвод задается при помощи функции от координат, эквивалентная задача о вытеснении газа поршнем будет автомодельной в том случае, когда форма ударной волны или закон выдвигания поршня имеют вид $R^* = Vt^{1/2}$.

1. Рассмотрим установившееся неадиабатическое течение идеального, т. е. невязкого и нетеплопроводного газа с постоянной теплоемкостью.

Введем прямоугольную систему координат x, y, z , жестко связанную с телом, летящим с постоянной скоростью V , и обозначим через u, v, w составляющие возмущений скорости вдоль осей x, y, z (ось x направлена в сторону, обратную скорости тела). Пусть p и ρ — соответственно давление и плотность. Уравнения движения и неразрывности будут иметь вид

$$(V + u) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$(V + u) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.2)$$

$$(V + u) \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \rho (V + u)}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

Уравнение притока тепла возьмем в виде

$$(V + u) \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho^\gamma} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{\rho^\gamma} + w \frac{\partial}{\partial z} \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{\gamma - 1}{A \rho^{\gamma-1}} \frac{di_0}{dt} \quad (1.5)$$

где γ — показатель адиабаты, A — механический эквивалент тепла, i_0 — полное теплосодержание единицы массы газа

$$i_0 = A \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{(V + u)^2 + v^2 + w^2}{2} \right] \quad (1.6)$$

Ограничиваясь рассмотрением обтекания тонких, заостренных впереди тел, предположим, что возмущения, вносимые в поток источниками тепла, по порядку величины не превосходят возмущений, вносимых самим телом при адиабатическом обтекании, т. е. по-прежнему [1]

$$u \sim V\tau^2, \quad v \sim w \sim V\tau, \quad \frac{\Delta p}{p_1} \sim M^2\tau^2, \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \sim 1 \quad \left(M = \frac{V}{a} \right)$$

Здесь τ — наибольшая относительная толщина тела; a — скорость звука; Δp и $\Delta \rho$ — возмущения давления и плотности; индексом 1 обозначены параметры набегающего потока ($M\tau \approx 1$ или $M\tau \gg 1$).

Введем в уравнениях (1.1) — (1.5) безразмерные переменные (L — характерная длина)

$$u' = \frac{u}{V\tau^2}, \quad v' = \frac{v}{V\tau}, \quad w' = \frac{v}{V\tau}, \quad p' = \frac{p}{\rho_1 V^2 \tau}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_1}$$

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{\tau L}, \quad z' = \frac{z}{\tau L}$$

Пренебрегая членами порядка τ^2 по сравнению с единицей, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} &= -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial x'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} &= -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'} & \frac{\partial \rho'}{\partial x'} + \frac{\partial \rho' v'}{\partial y'} + \frac{\partial \rho' w'}{\partial z'} &= 0 \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} &= -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z'} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{\rho'} \left\{ \frac{\partial p'}{\partial x'} + v' \frac{\partial p'}{\partial y'} + w' \frac{\partial p'}{\partial z'} \right\} + \gamma p' \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{\rho'} + v' \frac{\partial}{\partial y'} + w' \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{\rho'} \right\} = \frac{\gamma - 1}{M_1^2 \tau^2} \frac{cL}{M_1 A a_1^3} \quad (1.8)$$

$$c = \frac{di_0}{dt}$$

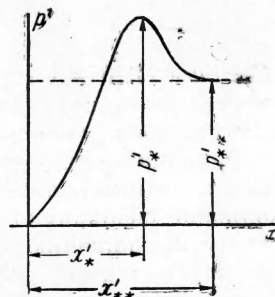
$$u' = v' = w' = 0, \quad p' = \frac{1}{\gamma M_1^2 \tau^2}, \quad \rho' = 1 \quad \text{при } x = -\infty$$

Соотношения на поверхностях скачков уплотнения ничем не отличаются от соответствующих соотношений для адиабатического случая (детонация отсутствует). То же самое можно сказать и о поверхностях тангенциального разрыва. Уравнение поверхности обтекаемого тела и функцию теплопровода c можно задать в виде

$$F\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{\tau L}, \frac{z}{\tau L}\right) = 0, \quad c = c\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{\tau L}, \frac{z}{\tau L}\right)$$

Поэтому полученная система уравнений будет содержать три безразмерных параметра — τ , M_1 и C° , входящих в две комбинации

$$M\tau = K, \quad \frac{C^\circ}{M_1} = K^\circ \quad \left(C^\circ = \frac{Lc}{Aa_1^3}\right)$$



Фиг. 1

Таким образом, обтекание аффинноподобных тел, обладающих также подобием и по закону тепловыделения, будет подобным, если критерии подобия K и K° остаются неизменными (в критерии K° параметр C° берется в какой-либо характерной точке). Меняя параметр C° , для сохранения подобия необходимо также менять и параметр τ так, чтобы

$$C^\circ \tau = K K^\circ = \text{const}$$

т. е. увеличивая (уменьшая) безразмерную интенсивность теплоподвода C° следует одновременно увеличивать (уменьшать) число M_1 и уменьшать (увеличивать) максимальную толщину τ .

2. В качестве примера рассмотрим обтекание плоской пластины сверхзвуковым потоком под нулевым углом атаки при наличии примыкающей к ней прямоугольной зоны равномерного по времени теплоподвода ($di_0/dt = C = \text{const}$). Как показали результаты численного интегрирования уравнений системы (1.1) — (1.5)¹, распределение давления по пластине в начальном участке зоны тепловыделения имеет своеобразный вид.

Давление вначале растет до некоторой величины p_* (точка x'_*) и затем выходит на определенное значение p_{**} (точка x'_{**}) (фиг. 1).

¹ Вычисления методом характеристик выполнены автором на БЭСМ АН СССР.

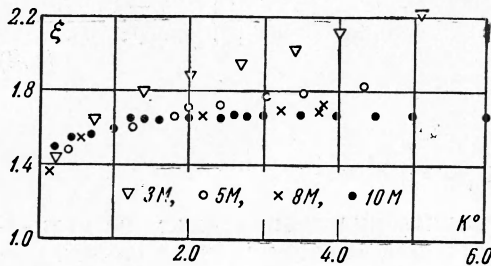
На фиг. 2 представлены полученные значения отношений $\xi = x_{**}/x_*$ в функции критерия подобия K° . За характерную длину была взята высота зоны тепловыделения h , так что

$$x_* = hx'_*, \quad x_{**} = hx'_{**}, \quad K^{\circ} = \frac{1}{M_1} \frac{ch}{Aa_1^3}$$

Из рассмотрения фиг. 2 следует, что в диапазоне широкого изменения C° (расчеты проводились для различных значений h , c и a_1) и при достаточно больших числах M_1 , величина K_Q действительно является определяющим параметром. Отметим, что при выполнении условия $K_Q = \text{const}$ имеется очень хорошее сохранение подобия в распределении по длине пластины как давления, так и остальных величин, характеризующих движение.

3. Характерной особенностью системы (1.7), (1.8), как и при адиабатическом течении, является то обстоятельство, что она позволяет определить v' , w' , p' и ρ' независимо от составляющей скорости u' , которая при заданном законе теплоподвода находится из уравнения энергии

$$\begin{aligned} u' + \frac{v'^2 + w'^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p'}{\rho'} &= \\ &= \frac{1}{(\gamma - 1) M_1^2 \tau^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{Q}{Aa_1^2} \right\} \\ \frac{Q}{Aa_1^2} &= \frac{\alpha_1}{L} \int_0^t C^{\circ} dt \quad (3.1) \end{aligned}$$



Фиг. 2

Система (1.8)—(1.10), если вернуться к размерным переменным и интерпретировать величину $x/V = t_1$ как время, описывает неустановившееся неадиабатическое движение газа в плоскости, перпендикулярной к направлению движения тела (закон плоских сечений). Таким образом, обтекание тонких, заостренных впереди тел, неадиабатическим потоком с большой сверхзвуковой скоростью эквивалентно плоскому неустановившемуся движению газа, вытесняемого поршнем при одновременном подводе тепла извне. Получающаяся при этом система уравнений существенно упрощается, если рассматривать одномерные течения (что соответствует обтеканию профиля или осесимметричного тела под нулевым углом атаки), а также допустить наличие автомодельности [2]. Для нахождения условий автомодельности обратимся к теории размерности.

4. Уравнения движения и неразрывности размерных констант не содержат. Условия на скачках содержат два независимых параметра p_1 и ρ_1 с размерностями

$$[p_1] = ML^{-1}T^{-2}, \quad [\rho_1] = ML^{-3}$$

Приток тепла выражается через скорость теплоподвода c , поэтому появляется еще одна константа с размерностью

$$\left[\frac{C}{A} \right] = L^2T^{-3}$$

Закон выдвигания поршня или распространения ударной волны возьмем в виде

$$R^* = Bt^{n+1}$$

где R^* — расстояние от начальной плоскости или от оси симметрии ($B = \text{const}$). В этом случае добавляется четвертая постоянная, имеющая размерность

$$[B] = LT^{-n-1}$$

Следовательно, движение будет автомодельным только в том случае, если параметром p_1 можно пренебречь (достаточно сильная ударная волна), а величина n равна $1/2$, так что форма обтекаемого тела или ударной волны имеет специальный вид

$$R^* = B \left(\frac{x}{V_1} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Следуя работе [1], введем новые переменные

$$R = R^* R_0, \quad p = p^* P, \quad \rho = \rho^* \Omega, \quad v = \dot{R}^* V$$

$$v = \frac{\partial R}{\partial t_1}, \quad \dot{R}^* = \frac{\partial R^*}{\partial t_1}, \quad \dot{\mu} = \left(\frac{r}{R^*} \right)^\nu$$

где R — расстояние жидкой частицы от начальной плоскости или оси симметрии, r — значение R в начальный момент времени, $\nu = 1$ для профиля и $\nu = 2$ для осесимметричного тела, индексом * обозначены величины на ударной волне. Переходя к переменным Лагранжа, найдем (штрихом обозначены производные по μ)

$$\nu \frac{\rho^*}{\rho_1} \Omega R_0^{\nu-1} R_0' = 1, \quad \frac{n}{n+1} V - \nu \mu \frac{dV}{d\mu} + \frac{2n}{\gamma-1} R_0^{\nu-1} P' = 0, \quad V = R_0 - \nu \mu R_0'$$

Уравнение энергии, если воспользоваться очевидным соотношением

$$\frac{\dot{R}^*}{R^*} = (n+1)^3 B^2$$

при $n = 1/2$, примет вид

$$c(\mu) = - \frac{27 B^2 \Omega^{\gamma-1} (\gamma-1)^2 \mu^{1+2/3\nu}}{4 (\gamma+1)^2} \frac{d}{d\mu} \left(\frac{P}{\Omega^{\gamma} \mu^{2/3\nu}} \right)$$

Отсюда

$$P = \Omega^{\gamma} \mu^{\frac{2}{3\nu}} \left\{ \text{const} - \frac{(\gamma+1)^2}{4} \frac{4}{27 B^2 \nu} \int \frac{c(\mu) d\mu}{\Omega^{\gamma-1} \mu^{1+2/3\nu}} \right\} \quad (4.2)$$

Соотношения (4.1) позволяют найти величины Ω, V, P , если известно R_0 как функция от μ . Определяющее уравнение для R_0 можно получить, если выразить Ω и V из первого и третьего соотношений (4.1) и подставить во второе, используя (4.2). Именно,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{\gamma+1} \frac{4}{27 B^2 \nu^{2-\gamma}} \frac{c(\mu)}{\mu^{1+2/3\nu}} (R_0^{\nu-1} R_0')^{\gamma-1} = \\ & = \left\{ \frac{\nu (\gamma+1) [1/3 (R_0 - \nu \mu R_0') - \nu \mu (R_0 - \nu \mu R_0)']}{R_0^{\nu-1} d [\mu^{2/3\nu} (R_0^{\nu-1} R_0')^{-1}] / d\mu} - \right. \\ & \left. - \frac{4c(\mu) (\gamma+1)^2}{27 B^2 \nu (\gamma-1)^2 \mu R_0^{\nu-1} R_0' d [\mu^{2/3\nu} (R_0^{\nu-1} R_0')^{-1}] / d\mu} \right\}' \quad (4.3) \end{aligned}$$

Соотношение (4.3) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка, которое приходится решать численно. Отметим, что повышение порядка уравнения для R_0 на единицу по сравнению с адиабатическим течением (граничные условия остаются такими же) не вносит принципиальных затруднений при выполнении численного интегрирования, хотя объем работы, разумеется, увеличивается.

Автор благодарен Г. Г. Черному за ценные замечания, высказанные им в процессе выполнения работы.

Поступила 24 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, М., Гостехиздат, 1957.