

УДК 539.371

**УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГОРНОЙ ПОРОДЫ  
С ВНУТРЕННИМИ САМОУРАВНОВЕШЕННЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ**

**А. Ф. Ревуженко, О. А. Микенина**

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,  
E-mail: revuzhenko@yandex.ru, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Горная порода рассматривается как среда, содержащая несущий скелет и поровое пространство, заполненное упругим связующим. Строится плоская замкнутая модель деформирования, учитывающая пластические деформации и локальные изгибы зерен. Модель описывает способность среды накапливать энергию внутренних самоуравновешенных напряжений.

*Горная порода, упругость, пластичность, самоуравновешенные напряжения*

DOI: 10.15372/FTPRPI20180302

Большая роль внутренних самоуравновешенных напряжений хорошо известна [1–5]. Вопрос о напряжениях такого рода — это вопрос о существовании естественного состояния среды. Если образец горной породы находится в естественном состоянии, т. е. его граница от напряжений свободна, то можно ли утверждать, что и внутри образца все напряжения отсутствуют. В общем случае ответ на этот вопрос является отрицательным.

К каким последствиям это приводит? Если среда описывается линейными уравнениями, то при решении задач самоуравновешенные напряжения можно не учитывать. На дополнительные линейные напряжения они накладываются аддитивно. Однако в нелинейной области (пластичность, разрушение) роль начальных напряжений может стать значительной или даже определяющей. Здесь достаточно сослаться на факты бурного самопроизвольного разрушения кернов, извлеченных с больших глубин, тектоно-кессонный эффект и явление последействия в горных породах [6–8].

Существенным является и то обстоятельство, что энергия внешних воздействий на горный массив не только расходуется на трение и разрушение породы, но и переходит в энергию внутренних самоуравновешенных напряжений. Такая энергия не диссипирована, а скрыта как потенциальная. Она может высвободиться, внося свой вклад в катастрофические проявления горного давления.

Известно, что внутренние самоуравновешенные напряжения могут появиться в процессах метаморфизма горных пород, фазовых переходов, взаимодействия с различными флюидами, а также в результате необратимых деформаций массива. Одна из причин подобных деформаций — взрывные и другие динамические воздействия на массив (“После взрыва часть энергии остается в среде в виде упругой энергии остаточных напряжений” [9]).

Большое значение имеет и тот факт, что горный массив представляет собой блочно-иерархическую среду [10–12], допускающую знакопеременную реакцию на внешние воздействия [13,]. В [13] введен специальный элемент (рис. 1), дающий знакопеременную реакцию на внешние воздействия. Он способен запасать и высвобождать энергию внутренних самоуравновешенных напряжений. Такому элементу отвечает реологическая модель, показанная на рис. 2. Контакту  $ab$  соответствуют контакты между частицами (зернами) среды. Он может быть чисто пластическим, обладать свойствами вязкого или сухого трения и т. д. Кроме того, данный контакт может обладать дилатансионными свойствами. Упругому элементу  $c$  соответствует упругость частиц, а элементу  $d$  — упругость поровой среды.

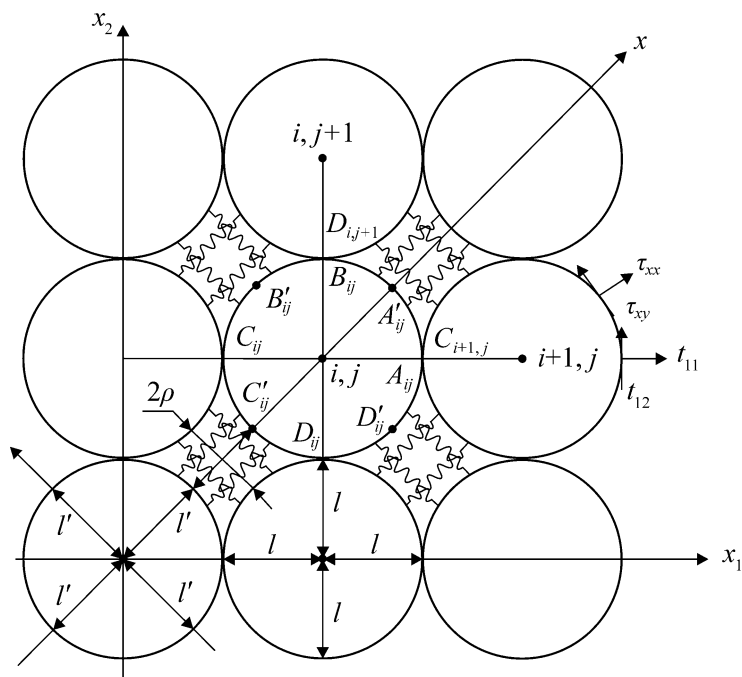


Рис. 1.

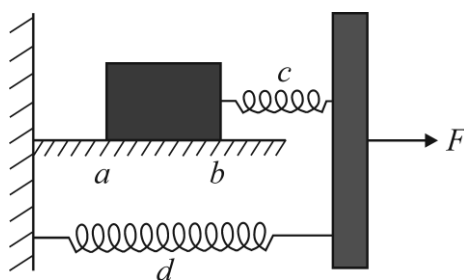


Рис. 2.

Упругие элементы  $c$  и  $d$  включены параллельно. Если элемент  $c$  растянут, а элемент  $d$  сжат, то система может находиться в равновесии при отсутствии внешних напряжений  $F$ . В этой ситуации усилия на элемент  $d$  полностью компенсируются напряжениями на контакте  $ab$ . Если контакт находится в метастабильном состоянии, то слабые возмущения системы могут привести к неконтролируемому высвобождению энергии упругих элементов  $c$  и  $d$ . После этого система опять переходит в стабильное состояние. Рассмотрим вывод уравнений деформирования подобной среды.

## ОСНОВНОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

Известно, что переход от реологических моделей (см. рис. 2) к континуальным уравнениям является весьма нетривиальным. Возможны различные пути перехода, которые приводят к различным уравнениям. В [14] замкнутая система формулировалась для дискретной упаковки, а континуальные уравнения строились как дифференциальное приближение к конечно-разностной системе.

Оказалось, что если таким образом строить даже модель линейно-упругого тела, то результат будет отличным от классического [15]. Иными словами, если из реологической модели рис. 2 убрать все элементы, кроме упругого элемента  $c$ , то придем к модели с пятью определяющими уравнениями (в классической модели, законе Гука — только три уравнения). Природа дополнительных уравнений связана с отказом от локальной гладкости поля перемещений, что приводит к нелокальной теории с линейным структурным параметром. Кажется удивительным, что такая простая модель (рис. 1) даже в классической теории линейной упругости дает новый и неожиданный на первый взгляд результат.

Разберем общий случай, когда учитываются все элементы модели рис. 2. Прежде всего, рассмотрим упругий элемент  $c$ . Ему соответствует упругая реакция зерна, которое нагружается двумя системами сил. Первая система — это силы, действующие в точках  $A, B, C, D$  со стороны соседних зерен в упаковке, вторая система — силы, действующие в точках  $A', B', C', D'$  со стороны поровой среды. Восемь точек контакта дают шестнадцать компонент векторов смещений и шестнадцать компонент векторов сил. Определяющие уравнения не должны зависеть от смещения и поворота частицы как жесткого целого (три кинематические степени свободы). Кроме того, должны выполняться три условия равновесия (или движения). Следовательно, определяющих уравнений для одного упругого зерна должно быть тринадцать. Упрощенный вариант модели представлен в [14].

Примем следующую программу действий. Векторы усилий на контактах обозначим как  $\bar{F}(A), \dots, \bar{F}(C')$ , смещения на контактах зерен —  $\bar{u}(A), \dots, \bar{u}(C)$ , а на контактах зерен с поровой средой — как  $\bar{w}(A'), \dots, \bar{w}(C')$ . Запишем выражение для работы внешних сил  $A$ . Разобьем его на два слагаемых:

$$\begin{aligned} A &= A_u + A_w, \\ A_u &= \bar{F}(A)\bar{u}(A) + \bar{F}(B)\bar{u}(B) + \bar{F}(C)\bar{u}(C) + \bar{F}(D)\bar{u}(D), \\ A_w &= \bar{F}(A')\bar{w}(A') + \bar{F}(B')\bar{w}(B') + \bar{F}(C')\bar{w}(C') + \bar{F}(D')\bar{w}(D'). \end{aligned} \quad (1)$$

Задача состоит в том, чтобы из суммы  $A_u + A_w$  выделить комбинации смещений, которые будут инвариантны относительно жесткого смещения и поворота зерна как целого. В качестве коэффициентов при указанных комбинациях соберутся определенные комбинации напряжений. И те и другие можно использовать при записи определяющих уравнений.

Поставленная задача имеет неограниченное число решений в том смысле, что любая функция от инвариантов также будет инвариантом. Остановимся на варианте, который имеет наиболее ясный и простой механический смысл. Будем одновременно использовать обе системы координат  $Ox_1x_2$  и  $Oxy$  с единичными ортами  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  и  $\bar{e}_x, \bar{e}_y$ . Для компонент смещений введем обычные обозначения:  $\bar{u} = u_1\bar{e}_1 + u_2\bar{e}_2$ ,  $\bar{w} = w_x\bar{e}_x + w_y\bar{e}_y = w_1\bar{e}_1 + w_2\bar{e}_2$ . Для компонент сил удобнее ввести обозначения:

$$\bar{F}(A) = T_{11}(A)\bar{e}_1 + T_{12}(A)\bar{e}_2, \quad \bar{F}(B) = T_{21}(B)\bar{e}_1 + T_{22}(B)\bar{e}_2,$$

$$\begin{aligned}\bar{F}(C) &= -T_{11}(C)\bar{e}_1 - T_{12}(C)\bar{e}_2, & \bar{F}(D) &= -T_{21}(D)\bar{e}_1 - T_{22}(D)\bar{e}_2, \\ \bar{F}(A') &= G_{xx}(A')\bar{e}_x + G_{xy}(A')\bar{e}_y, & \bar{F}(B') &= G_{yx}(B')\bar{e}_x + G_{yy}(B')\bar{e}_y, \\ \bar{F}(C') &= -G_{xx}(C')\bar{e}_x - G_{xy}(C')\bar{e}_y, & \bar{F}(D') &= -G_{yx}(D')\bar{e}_x - G_{yy}(D')\bar{e}_y.\end{aligned}$$

Техническую сторону дела можно упростить, если сначала преобразовать только первое слагаемое  $A_u$ . Получим следующее алгебраическое тождество [15]:

$$\begin{aligned}A_u &= T_{11}(A)u_1(A) + T_{12}(A)u_2(A) + T_{21}(B)u_1(B) + T_{22}(B)u_2(B) - \\ &\quad - T_{11}(C)u_1(C) - T_{12}(C)u_2(C) - T_{21}(D)u_1(D) - T_{22}(D)u_2(D) = \\ &= \frac{T_{11}(A) + T_{11}(C)}{2}[u_1(A) - u_1(C)] + \frac{T_{22}(B) + T_{22}(D)}{2}[u_2(B) - u_2(D)] + \\ &\quad + \frac{T_{12}(A) + T_{12}(C) + T_{21}(B) + T_{21}(D)}{4}[u_2(A) - u_2(C)] + u_1(B) - u_1(D) + \\ &\quad + [T_{11}(A) - T_{11}(C) - T_{21}(B) + T_{21}(D)]\frac{u_1(A) + u_1(C) - u_1(B) - u_1(D)}{4} + \\ &\quad + [T_{12}(A) - T_{12}(C) - T_{22}(B) + T_{22}(D)]\frac{u_2(A) + u_2(C) - u_2(B) - u_2(D)}{4} + \\ &\quad + [T_{11}(A) - T_{11}(C) + T_{21}(B) - T_{21}(D)]\frac{u_1(A) + u_1(B) + u_1(C) + u_1(D)}{4} + \\ &\quad + [T_{12}(A) - T_{12}(C) + T_{22}(B) - T_{22}(D)]\frac{u_2(A) + u_2(B) + u_2(C) + u_2(D)}{4} + \\ &\quad + [T_{12}(A) + T_{12}(C) - T_{21}(B) - T_{21}(D)]\frac{u_2(A) - u_2(C) - u_1(B) + u_1(D)}{4}.\end{aligned}\quad (2)$$

Смысл первых пяти слагаемых станет ясен, если их разделить на  $(2l)^2$  и ввести обозначения:

$$\begin{aligned}t_{ij} &= \frac{T_{ij}}{2l}, & \varepsilon_{11} &= \frac{u_1(A) - u_1(C)}{2l} \rightarrow \frac{\delta u_1}{\delta x_1}, & \varepsilon_{22} &= \frac{u_2(B) - u_2(D)}{2l} \rightarrow \frac{\delta u_2}{\delta x_2}, \\ \gamma_{12} &= \frac{u_2(A) - u_2(C)}{2l} + \frac{u_1(B) - u_1(D)}{2l} \rightarrow \frac{\delta u_2}{\delta x_1} + \frac{\delta u_1}{\delta x_2}, \\ \varkappa_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{u_1(A) + u_1(C)}{2} - \frac{u_1(B) + u_1(D)}{2} \right), & \varkappa_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{u_2(A) + u_2(C)}{2} - \frac{u_2(B) + u_2(D)}{2} \right), \\ \langle t_{11} \rangle &= \frac{t_{11}(A) + t_{11}(C)}{2} \rightarrow t_{11}, & \langle t_{22} \rangle &= \frac{t_{22}(B) + t_{22}(D)}{2} \rightarrow t_{22}, \\ t_\gamma &= \frac{t_{12}(A) + t_{12}(C) + t_{21}(B) + t_{21}(D)}{4}, \\ \theta_1 &= \frac{t_{11}(A) - t_{11}(C)}{2l} - \frac{t_{21}(B) - t_{21}(D)}{2l} \rightarrow \frac{\delta t_{11}}{\delta x_1} - \frac{\delta t_{21}}{\delta x_2}, \\ \theta_2 &= \frac{t_{12}(A) - t_{12}(C)}{2l} - \frac{t_{22}(B) - t_{22}(D)}{2l} \rightarrow \frac{\delta t_{12}}{\delta x_1} - \frac{\delta t_{22}}{\delta x_2}.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь и далее стрелками обозначены пределы при  $l, l' \rightarrow 0$ . Данные пределы могут не совпадать с частными производными, поэтому для них использовано обозначение “ $\delta$ ”, а не обозначение частных производных “ $\partial$ ”.

Механический смысл кинематических переменных следующий:  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  — деформации растяжения волокон  $AC$  и  $BD$ ,  $\gamma_{12}$  — сдвиг между этими волокнами,  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$  — локальные изгибы, связанные с тем, что середина волокна  $AB$  может не совпадать с серединой волокна  $CD$  после деформации. Это означает, что локально поле смещений не дифференцируемо, т. е. локальная деформация не сводится к аффинной, как это предполагается в классических теориях. Равенство (2) определяют сопряженные силовые переменные. Смысл остальных слагаемых в (2) очевиден:

$$U_1 = \frac{u_1(A) + u_1(B) + u_1(C) + u_1(D)}{4}, \quad U_2 = \frac{u_2(A) + u_2(B) + u_2(C) + u_2(D)}{4} \quad (4)$$

— среднее смещение точек  $A, B, C, D$ ;

$$T_1 = T_{11}(A) - T_{11}(C) + T_{21}(B) - T_{21}(D) \rightarrow (2l)^2 \left( \frac{\delta t_{11}}{\delta x_1} + \frac{\delta t_{21}}{\delta x_2} \right), \quad (5)$$

$$T_2 = T_{12}(A) - T_{12}(C) + T_{22}(B) - T_{22}(D) \rightarrow (2l)^2 \left( \frac{\delta t_{12}}{\delta x_1} + \frac{\delta t_{22}}{\delta x_2} \right)$$

— равнодействующая сил, приложенных в тех же точках.

Переменная

$$U_\omega = \frac{u_2(A) - u_2(C) - u_1(B) + u_1(D)}{4} \rightarrow \frac{l}{2} \left( \frac{\delta u_2}{\delta x_1} - \frac{\delta u_1}{\delta x_2} \right) \quad (6)$$

характеризует средний поворот зерна, определенный по точкам  $A, B, C, D$ ,

$$T_\omega = T_{12}(A) + T_{12}(C) - T_{21}(B) - T_{21}(D) \quad (7)$$

— соответствующая силовая переменная.

Таким образом, последние три слагаемые в (2) — это работа сил, приложенных в точках контактов зерен на соответствующих перемещениях. Далее, тождество (2) строилось так, чтобы переменные (3) были инвариантными относительно средних смещений и поворота, определенных по точкам  $A, B, C, D$ . Однако сами значения средних смещений и поворота нигде не использовались (они вошли только в последние три слагаемых тождества). Поэтому инвариантность переменных (2) сохранится и в общем случае, когда будут учтены обе системы сил и соответствующих перемещений. Это означает, что пять из тринадцати искомым комбинаций смещений уже нашлись. Аналогичные пять комбинаций получаются и для смещений, определенных в точках  $A', B', C', D'$ :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{w_x(A') - w_x(C')}{2l'} \rightarrow \frac{\delta w_x}{\delta x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{w_y(B') - w_y(D')}{2l'} \rightarrow \frac{\delta w_y}{\delta y},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{w_y(A') - w_y(C')}{2l'} + \frac{w_x(B') - w_x(D')}{2l'} \rightarrow \frac{\delta w_y}{\delta x} + \frac{\delta w_x}{\delta y}, \quad (8)$$

$$\zeta_x = \frac{1}{2} \left( \frac{w_x(A') + w_x(C')}{2} - \frac{w_x(B') + w_x(D')}{2} \right), \quad \zeta_y = \frac{1}{2} \left( \frac{w_y(A') + w_y(C')}{2} - \frac{w_y(B') + w_y(D')}{2} \right).$$

Данным переменным соответствуют следующие комбинации напряжений:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{G_{xx}}{2l'}, \dots, \tau_{yy} = \frac{G_{yy}}{2l'}, \\ \langle \tau_{xx} \rangle &= \frac{\tau_{xx}(A') + \tau_{xx}(C')}{2} \rightarrow \tau_{xx}, \\ \langle \tau_{yy} \rangle &= \frac{\tau_{yy}(B') + \tau_{yy}(D')}{2} \rightarrow \tau_{yy}, \\ \tau_{\gamma} &= \frac{\tau_{xy}(A') + \tau_{xy}(C') + \tau_{yx}(B') + \tau_{yx}(D')}{4}, \\ g_x &= \frac{\tau_{xx}(A') - \tau_{xx}(C')}{2l'} - \frac{\tau_{yx}(B') - \tau_{yx}(D')}{2l'} \rightarrow \frac{\delta\tau_{xx}}{\delta x} - \frac{\delta\tau_{yx}}{\delta y}, \\ g_y &= \frac{\tau_{xy}(A') - \tau_{xy}(C')}{2l'} - \frac{\tau_{yy}(B') - \tau_{yy}(D')}{2l'} \rightarrow \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta x} - \frac{\delta\tau_{yy}}{\delta y}. \end{aligned} \quad (9)$$

Переменным (4), (5) аналогичны переменные

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{w_x(A') + w_x(B') + w_x(C') + w_x(D')}{4}, \\ W_y &= \frac{w_y(A') + w_y(B') + w_y(C') + w_y(D')}{4}, \\ G_x &= G_{xx}(A') - G_{xx}(C') + G_{yx}(B') - G_{yx}(D') \rightarrow (2l')^2 \left( \frac{\delta\tau_{xx}}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{yx}}{\delta y} \right), \\ G_y &= G_{xy}(A') - G_{xy}(C') + G_{yy}(B') - G_{yy}(D') \rightarrow (2l')^2 \left( \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{yy}}{\delta y} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Величина  $W_{\omega}$  связана с поворотом зерна, определенного по точкам  $A', B', C', D'$ :

$$W_{\omega} = \frac{w_y(A') - w_y(C') - w_x(B') + w_x(D')}{4} \rightarrow \frac{l'}{2} \left( \frac{\delta w_y}{\delta x} - \frac{\delta w_x}{\delta y} \right). \quad (11)$$

Сопряженная силовая переменная — это

$$G_{\omega} = G_{xy}(A') + G_{xy}(C') - G_{yx}(B') - G_{yx}(D'). \quad (12)$$

В указанных обозначениях тождество для работы второй системы сил можно записать короче, чем (1):

$$A_w = (2l')^2 [\langle \tau_{xx} \rangle \varepsilon_{xx} + \langle \tau_{yy} \rangle \varepsilon_{yy} + \tau_{\gamma} \gamma_{xy} + g_x \zeta_x + g_y \zeta_y] + G_x W_x + G_y W_y + G_{\omega} W_{\omega}. \quad (13)$$

Таким образом, выявлено десять кинематических переменных (3), (8), которые являются инвариантными относительно жесткого переноса и поворота зерна в условиях, когда учитываются обе системы сил. Осталось найти еще три инвариантные характеристики. Ясно, что они могут содержаться только в сумме последних слагаемых тождеств (2) и (13). Как отмечалось, они имеют смысл работы первой и второй системы сил на соответствующих перемещениях (обозначим ее  $R_{inv}$ ), а также работы  $R_{\omega}$  двух систем сил на двух поворотах, определенных по точкам  $A, B, C, D$  и  $A', B', C', D'$ :

$$R_{inv} = T_1 U_1 + T_2 U_2 + G_x W_x + G_y W_y, \quad R_{\omega} = T_{\omega} U_{\omega} + G_{\omega} W_{\omega}. \quad (14)$$

Рассмотрим первое выражение. Сумма  $R_w = G_x W_x + G_y W_y$  представляет собой скалярное произведение векторов:

$$\bar{G} = G_x \bar{e}_x + G_y \bar{e}_y = G_1 \bar{e}_1 + G_2 \bar{e}_2, \quad \bar{W} = W_x \bar{e}_x + W_y \bar{e}_y = W_1 \bar{e}_1 + W_2 \bar{e}_2.$$

Запишем скалярное произведение в координатах  $Ox_1x_2$ :  $R_w = G_1 W_1 + G_2 W_2$ . Воспользуемся алгебраическим тождеством  $f\xi + g\eta = (f+g)[(\xi+\eta)/2] + (f-g)[(\xi-\eta)/2]$  и покажем, что

$$R_{wv} = (T_1 - G_1) \frac{U_1 - W_1}{2} + (T_2 - G_2) \frac{U_2 - W_2}{2} + F_1 V_1 + F_2 V_2,$$

где

$$V_1 = \frac{U_1 + W_1}{2} = \frac{u_1(A) + u_1(B) + u_1(C) + u_1(D) + w_1(A') + w_1(B') + w_1(C') + w_1(D')}{8},$$

$$V_2 = \frac{U_2 + W_2}{2} = \frac{u_2(A) + u_2(B) + u_2(C) + u_2(D) + w_2(A') + w_2(B') + w_2(C') + w_2(D')}{8}$$

— компоненты среднего смещения зерна, а

$$F_1 = T_1 + G_1 = f_1(2l)^2, \quad F_2 = T_2 + G_2 = f_2(2l)^2$$

— компоненты равнодействующей всех сил, приложенных к зерну. Величины

$$\chi_1 = \frac{U_1 - W_1}{2}, \quad \chi_2 = \frac{U_2 - W_2}{2}$$

— это два искомым кинематических инварианта, а

$$Q_1 = T_1 - G_1 = (2l)^2 q_1, \quad Q_2 = T_2 - G_2 = (2l)^2 q_2$$

— соответствующие силовые переменные. Инварианты  $\chi_1, \chi_2$  описывают новый по сравнению с (3), (8) тип изгиба зерна. Данный изгиб реализуется, если среднее смещение контактов с соседними зёрнами не совпадает со средними смещениями контактов с поровой средой. Сопряженные силы — это разности суммарных сил, действующих со стороны соседних зёрен, и сил, действующих со стороны окружающих пор.

Последний кинематический инвариант содержится в слагаемых, содержащих поворот зерна, т. е. в выражении для работы  $R_\omega$  (14). Для однозначного решения вопроса об инварианте необходимо сформулировать дополнительное условие. Естественно принять следующее условие: в формуле для  $R_\omega$  должно обязательно фигурировать выражение для суммарного момента всех сил, которые действуют на зерно:

$$M_\omega = T_\omega l + G_\omega l' = \mu_\omega (2l)^2.$$

Данное выражение содержит два параметра —  $l$  и  $l'$ . В исходную формулу для работы параметры  $l, l'$  не входят. Поэтому структура выражения для  $R_\omega$  должна быть такой, чтобы оба параметра  $l$  и  $l'$  сократились или уничтожились. Данному условию удовлетворяет следующее тождество:

$$R_\omega = T_\omega U_\omega + G_\omega W_\omega = (T_\omega l + G_\omega l') \left( \frac{U_\omega}{2l} + \frac{W_\omega}{2l'} \right) + (T_\omega l - G_\omega l') \left( \frac{U_\omega}{2l} - \frac{W_\omega}{2l'} \right) = M_\omega \Omega + Q_\omega \chi_\omega.$$

Смысл всех сомножителей предельно ясен:  $M_\omega$  — момент всех сил, поэтому величину  $\Omega = U_\omega / 2l + W_\omega / 2l'$  необходимо отождествить со средним поворотом зерна, которое оно совершает под действием суммарного момента. Величины  $\chi_\omega = U_\omega / 2l - W_\omega / 2l'$  можно назвать деформацией скручивания, а  $q_\omega$ , где  $Q_\omega = T_\omega l - G_\omega l' = q_\omega (2l)^2$ , — скручивающим напряжением. Деформация скручивания  $\chi_\omega$  возникает, с одной стороны, при несовпадении поворотов зерна под действием сил со стороны соседних зерен упаковки, а с другой — под действием усилий от связующего (поровой среды). Очевидно, что  $\chi_\omega$  — инвариант (последний, тринадцатый).

Представим выражение для работы через инвариантные переменные и движение зерна как жесткого целого. Отметим, что для переменных, заданных в точках  $A, B, C, D$ , естественным масштабом являлась величина  $l$ , а для переменных в точках  $A', B', C', D'$  —  $l'$ , т. е. частицы нигде не предполагаются сферическими. Единственное условие на форму частиц — ее симметрия относительно осей  $Ox_1x_2, Oxy$ , поэтому в формулах для удельной работы появится параметр перехода от  $l$  к  $l'$ , который назовем параметром формы  $\lambda$ . Он связан с величиной просветности  $m$ :  $\lambda^2 = (l'/l) = 2(1-m)^2$ ,  $m = \rho(l' + \rho)$ . Обозначим через  $A^*$  — работу, затраченную на собственно деформирование зерна. Тогда

$$\frac{A^*}{(2l)^2} = \frac{A}{(2l)^2} - f_1V_1 - f_2V_2 - \mu_\omega\Omega = \langle t_{11} \rangle \varepsilon_{11} + \langle t_{22} \rangle \varepsilon_{22} + t_\gamma \gamma_{12} + \theta_1 \kappa_1 + \theta_2 \kappa_2 + \lambda^2 [\langle \tau_{xx} \rangle \varepsilon_{xx} + \langle \tau_{yy} \rangle \varepsilon_{yy} + \tau_\gamma \gamma_{xy} + \vartheta_x \zeta_x + \vartheta_y \zeta_y] + q_1 \chi_1 + q_2 \chi_2 + q_\omega \chi_\omega. \quad (15)$$

Равенство (15) назовем основным энергетическим тождеством. Если вместо  $A, \langle t_{11} \rangle, \varepsilon_{11}$  и др. подставить их выражения через  $u_1(A), t_{11}(A), \dots$ , а затем выполнить все операции, то придем к равенству  $0=0$ . В этом смысле результат (15) можно считать абсолютно истинным в таком же смысле, как результат  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Теперь перейдем к выводу уравнений.

### УПРУГИЙ ПОТЕНЦИАЛ. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗЕРЕН

Предположим, что зерна являются идеально упругими. Основное тождество однозначно решает вопрос о числе необходимых упругих уравнений и их структуре. Отметим, что тождество останется верным, если символы  $t_{11}, u_1, \dots$  заменить на любые другие и приписать им любой новый смысл. Заменим  $t_{11}$  и другие силовые переменные на  $dt_{11}, \dots$ . Для идеально упругого тела правая часть тождества должна быть полным дифференциалом. Следовательно, существует упругий потенциал

$$\Pi = \Pi(\langle t_{11} \rangle, \langle t_{22} \rangle, t_\gamma, \theta_1, \theta_2, \langle \tau_{xx} \rangle, \langle \tau_{yy} \rangle, \tau_\gamma, \vartheta_x, \vartheta_y, q_1, q_2, q_\omega) \quad (16)$$

и для каждого зерна выполняются тринадцать уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{u_1(A_{ij}) - u_1(C_{ij})}{2l} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \langle t_{11} \rangle}, & \frac{u_2(B_{ij}) - u_2(D_{ij})}{2l} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \langle t_{22} \rangle}, \\ \frac{u_2(A_{ij}) - u_2(C_{ij})}{2l} + \frac{u_1(B_{ij}) - u_1(D_{ij})}{2l} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \langle t_\gamma \rangle}, \\ \frac{u_1(A_{ij}) + u_1(C_{ij}) - u_1(B_{ij}) - u_1(D_{ij})}{4} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1}, & \frac{u_2(A_{ij}) + u_2(C_{ij}) - u_2(B_{ij}) - u_2(D_{ij})}{4} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2}, \end{aligned} \quad (17)$$



$$\begin{aligned}
 \lambda^2 \frac{w_x(A'_{ij}) - w_x(C'_{ij})}{2l'} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \langle \tau_{xx} \rangle}, & \lambda^2 \frac{w_y(B'_{ij}) - w_y(D'_{ij})}{2l'} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \langle \tau_{yy} \rangle}, \\
 \lambda^2 \frac{w_y(A'_{ij}) - w_y(C'_{ij})}{2l'} + \frac{w_x(B'_{ij}) - w_x(D'_{ij})}{2l'} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_y}, \\
 \lambda^2 \frac{w_x(A'_{ij}) + w_x(C'_{ij}) - w_x(B'_{ij}) - w_x(D'_{ij})}{4} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mathcal{G}_x}, \\
 \lambda^2 \frac{w_y(A'_{ij}) + w_y(C'_{ij}) - w_y(B'_{ij}) - w_y(D'_{ij})}{4} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mathcal{G}_y},
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{u_1(A_{ij}) + u_1(B_{ij}) + u_1(C_{ij}) + u_1(D_{ij})}{4} - \frac{w_1(A'_{ij}) + w_1(B'_{ij}) + w_1(C'_{ij}) + w_1(D'_{ij})}{4} &= 2 \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \\
 \frac{u_2(A_{ij}) + u_2(B_{ij}) + u_2(C_{ij}) + u_2(D_{ij})}{4} - \frac{w_2(A'_{ij}) + w_2(B'_{ij}) + w_2(C'_{ij}) + w_2(D'_{ij})}{4} &= 2 \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \\
 \frac{u_2(A_{ij}) - u_2(C_{ij})}{2l} - \frac{u_1(B_{ij}) - u_1(D_{ij})}{2l} - \frac{w_y(A'_{ij}) - w_y(C'_{ij})}{2l'} + \frac{w_x(B'_{ij}) - w_x(D'_{ij})}{2l'} &= \frac{\partial \Pi}{\partial q_\omega}.
 \end{aligned}$$

Здесь и далее обозначения  $i, j, A_{ij}, \dots, D'_{ij}$  относятся к координатам зерна и его контактам с другими зёрнами и поровой средой.

#### УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОРОВОЙ СРЕДЫ

Ограничимся случаем, когда материал в отдельной поре деформируется однородно и линейно упруго. Условие однородности приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx}(C'_{i+1,j+1}) &= \tau_{xx}(A'_{ij}), \\
 \tau_{xy}(C'_{i+1,j+1}) &= \tau_{xy}(A'_{ij}), \\
 \tau_{yy}(D'_{i,j+1}) &= \tau_{yy}(B'_{i+1,j}), \\
 \tau_{yx}(D'_{i,j+1}) &= \tau_{yx}(B'_{i+1,j}).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Примем, что сосредоточенным моментом на контакте “поровый материал – зерно” можно пренебречь. Тогда

$$\tau_{xy}(A'_{ij}) = \tau_{yx}(B'_{i+1,j}). \tag{20}$$

Условие линейной упругости дает следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 \frac{w_x(C'_{i+1,j+1}) - w_x(A'_{ij})}{2\rho} &= \frac{1}{E_{\Pi}} (\tau_{xx} - \nu_{\Pi} \tau_{yy}), \\
 \frac{w_y(D'_{i,j+1}) - w_y(B'_{i+1,j})}{2\rho} &= \frac{1}{E_{\Pi}} (\tau_{yy} - \nu_{\Pi} \tau_{xx}), \\
 \frac{w_y(C'_{i+1,j+1}) - w_y(A'_{ij})}{2\rho} + \frac{w_x(D'_{i,j+1}) - w_x(B'_{i+1,j})}{2\rho} &= \frac{1}{\mu_{\Pi}} \tau_{xy},
 \end{aligned} \tag{21}$$

где  $E_{\Pi}, \nu_{\Pi}, \mu_{\Pi}$  — три независимые упругие постоянные.

Предельный случай, когда  $\mu_{\Pi} \rightarrow 0, \tau_{xx} \rightarrow \tau_{yy} \rightarrow (-p)$ , соответствует флюиду, представляющему собой сжимаемую жидкость.

### ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим взаимодействие зерен между собой. На всех контактах вектор напряжений непрерывный. Однако, если допускать пластическое течение, разрушение, дилатансию и т. д., то смещения на контактах между зернами будут разрывными:

$$\frac{\bar{u}(C_{i+1,j}) - \bar{u}(A_{ij})}{2l} = r_{11}\bar{e}_1 + r_{12}\bar{e}_2, \quad \frac{\bar{u}(D_{i,j+1}) - \bar{u}(B_{ij})}{2l} = r_{21}\bar{e}_1 + r_{22}\bar{e}_2, \quad (22)$$

где компоненты разрывов должны быть заданы либо как функции соответствующих напряжений:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \varphi(t_{11}, t_{12}), & r_{12} &= \psi(t_{12}, t_{11}), \\ r_{21} &= \psi(t_{21}, t_{22}), & r_{22} &= \varphi(t_{22}, t_{21}), \end{aligned} \quad (23)$$

либо через связи  $r_{11}$  с  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  с  $r_{12}$  (дилатансия) и т. д. Главное, что на каждом контакте должно быть задано два уравнения. На этом построение определяющих уравнений завершается.

### ЗАМКНУТАЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ МОДЕЛЬ

Обратимся теперь к уравнениям равновесия. Для каждого зерна должны выполняться три уравнения:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{t_{11}(A_{ij}) - t_{11}(C_{ij})}{2l} + \frac{t_{21}(B_{ij}) - t_{21}(D_{ij})}{2l} + \\ &+ \frac{\lambda^2}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\tau_{xx}(A'_{ij}) - \tau_{xx}(C'_{ij})}{2l'} + \frac{\tau_{yx}(B'_{ij}) - \tau_{yx}(D'_{ij})}{2l'} - \frac{\tau_{xy}(A'_{ij}) - \tau_{xy}(C'_{ij})}{2l'} - \frac{\tau_{yy}(B'_{ij}) - \tau_{yy}(D'_{ij})}{2l'} \right] = 0, \\ f_2 &= \frac{t_{12}(A_{ij}) - t_{12}(C_{ij})}{2l} + \frac{t_{22}(B_{ij}) - t_{22}(D_{ij})}{2l} + \\ &+ \frac{\lambda^2}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\tau_{xx}(A'_{ij}) - \tau_{xx}(C'_{ij})}{2l'} + \frac{\tau_{yx}(B'_{ij}) - \tau_{yx}(D'_{ij})}{2l'} + \frac{\tau_{xy}(A'_{ij}) - \tau_{xy}(C'_{ij})}{2l'} + \frac{\tau_{yy}(B'_{ij}) - \tau_{yy}(D'_{ij})}{2l'} \right] = 0, \\ 2f_\omega &= t_{12}(A_{ij}) + t_{12}(C_{ij}) - t_{21}(B_{ij}) - t_{21}(D_{ij}) - 2\lambda^2 [\tau_{xy}(A'_{ij}) + \tau_{xy}(C'_{ij}) - \tau_{yx}(B'_{ij}) - \tau_{yx}(D'_{ij})] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

(в динамике в правых частях появятся динамические члены).

Уравнения равновесия для материала, заключенного в отдельной поре, содержится в (19), (20). Примем, что данные уравнения имеют место и при динамическом режиме нагружения (в случае необходимости это условие можно ослабить).

Построенная система является замкнутой. Для определенности возьмем прямоугольную область с размерами  $(2l)n \times (2l')m$  (рис. 1). Она содержит  $n \cdot m$  — зерен;  $(n-1)(m-1)$  — пор,  $(n-1)m + (m-1)n$  — контактов между частицами,  $\Gamma$  — число граничных точек ( $2n+2m$  — граничные точки для зерен и  $4n+4m-4$  — для обнаженных на границе контактов граничных зерен с удаленной поровой средой — связующим):

$$\Gamma = 6n + 6m - 4. \quad (25)$$

Подсчитаем число степеней свободы у данной упаковки. Отметим, что степени свободы (22), связанные с пластическими разрывами смещений, полностью компенсируются уравнениями (23). При подсчете баланса указанные степени свободы и соответствующие уравнения

можно исключить. Поэтому можно принять, что один контакт дает только четыре степени свободы: две компоненты силы и две компоненты смещения, всего степеней свободы  $N_k = 4(2nm - m - n)$ . Одна пора дает 16 степеней свободы, всего  $N_\Gamma = 16(n-1)(m-1)$ . Одна граничная точка дает четыре степени свободы, всего  $4\Gamma$ . Таким образом, общее число степеней свободы равно  $N = N_k + N_\Gamma + 4\Gamma = 24nm - 20m - 20n + 16 + 4\Gamma$ .

Подсчитаем количество уравнений и краевых условий. Для каждой из  $n \cdot m$  частиц имеем 13 определяющих уравнений и 3 уравнения равновесия — всего  $M_r = 16n \cdot m$  уравнений. Для каждой из  $(n-1)(m-1)$  пор получим 8 уравнений: 4 условия однородности напряжений (19), одно условие на момент (20) и три определяющих уравнения (21). Всего  $M_\Pi = 8(n-1)(m-1)$  уравнений. Из механического смысла задачи видно, что в каждой граничной точке можно задать два условия: например, две компоненты напряжения, либо две компоненты смещения, либо некоторые их комбинации. Если число граничных точек равно  $\Gamma$ , то число краевых условий —  $M_\Gamma = 2\Gamma$ . Таким образом, общее число ограничений составит  $M = M_r + M_\Pi + M_\Gamma = 24nm - 8n - 8m + 8 + 2\Gamma$ . Если учесть (25), то видно, что  $N = M$ .

Отсюда можно сделать два вывода: поставленная задача (уравнения плюс граничные условия) является определенной и замкнутой; на поверхности зерен, обнаженных на границе, должны задаваться условия как на бывших контактах с зернами, так и на бывших контактах с поровой средой. Например, если речь о напряжениях, то должны задаваться не только полные напряжения  $\sigma$ , но и отдельные их составляющие  $t$  и  $\tau$  (с соответствующими индексами).

## ВЫВОДЫ

Сформулирована упруго-пластическая модель горной породы, в рамках которой возможно описание способности горной породы запасать энергию на внутренних самоуравновешенных напряжениях. Модель сформулирована как конечно-разностная, и для численного решения краевых задач ее вполне достаточно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Выявление** самонапряженного состояния горной породы / ОАО “НИЦ Строительство”; Стандарт организации СТО 36554501-019-2009. — М., 2010. — 31 с.
2. **Пономарев В. С.** Проблемы изучения энергетически активной геологической среды // Геотектоника. — 2011. — № 2. — С. 66–75.
3. **Мороз А. И.** Самонапряженное состояние горных пород. — М.: МГУ, 2004. — 288 с.
4. **Peng Z., Gombert J.** An integrated perspective of the continuum between earthquakes and slow-slip phenomena, *Nature Geoscience*, 2010, Vol. 3. — P. 599–607.
5. **Brune J. N.** Tectonic stress and the spectra of seismic shear waver from earthquakes, *J. of Geophysical Research*, 1970, Vol. 75, Issue 26. — P. 4997–5009.
6. **Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г.** Экспериментальная физика и механика горных пород. — СПб.: Наука, 2001. — 343 с.
7. **Ставрогин А. Н., Ширкес О. А.** Явление последствия в горных породах, вызванное предшествующей необратимой деформацией // ФТПРПИ. — 1986. — № 4. — С. 16–27.

8. **Горяинов П. М., Давиденко И. В.** Тектоно-кессонный эффект в массивах горных пород и рудных месторождений — важное явление геодинамики // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 5. — С. 1212–1215.
9. **Взрыв.** Горная энциклопедия. Т. 1 / под ред. Е. А. Козловского. — М.: Сов. энцикл., 1984. — 560 с.
10. **Садовский М. А.** О естественной кусковатости горных пород // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 4. — С. 829–831.
11. **Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф.** О свойстве дискретности горных пород // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1982. — № 12. — С. 13–18.
12. **Кочарян Г. Г.** Геомеханика разломов. — М.: Геос, 2016. — 424 с.
13. **Адушкин А. А., Горнов В. В., Курленя М. В., Опарин В. Н., Ревуженко А. Ф., Спивак А. А.** Знакопеременная реакция горной породы на динамическое воздействие // ДАН СССР. — 1992. — Т. 123. — № 2. — С. 263–269.
14. **Ревуженко А. Ф., Микенина О. А.** Упруго-пластическая модель горной породы с линейным структурным параметром // ПМТФ. — 2018. — № 2.
15. **Ревуженко А. Ф.** Об одном варианте линейной теории упругости со структурным параметром // ПМТФ. — 2016. — № 5. — С. 45–52.

*Поступила в редакцию 03/IV 2018*