ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В КАНАЛАХ С ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

В. И. Ягодкин (Москва)

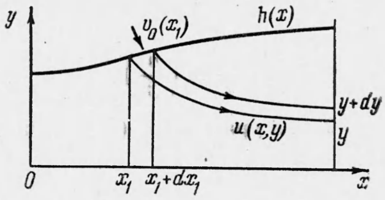
Течения сжимаемого газа в каналах часто не могут считаться одномерными, например при наличии фронта пламени [1–3], при оттоке газа от стенок во время их испарения или горения, а также в каналах с пористыми стенками [4–6]. Если площадь поперечного сечения канала и скорость оттока газа постоянны, а сжимаемостью газа можно пренебречь, то уравнения движения в ряде случаев допускают точные решения [4,6]. Для более сложных течений, в каналах переменного сечения или при переменной скорости оттока газа, применяют приближенные методы расчета [5]. В приближенных методах обычно предполагается, что давление в любом сечении постоянно. Оказалось, что применение приближенного метода для расчета течения в канале с пористыми параллельными стенками [5] дало результаты, совпадающие с точными [4]. В данной работе приближенный метод используется для расчета течений газа в каналах с пористыми стенками при учете сжимаемости газа.

1. Рассмотрим течение в плоском канале (фиг. 1) с шириной $h(x)$, образующееся в результате оттока газа от стенки с нормальной составляющей скорости $v_0(x)$. Канал симметричен относительно оси x. Будем считать, что влияние вязкости газа на течение несущественно, так что можно использовать уравнения движения невязкого газа. Для несжимаемой жидкости теоретически показано [4], что при числе Рейнольдса $R_0 = v_0 h / \nu \to \infty$ (где ν — кинематическая вязкость газа) сохраняется условие обращения в нуль касательной составляющей скорости потока на стенках канала. Этот вывод был подтвержден экспериментально [6] путем сравнения профилей скорости.

В приближенной теории течения сжимаемого газа будем считать, что это условие также выполнено. Эксперименты также указывают на то, что влияние перемешивания потока турбулентностью на течение в каналах с пористыми стенками несущественно. Поэтому можно считать, что на любой линии тока, выходящей из точки x_1 стенки канала, выполняется уравнение Бернулли

$$\Lambda = \frac{u(x, y)}{V_{\max}(x_1)} = \left[1 - \left(\frac{p(x, y)}{p^*(x, y)}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (1.1)$$

$$\left(V_{\max} = \frac{\sqrt{2}\, a_0}{\sqrt{\gamma - 1}}\right)$$



Фиг. 1

где $a_0(x_1)$ — скорость звука у стенки канала, γ — показатель адиабаты, $u(x, y)$ — осевая составляющая скорости потока. Влияние поперечной составляющей $v(x, y)$ на давление считается малым. Так как давление постоянно в любом сечении, то

$$p(x, y) = p(x) = p \qquad (1.2)$$

и давление заторможенного потока $p^*(x, y)$ при условии обращения в нуль касательной составляющей скорости потока на стенке равно

$$p^*(x, y) = p^*(x_1, h(x_1)) = p(x_1) = p_1 \qquad (1.3)$$

Тогда вместо (1.1) получим

$$\Lambda = \left(1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.4)$$

Для совершенного газа

$$\rho(x, y) = \rho^*(x, y)\left(\frac{p(x, y)}{p^*(x, y)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \rho_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \qquad (1.5)$$

Здесь $\rho_1 = \rho^*(x_1, h(x_1))$ — плотность у стенки. Для определения зависимости давления от длины канала используем (1.4) и (1.5) и уравнение неразрывности стационарного течения между двумя бесконечно близкими линиями тока (фиг. 1)

$$\rho_1 v_0(x_1)\sqrt{1 + h'^2(x_1)}\, dx_1 = \rho(x, y)\, u(x, y)\, dy \qquad (1.6)$$

Из (1.4) — (1.6) можно получить

$$dy = \frac{v_0(x_1)}{V_{\max}(x_1)}\left(\frac{p}{p_1}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1 + h'^2(x_1)}\, dx_1 \qquad (1.7)$$

Интегрируя (1.7) по y от 0 до $h(x)$ и по x_1 от 0 до x, получим интегральное уравнение для $p(x)$, которое при замене переменной

$$X = \int_0^x \frac{v_0(x_1)}{V_{\max}(x_1)} \sqrt{1 + h'^2(x_1)}\, dx_1 \tag{1.8}$$

имеет вид

$$h(X) = \int_0^X \left(\frac{p}{p_1}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{-\frac{1}{2}} dX_1 \qquad (p = p(X)) \tag{1.9}$$

При интегрировании (1.7) по y от 0 до y и по x_1 от 0 до x_1 получим связь между y и x_1, в сечении x для данной линии тока

$$y = \int_0^{X_1} \left(\frac{p}{p_1}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{-\frac{1}{2}} dX_1 \tag{1.10}$$

при этом функция $p(X)$ удовлетворяет уравнению (1.9).

Тогда по формулам (1.4), (1.8) и (1.10) можно определить поле скоростей.

2. Рассмотрим течение в канале постоянной ширины. Пусть ширина канала $h = 1$;

$$X = \int_0^x \Lambda_0(x_1)\, dx_1 \qquad \left(\Lambda_0(x_1) = \frac{v_0(x_1)}{V_{\max}(x_1)}\right)$$

где x отнесено к ширине канала.

Введем независимую переменную z и зависимую переменную $\varphi(z)$ по формулам

$$z = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \qquad \varphi(z) = z^{-\frac{1}{\gamma-1}} \frac{dX}{dz} \qquad (p_0 = (p(0)) \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (1.9) приводится к интегральному уравнению Абеля

$$\int_1^z \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{z - \zeta}} = z^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \tag{2.2}$$

решение которого имеет вид [7]

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{z-1}} - f(z)\right], \qquad f(z) = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \int_1^z \zeta^{-\frac{3\gamma-1}{2(\gamma-1)}} \frac{d\zeta}{\sqrt{z-\zeta}} \tag{2.3}$$

Связь величин X и z получим из соотношений (2.1) и (2.3)

$$X = \int_1^z \zeta^{\frac{1}{\gamma-1}} \varphi(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{\pi} I(z) - \frac{1}{\pi} \int_1^z \zeta^{\frac{1}{\gamma-1}} f(\zeta)\, d\zeta \tag{2.4}$$

причем

$$I(z) = \int_1^z \zeta^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta - 1}} = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} z^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} f(z) \tag{2.5}$$

Уравнение (1.10) в новых переменных имеет вид

$$y = z^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \int_1^z \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{z - \zeta}} \tag{2.6}$$

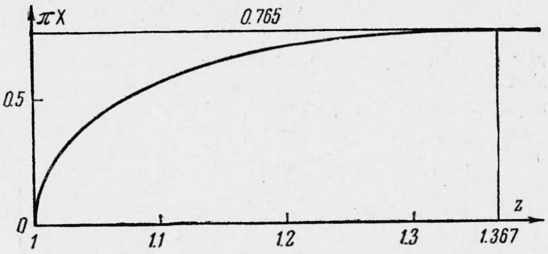
или, ввиду (2.3)

$$y = \frac{1}{\pi} z^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \left(\arcsin \frac{2\zeta - 1 - z}{z - 1} + \frac{\pi}{2} - \int_1^z \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{z - \zeta}}\right) \tag{2.7}$$

Поле скоростей определится из соотношения (1.4), согласно которому имеем

$$\Lambda = \sqrt{1 - \zeta / z} \qquad (2.8)$$

По формулам (2.3) — (2.5) и (2.7), (2.8) производился расчет течения. Интегралы, входящие в (2.5) и (2.7), находились численно. При $\gamma = 1.40$ на фиг. 2 построена зависимость величины X от z. Эта зависимость имеет пологий максимум при $z_m = 1.367$, равный $X_m = 0.243$, согласно уравнению $X'(z_m) = \varphi(z_m) = 0$.



Фиг. 2

Запиранию канала соответствует $z = z_m$, т. е. отношение давлений в начале и конце канала $p_0 / p = 2.99$ и

$$\int_0^{x_m} \Lambda_0(x_1)\, dx_1 = 0.243$$

где x_m — максимальная при данном распределении $\Lambda_0(x_1)$ длина канала.

Однако обычно известно не распределение $\Lambda_0(x_1)$, а величина потока массы $m_1 = \rho_1 v_0(x_1)$. Например, если пористая стенка канала обладает большим гидравлическим сопротивлением, то падение давления внутри канала может не влиять на величину m_1. При постоянном давлении снаружи канала $m_1 = \mathrm{const}$.

Пусть $T^* = \mathrm{const}$ и $m_1 = m(x_1)$; из уравнения состояния и из (2.1) имеем

$$\rho_1 = \rho_0 \zeta^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \qquad \Lambda_0(x_1) = \frac{m_1}{\rho_0 V_{\max}} \zeta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad (2.9)$$

Так как из (2.1) и (1.8)

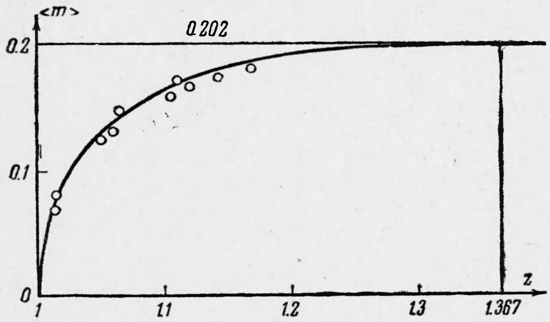
$$\frac{dX}{dx} = \frac{dX}{dz}\frac{dz}{dx} = z^{\frac{1}{\gamma-1}} \varphi(z) \frac{dz}{dx} = \Lambda_0(x) \qquad (2.10)$$

то для величины z получим уравнение

$$\int_1^z \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{\rho_0 V_{\max}} \int_0^x m(x_1)\, dx_1 = \frac{\langle m \rangle}{\rho_0 V_{\max}}, \qquad \langle m \rangle = \frac{1}{F} \int_F m_1 dx_1 \qquad (2.11)$$

связывающее переменные x и z (при этом функция $\varphi(z)$ определяется по формуле (2.3)).

Величина, стоящая в (2.11) справа, пропорциональна расходу газа в сечении x канала; $\langle m \rangle$ — средний поток массы в этом сечении, F — площадь сечения. Максимальный расход, пропускаемый каналом, определяется из (2.11) при $z = z_m$, когда величина $\langle m \rangle / \rho_0 V_{\max} = 0.202$. Зависимость (2.11) при $\gamma = 1.40$ построена на фиг. 3.



Фиг. 3

Поля скоростей Λ рассчитывались по формулам (2.7) — (2.8) при $\gamma = 1.40$ и $z = 1.05$, 1.10, 1.20, 1.30 и 1.367. Значения скорости возле ее максимума могут быть сверхзвуковыми, так как при коэффициенте скорости $\lambda = 1$ значение $\Lambda = 0.408$, а наибольшее значение скорости в сечении $\Lambda_m = \sqrt{1 - 1/z}$ при условии запирания канала соответствует $\Lambda_m = 0.518$, т. е. $\lambda = 1.27$. При этом ширина области сверхзвукового течения составляет около 0.81 всей ширины канала.

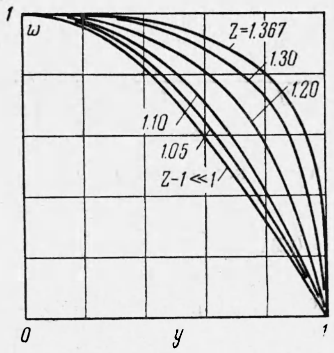
Формулы для течения несжимаемой жидкости в канале с пористыми стенками [5] получаются из приведенных выше формул в предельном случае $z - 1 \ll 1$. В этом случае из (2.4), (2.7) и (2.8) приближенно имеем

$$y = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{2\zeta - 1 - z}{z - 1} + \frac{1}{2}, \qquad X = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{z}} \qquad (2.12)$$

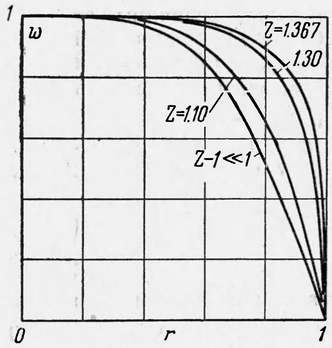
и, следовательно,

$$\Lambda = \frac{\pi}{2} X \cos \frac{\pi}{2} y \quad \text{или} \quad w = \frac{u}{U} = \cos \frac{\pi}{2} y \tag{2.13}$$

где U — значение скорости u при $y = 0$. На фиг. 4 для $\gamma = 1.4$ построены кривые относительных скоростей $w\ (y)$ для различных значений z. Сжимаемость газа приводит к расширению профилей по сравнению со случаем несжимаемой жидкости.



Фиг. 4



Фиг. 5

Осесимметричная задача (в частности, течение в круглой трубе) сводится к плоской заменой переменных

$$h\ (x) = R^2\ (x), \qquad X = 2 \int_0^x R\ (x_1)\ \Lambda_0\ (x_1) \sqrt{1 + R'^2\ (x_1)}\ dx_1, \quad y = r^2 \tag{2.14}$$

В этих обозначениях все уравнения, рассмотренные выше, сохраняют свой вид: Для круглой трубы ($R = 1$) профили скоростей $w(r)$ построены на фиг. 5. В соотношении (2.11) величина m_1 заменяется на $2m_1$, т. е. при одинаковом потоке массы со стенки запирание в круглой трубе происходит при вдвое меньшей длине, чем в плоском канале с параллельными стенками. Средний поток массы при запирании $\langle m_* \rangle$ как в трубе, так и в плоском канале с параллельными стенками равен

$$\langle m_* \rangle = 0.452\ \rho_0 a_0 \tag{2.15}$$

3. Была произведена экспериментальная проверка выводов приближенной теории. Изучалось течение воздуха в цилиндрической трубке с пористой поверхностью, обладающей большим гидравлическим сопротивлением. Методика проведения экспериментов описана ранее в работе автора [6]. Основная предпосылка теории — постоянство статического давления по сечению канала — подтвердилась как при скоростях потока малых по сравнению со звуковой, так и близких к звуковой. Определялась зависимость относительного среднего потока массы

$$\frac{\langle m \rangle}{\rho_0 V_{\max}} = \frac{M}{\rho_0 V_{\max} F} \qquad (F = \pi a^2) \ (M \text{ — расход массы, } a \text{ — радиус трубы})$$

от величины z для трубы длиной 300 *мм* и радиусом $a = 15$ *мм* (точки на фиг. 3). Как видим, приближенная теория удовлетворительно описывает течение сжимаемого газа в цилиндрических каналах с пористыми стенками.

Поступила 20 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. Замечания о горении быстрого потока в трубе. Ж. техн. физ., 1944, т. XIV, вып. 3.
2. Tsien H. S. Influence of flame front on the flow field. J. Appl. Mech., 1951, vol. 18, No. 2.
3. Черный Г. Г. Течение газа в трубе при наличии фронта пламени. Сб. Теоретическая гидромеханика, Оборонгиз, 1954, № 12.
4. Berman A. Laminar flow in channels with porous walls. J. Appl. Phys., 1953, vol. 24, No. 9.
5. Taylor G. Fluid flow in regions bounded by porous surfaces. Proc. Roy. Soc., 1956, 234, No. 1199.
6. Ягодкин В. И. Течение газа при горении в трубах с пористыми стенками. Инж. ж., 1961, № 3.
7. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. т. I. Гостехиздат, 1951.