УДК 519.46:(533+533.16+536.23)

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО СОВЕРШЕННОГО ГАЗА, ОПИСЫВАЕМЫЕ СИСТЕМАМИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. В. Бублик

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Описаны все инвариантные решения ранга 1 уравнений двумерных движений вязкого теплопроводного совершенного газа с политропным уравнением состояния. Дано достаточное условие редуцируемости к инвариантным регулярных частично инвариантных решений ранга 1 дефекта 1.

1. Общая постановка задачи. Рассматривается система уравнений осесимметричных движений вязкого теплопроводного совершенного газа с политропным уравнением состояния

$$\rho(u_t + uu_r + wu_z) = -p_r + \frac{2}{3}\Big(\mu\Big(2u_r - w_z - \frac{u}{r}\Big)\Big)_r + (\mu(u_z + w_r))_z + 2\mu\Big(\frac{u}{r}\Big)_r; \tag{1.1}$$

$$\rho(w_t + uw_r + ww_z) = -p_z + (\mu(u_z + w_r))_r + \frac{2}{3}\Big(\mu\Big(2w_z - u_r - \frac{u}{r}\Big)\Big)_z + \frac{\mu}{r}(u_z + w_r); \tag{1.2}$$

$$\rho_t + (u\rho)_r + (w\rho)_z + \frac{u\rho}{r} = 0; \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} p_t + up_r + wp_z + \gamma p\Big(u_r + w_z + \frac{u}{r}\Big) = \frac{\gamma - 1}{R} k_0\Big(\Big(\mu\Big(\frac{p}{\rho}\Big)_r\Big)_r + \Big(\mu\Big(\frac{p}{\rho}\Big)_z\Big)_z + \frac{\mu}{r}\Big(\frac{p}{\rho}\Big)_r\Big) + \\ + (\gamma - 1)\mu\Big(\frac{4}{3}\Big(u_r^2 + w_z^2 - u_r w_z + \frac{u}{r}\Big(\frac{u}{r} - u_r - w_z\Big)\Big) + (w_r + u_z)^2\Big). \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь ρ — плотность; p — давление; $\mu = (p/\rho)^\omega$ — коэффициент вязкости; $k_0\mu$ — коэффициент теплопроводности; γ — показатель адиабаты; R — газовая постоянная.

Целью данной статьи являются построение инвариантных решений ранга 1 системы (1.1)–(1.4) [1] и получение достаточного условия редуцируемости к инвариантным регулярных частично инвариантных решений ранга 1 дефекта 1 [2]. Все решения этих типов описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

В [3] показано, что система уравнений (1.1)–(1.4) допускает алгебру Ли L_5 с базисом

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_z, \qquad X_2 = t\partial_z + \partial_w, \qquad X_3 = \partial_t, \qquad X_4 = t\partial_t + r\partial_r + z\partial_z - \rho\partial_\rho - p\partial_p, \\ X_5 = r\partial_r + z\partial_z + u\partial_u + w\partial_w + 2(\omega - 1)\rho\partial_\rho + 2\omega p\partial_p. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Там же построена нормализованная оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_5, которая будет использоваться в этой работе. Соответствующую этой алгебре группу Ли преобразований обозначим через G_5.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00515).

Таблица 1

№	H	Представление решения
1	$3,\ 4+\alpha 5$ $(\alpha\neq -1)$	$u=r^{\alpha/(\alpha+1)}u_1(\xi)$, $w=r^{\alpha/(\alpha+1)}w_1(\xi)$, $\rho=r^{(2\alpha(\omega-1)-1)/(\alpha+1)}\rho_1(\xi)$, $p=r^{(2\alpha\omega-1)/(\alpha+1)}p_1(\xi)$, $\xi=z/r$
2	$2,\ 4+\alpha 5$ $(\alpha\neq -1)$	$u=t^{\alpha}u_1(\xi)$, $w=z/t+t^{\alpha}w_1(\xi)$, $\rho=t^{2\alpha(\omega-1)-1}\rho_1(\xi)$, $p=t^{2\alpha\omega-1}p_1(\xi)$, $\xi=rt^{-\alpha-1}$
3	$1,\ 4+\alpha 5$	$u=t^{\alpha}u_1(\xi)$, $w=t^{\alpha}w_1(\xi)$, $\rho=t^{2\alpha(\omega-1)-1}\rho_1(\xi)$, $p=t^{2\alpha\omega-1}p_1(\xi)$, $\xi=rt^{-\alpha-1}$
4	$4,\ 5$	$u=rt^{-1}u_1(\xi)$, $w=rt^{-1}w_1(\xi)$, $\rho=r^{2(\omega-1)}t^{1-2\omega}\rho_1(\xi)$, $p=r^{2\omega}t^{-1-2\omega}p_1(\xi)$, $\xi=z/r$
5	$3,\ 1+4-5$	$u=\exp(-z)u_1(r)$, $w=\exp(-z)w_1(r)$, $\rho=\exp((1-2\omega)z)\rho_1(r)$, $p=\exp(-(1+2\omega)z)p_1(r)$
6	$2,\ 1+4-5$	$u=u_1(r)/t$, $w=(z-\ln t+w_1(r))/t$, $\rho=t^{1-2\omega}\rho_1(r)$, $p=t^{-1-2\omega}p_1(r)$
7	$2+3,\ 4+5$	$u=r^{1/2}u_1(\xi)$, $w=t+r^{1/2}w_1(\xi)$, $\rho=r^{\omega-3/2}\rho_1(\xi)$, $p=r^{\omega-1/2}p_1(\xi)$, $\xi=(t^2-2z)/r$
8	$1,\ 2+4$	$u=u(\xi)$, $w=\ln t+w_1(\xi)$, $\rho=\rho_1(\xi)/t$, $p=p_1(\xi)/t$, $\xi=r/t$
9	$1,\ 3+5$	$u=\exp(t)u_1(\xi)$, $w=\exp(t)w_1(\xi)$, $\rho=\exp(2(\omega-1)t)\rho_1(\xi)$, $p=\exp(2\omega t)p_1(\xi)$, $\xi=r\exp(-t)$
10	$1,\ 3-5$	$u=\exp(-t)u_1(\xi)$, $w=\exp(-t)w_1(\xi)$, $\rho=\exp(2(1-\omega)t)\rho_1(\xi)$, $p=\exp(-2\omega t)p_1(\xi)$, $\xi=r\exp(t)$
11	$3,\ 5$	$u=ru_1(\xi)$, $w=rw_1(\xi)$, $\rho=r^{2(\omega-1)}\rho_1(\xi)$, $p=r^{2\omega}p_1(\xi)$, $\xi=z/r$
12	$2,\ 5$	$u=ru_1(t)$, $w=(z+rw_1(t))/t$, $\rho=r^{2(\omega-1)}\rho_1(t)$, $p=r^{2\omega}p_1(t)$
13	$1,\ 5$	$u=ru_1(t)$, $w=rw_1(t)$, $\rho=r^{2(\omega-1)}\rho_1(t)$, $p=r^{2\omega}p_1(t)$
14	$1,\ 2+3$	$u=u(r)$, $w=t+w_1(r)$, $\rho=\rho(r)$, $p=p(r)$
15	$1,\ 3$	$u=u(r)$, $w=w(r)$, $\rho=\rho(r)$, $p=p(r)$

2. Инвариантные решения ранга 1. Как известно, инвариантные решения ранга 1 системы (1.1)–(1.4) строятся на основе двумерных подалгебр, удовлетворяющих необходимому условию существования инвариантного решения. В табл. 1 приведены все такие подалгебры из оптимальной системы. Базис алгебры H обозначен номерами соответствующих операторов (1.5). Например, базис алгебры $\{X_3, X_4+\alpha X_5\}$ указан как $\{3,\ 4+\alpha 5\}$.

Конкретное решение ранга 1 можно получить следующим образом. Представление решения для конкретной подалгебры подставляется в систему (1.1)–(1.4). При этом получается факторсистема, являющаяся системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (в некоторых случаях первого). Из-за большого объема факторсистемы здесь не приводятся.

Решения, построенные на основе подалгебр 1, 5, 11, 15, описывают стационарные движения газа, на основе остальных — нестационарные.

В общем случае аналитически удается проинтегрировать только аналог уравнения (1.3) в факторсистеме. Однако в некоторых частных случаях анализ факторсистем удается провести глубже. Для трех подалгебр приведем здесь результат интегрирования при постоянных коэффициентах вязкости и теплопроводности (т. е. в случае $\omega=0$). Интегрирование проводится с точностью до нормализатора соответствующей подалгебры в L_5.

Подалгебра 12. Интегрирование факторсистемы дает

$$u_1 = \frac{1}{t+t_0}, \qquad w_1 = w_0\,\frac{\exp(t^2/2)}{t+t_0}, \qquad \rho_1 = \frac{1}{t}.$$

Функция $p_1(t)$ восстанавливается из уравнения

$$p_1' + \Big(\frac{2\gamma}{t+t_0} + \frac{\gamma}{t} - 4\,\frac{\gamma-1}{R}\,k_0 t\Big)p_1 = \frac{\gamma-1}{t^2(t+t_0)^2}\Big(\frac{4}{3}\,(1-t^2+t_0^2) + u_0^2 \exp(t^2)\Big).$$

Подалгебра 13. Интегрирование факторсистемы дает

$$u_1 = \frac{1}{t}, \qquad w_1 = w_0\,\frac{\exp(t)}{t}, \qquad \rho_1 = 1.$$

Функция $p_1(t)$ восстанавливается из уравнения

$$p_1' + \Big(\frac{2\gamma}{t} - 4\,\frac{\gamma-1}{R}\,k_0\Big)p_1 = \frac{\gamma-1}{t^2}\Big(\frac{4}{3} + w_0^2 \exp(2t)\Big).$$

Подалгебра 15. Интегрирование факторсистемы дает два интеграла

$$ru\rho = c_1, \qquad w = w_0 r^{c_1}.$$

Из оставшихся уравнений

$$\frac{4}{3}\Big(u' + \frac{u}{r}\Big)' - c_1\,\frac{u'}{r} - p' = 0,$$

$$up' + \gamma p\Big(u' + \frac{u}{r}\Big) = \frac{k_0(\gamma-1)}{c_1 R}\Big((rup)'' + \frac{(rup)'}{r}\Big) + (\gamma-1)\Big(\frac{4}{3}\Big(u'^2 - \frac{uu'}{r} + \frac{u^2}{r^2}\Big) + w_0^2 r^{2c_1}\Big)$$

восстанавливаются функции $u(r)$ и $p(r)$.

3. Редуцируемые к инвариантным частично инвариантные решения. Построение инвариантных решений существенно легче построения частично инвариантных. Поэтому критерии, позволяющие заранее отсеять редуцируемые к инвариантным частично инвариантные решения, помогают сосредоточить усилия на построении нередуцируемых решений. Здесь мы рассмотрим достаточное условие редуцируемости к инвариантным регулярных частично инвариантных решений ранга 1 дефекта 1. Поскольку эти решения редуцируются к инвариантным решениям ранга 1, то нет необходимости исследовать их отдельно: все подобные решения описаны выше.

Теорема. *Если универсальный инвариант подгруппы $H \subset G_5$ можно выбрать в виде*

$$J = (\xi(t,r),\ A(t,r)u,\ B(t,r)\rho,\ C(t,r)p), \tag{3.1}$$

где ξ, A, B, C — некоторые функции, то соответствующее регулярное частично инвариантное H-решение ранга 1 *дефекта* 1 *системы уравнений* (1.1)–(1.4) *редуцируется к инвариантному.*

Доказательство. Известно, что ранг и дефект частично инвариантного решения инвариантны относительно преобразования подобия подгрупп. Анализ инвариантов всех подгрупп показывает, что выполнение условия (3.1) для каждой подгруппы также инвариантно относительно преобразования подобия подгрупп. Поэтому доказательство теоремы достаточно провести только для подгрупп из оптимальной системы подгрупп. В табл. 2 перечислены все подгруппы, удовлетворяющие условию (3.1). Обозначения подалгебр совпадают с обозначениями табл. 1.

Приведем общую схему доказательства теоремы. Для каждой подгруппы из табл. 2 инварианты задают представление решения. При $\partial\xi/\partial r \neq 0$ из уравнения (1.3) следует либо

$$w(t,r,z) = \varphi(\xi)\,\frac{z}{t} + v(t,\xi), \tag{3.2}$$

Таблица 2

№	H	Инвариантные подгруппы
1	$1,2,4+\alpha 5$	$rt^{-\alpha-1}$, $ut^{-\alpha}$, $\rho t^{1-2\alpha(\omega-1)}$, $pt^{1-2\alpha\omega}$
2	$1,2,3+5$	re^{-t}, ue^{-t}, $\rho e^{2(1-\omega)t}$, $pe^{-2\omega t}$
3	$1,2,3-5$	re^{t}, ue^{t}, $\rho e^{2(\omega-1)t}$, $pe^{2\omega t}$
4	$1,2,3$	r, u, ρ, p
5	$1,2,5$	t, u/r, $\rho r^{2(1-\omega)}$, $pr^{-2\omega}$

либо

$$w(t,r,z) = \varphi(\xi)z + v(t,\xi). \tag{3.3}$$

Тогда уравнение (1.4) принимает вид

$$F(\xi) + \Big(f_1(t)\varphi' z + f_2(t)\,\frac{\partial v}{\partial \xi}\Big)^2 = 0, \tag{3.4}$$

где F, f_1, f_2 — известные (свои для каждой подгруппы) функции указанных аргументов. Из (3.4) следует $\varphi' = 0$.

При $\xi = t$ (3.2) или (3.3) принимает вид $w(t,r,z) = \varphi(t)z + v(t,r)$, (3.4) —

$$F(t) + \Big(\frac{\partial v}{\partial r}\Big)^2 = 0. \tag{3.5}$$

Интегралы уравнений (3.4) или (3.5) используются при анализе уравнения (1.1). В результате для w получается представление, позволяющее определить подгруппу, относительно которой построенное решение является инвариантным.

Доказательства для каждой конкретной подгруппы здесь не приводятся. Заметим, что все решения редуцируются к решениям, инвариантным относительно групп, подобных подгруппам 3, 6, 9, 10, 12, 13, 15 из табл. 1. Теорема доказана.

Среди подгрупп, на основе которых можно строить регулярные частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1, условию (3.1) не удовлетворяют две подгруппы. Они дают нередуцируемые к инвариантным частично инвариантные решения, рассмотрение которых выходит за рамки данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. **Овсянников Л. В.** Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 2. С. 156–159.
3. **Бублик В. В.** Групповая классификация двумерных уравнений движения вязкого теплопроводного совершенного газа // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 27–34.

Поступила в редакцию 20/III 1998 г.