Проблемы логики и методологии науки

УДК 165.17
DOI:
10.15372/PS20190202

А.В. Бессонов

ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ АРИФМЕТИКИ И АКСИОМА ПОЛНОТЫ

Теорема К. Гёделя о неполноте формальной арифметики Дедекинда – Пеано оценивается с точки зрения различных негёделевых средств формализации (не)доказуемости. Вводится предикат разрешимости, с использованием которого строится формула, формально выражающая полноту арифметики, и доказывается ее неразрешимость. Отсюда следует, что присоединение к формальной арифметике аксиомы ее полноты приводит к непротиворечивой системе, что в некотором смысле противоречит первой теореме Геделя о неполноте.

***Ключевые слова*:** теорема Гёделя о неполноте арифметики; формализация (не)доказуемости; предикат доказуемости; предикат опровержимости; предикат разрешимости; неразрешимость; аксиома полноты

A.V. Bessonov

GÖDEL'S INCOMPLETENESS THEOREM AND COMPLETENESS AXIOM

The article considers K. Gödel's incompleteness theorem of formal Dedekind–Peano arithmetic in respect to various non-Gödel means of formalizing (non)provability. A solvability predicate is introduced, using which we can frame up a formula that formally expresses the completeness of arithmetic and prove its insolvability. It followed that the addition of the axiom of completeness to formal arithmetic results in a consistent system which contradicts, in a sense, Gödel’s first incompleteness theorem.

***Keywords*:** Gödel's incompleteness theorem; formalization of (non)provability; provability predicate; falsifiability predicate; solvability predicate; unsolvability; completeness axiom

Введение

Знаменитые теоремы К. Гёделя о неполноте [8], безусловно, относятся к числу наиболее значимых и обсуждаемых результатов логики и математики XX в. Интерес к ним исследователей, работающих в самых различных областях знания, со временем не иссякает. В последние годы особенно активно развивается дискуссия вокруг второй теоремы Гёделя, что связано с попытками определенной реабилитации выдвинутой Д. Гильбертом программы финитного обоснования математики (см., например, обстоятельные обзоры в работах [10; 11] и приведенную в них литературу).

Большинство работ вокруг теорем о неполноте со времен Гёделя и до наших дней объединяет то обстоятельство, что они используют лишь те выразительные средства, которые применял при формализации понятия (не)доказуемости в арифметике сам Гёдель. Однако подобная ограниченность иногда приводит к неоправданной универсализации результатов Гёделя, что может послужить основой для неверных выводов. Например, как мы показали ранее, если при формализации рассуждений о (не)доказуемости вместо гёделева предиката доказуемости использовать выразимый в арифметике предикат опровержимости, то вывод второй теоремы о невозможности доказать в формальной арифметике ее собственную непротиворечивость оказывается неверным [1–5].

В настоящей работе мы продолжаем критический анализ теорем Гёделя о неполноте с точки зрения различных негёделевых средств формального выражения рассуждений о (не)доказуемости в арифметике. При этом в центр внимания мы ставим первую теорему о неполноте. Оказывается, что такие рассмотрения приводят к неожиданным и в какой-то степени парадоксальным результатам. Так, ранее нами показано, что доказательство первой теоремы о неполноте воспроизводится и при использовании предиката опровержимости. Заключение же второй теоремы в этом случае неверно, что приводит к неожиданному выводу о независимости второй теоремы о неполноте от первой [5]). В настоящей работе мы покажем, что присоединение к формальной арифметике Дедекинда – Пеано (обозначается как PA, ее определение см., например, в [2, с. 15–16]) аксиомы, выражающей ее полноту, приводит к непротиворечивой системе, что в некотором смысле противоречит первой теореме Геделя о неполноте PA.

1. Гёделева формализация (не)доказуемости в РА

Напомним стандартные определения и формулировки.

Теория называется *непротиворечивой*, если в ней не может быть доказана никакая формула вместе со своим отрицанием или, что эквивалентно, если хотя бы одна формула теории недоказуема.

Теория называется ω *-непротиворечивой*, если в ней нет ни одной формулы $\Phi(x)$ с одной свободной переменной, для которой доказуемы все формулы из списка

$$\Phi(1), \Phi(2), \ldots, \neg\forall x\Phi(x).$$

В *первой теореме Гёделя* о неполноте арифметики утверждается, что если РА ω -непротиворечива, то она неполна, т.е., в ней есть некоторая формула без свободных переменных такая, что ни она, ни ее отрицание не доказуемы (такие формулы называются *неразрешимыми*) [8, теорема IV].

В соответствии со *второй теоремой Гёделя*, если РА непротиворечива, то в ней недоказуема формула, выражающая непротиворечивость РА [8, теорема XI].

При доказательстве своих теорем Гёдель кодирует язык РА и ее логику (*гёделева нумерация*). Языковым выражениям РА эффективным образом ставятся в соответствие натуральные числа (*гёделевы номера*) так, чтобы разным выражениям сопоставлялись различные номера и по выбранному номеру можно было эффективно восстановить соответствующее этому номеру выражение. Далее вводится понятие выразимости.

Предикат $F(x_1, \ldots, x_k)$, заданный на множестве натуральных чисел, называется *выразимым*, если в РА найдется формула $\Phi(x_1, \ldots, x_k)$, такая, что для любого набора натуральных чисел $(n_1, \ldots, n_k)$ справедливы условия

I. Если $F(n_1, \ldots, n_k)$ выполняется, то $\vdash \Phi(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k)$;

II. Если $F(n_1, \ldots, n_k)$ не выполняется, то $\vdash \neg\, \Phi(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k)$.

Здесь и далее $\vdash$ означает доказуемость в РА, а $\boldsymbol{n}$ обозначает нумерал, соответствующий числу n.

Следует заметить, что определенная таким образом *выразимость* по смыслу существенно отличается от обычного употребления слова «выразимость». Зачастую выразимость в смысле Гёделя трактуется как перевод метаязыковых выражений на язык формальной арифметики. Но если это и перевод, то перевод крайне неоднозначный. Действительно, собственно арифметический смысл формулы, по-гёделевски выражающей некоторый предикат, может не иметь ничего общего со смыслом выражаемого ею предиката, и при этом одна и та же арифметическая формула может «выражать» в смысле Гёделя самые разные предикаты. Например, формула $x = \mathbf{3}$ может «выражать» номер левой скобки в нумерации Мендельсона [7, с. 151], число символов в формуле $x = y$, количество кванторов в формуле $\forall x \forall y \exists z\, F(x, y, z)$ и т.п. [3, с. 20–21]. С другой стороны, один и тот же предикат может «выражаться» различными неэквивалентными формулами (см., например, [6, с. 473]). Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, всегда, когда речь пойдет о выразимости по Гёделю, мы будем использовать термин «G-*выразимость*».

В доказательствах своих теорем Гёдель использует *предикат доказуемости* Prov(x, y), который выполняется тогда и только тогда, когда x является гёделевым номером некоторой формулы, а y – гёделевым номером доказательства этой формулы. Гёдель доказывает, что предикат Prov(x, y) G-выразим в PA с помощью некоторой арифметической формулы $Prov(x, y)$. Этот предикат играет центральную роль в доказательствах обеих теорем. При этом по какой-то необъяснимой причине Гёдель, как и почти все остальные исследователи, какие-либо иные (не использующие предикат доказуемости) способы G-выражения рассуждений о (не)доказуемости в арифметике вообще не рассматривает. В то же время использование альтернативных способов формализации (не)доказуемости значительно расширяет выразительные возможности языка PA и позволяет по-новому взглянуть на теоремы о неполноте.

Предикат разрешимости и аксиома полноты в PA

Рассмотрим предикат *разрешимости* Solv(x, y), который выполняется тогда и только тогда, когда x является гёделевым номером некоторой замкнутой формулы, а y – гёделевым номером доказательства формулы с номером x или номером доказательства отрицания формулы с номером x. Этот предикат разрешим. Его разрешающий алгоритм таков. Выберем пару натуральных чисел (l, k) и проверим, является ли l гёделевым номером какой-либо замкнутой формулы, а k – гёделевым номером какого-либо доказательства. Если это неверно, то предикатное выражение Solv(l, k) ложно по определению предиката. Если же l – гёделев номер какой-либо замкнутой формулы, а k – гёделев номер какого-либо доказательства, то по номеру l восстановим замкнутую формулу, а также отрицание этой формулы. Затем по номеру k восстановим соответствующее доказательство, которое, как известно, представляет собой последовательность формул. Рассмотрим заключительную формулу этой последовательности и сравним ее а) с формулой под номером l и (б) с отрицанием формулы под номером l. Если в одном из случаев (а), (б) произойдет совпадение, то Solv(l, k) истинно, а если ни в одном из случаев (а), (б) совпадения не будет, то Solv(l, k) ложно.

Итак, предикат Solv(l, k) разрешим. Поскольку из разрешимости предиката следует его G-выразимость (см., например, [7, с. 158]), предикат Solv(l, k) G-выразим в PA некоторой арифметической формулой $Solv(x, y)$, т.е. для него выполняются условия I, II G-выразимости:

I. Если Solv(l, k) выполняется, то $\vdash Solv(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k})$.

II. Если Solv(l, k) не выполняется, то $\vdash \neg Solv(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k})$.

Рассмотрим формулу

$$\forall x \exists y\, Solv(x, y).$$

Она G-выражает то, что в PA для любой замкнутой формулы доказуема либо она, либо ее отрицание, т.е. G-выражает факт полноты PA, поэтому ее естественно назвать *аксиомой полноты.* Обозначим эту формулу через G и докажем ее неразрешимость в PA.

Отрицанием G служит формула $\neg \forall x \exists y\, Solv(x, y)$, эквивалентная

$$\exists x \forall y\, \neg Solv(x, y).$$

Она G-выражает существование формулы такой, что ни она сама, ни ее отрицание не доказуемы в PA, т.е. G-выражает неполноту PA. Назовем эту формулу *аксиомой неполноты.*

Предположим, что в PA доказуема формула $\neg\, G$. Нетрудно понять, что предикат Solv(x, y) может быть G-выражен дизъюнкцией

$$Prov(x, y) \vee Fals(x, y),$$

где $Prov(x, y)$ – формула, G-выражающая гёделев предикат доказуемости, а $Fals(x, y)$ – формула, G-выражающая введенный нами ранее предикат опровержимости, который выполняется тогда и только тогда, когда x является гёделевым номером некоторой формулы, а y – гёделевым номером доказательства *отрицания* этой формулы (см., например, [1]). В самом деле, если Solv(l, k) выполняется, то выполняется либо Prov(l, k), либо Fals(l, k). Тогда по условиям G-выразимости либо $\vdash Prov(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k})$, либо $\vdash Fals(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k})$, откуда $\vdash Prov(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k}) \vee Fals(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k})$, т. е. выполняется условие I Gвыразимости. Если Solv(l, k) не выполняется, то $\vdash \neg\, Prov(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k})$ и $\vdash \neg\, Fals(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k})$, откуда $\vdash \neg\, Prov(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k}) \wedge \neg\, Fals(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k})$, что означает $\vdash \neg\, (Prov(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k}) \vee Fals(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k}))$, т.е. выполняется условие II G-выразимости.

По доказанному $\vdash \neg G$ означает $\vdash \neg\, \forall x \exists y\, (Prov(x, y) \vee Fals(x, y))$, что равносильно $\vdash \exists x \forall y \neg\, (Prov(x, y) \vee Fals(x, y))$, откуда $\vdash \exists x \forall y\ (\neg Prov(x, y) \wedge \neg Fals(x, y))$. Но из последнего, очевидно, вытекает $\vdash \exists x \forall y\ \neg Prov(x, y)$, т.е. $\vdash$ Consis (формула, G-выражающая факт существования в PA недоказуемой формулы, т.е. непротиворечивость PA), что невозможно в силу второй теоремы Гёделя о неполноте PA.

Теперь предположим, что в PA доказуема формула G, т.е.

$$\vdash \forall x \exists y\, Solv(x, y).$$

Пусть m – гёделев номер неразрешимой гёделевой формулы из первой теоремы о неполноте PA. Тогда из нашего предположения по закону

$$\forall x\, F(x) \to F(t)$$

получаем $\vdash \exists y\, Solv(\boldsymbol{m}, y)$. Так как m – номер неразрешимой формулы, ни одно натуральное число не может быть номером вывода ни ее, ни ее отрицания. Значит, ложны все предикатные выражения из списка

$$\mathrm{Solv}(m, 1), \mathrm{Solv}(m, 2), \mathrm{Solv}(m, 3), \ldots .$$

В таком случае по условиям G-выразимости доказуемы все формулы из списка

$$\neg\, Solv(\boldsymbol{m}, \mathbf{1}), \neg\, Solv\,(\boldsymbol{m}, \mathbf{2}), \neg\, Solv\,(\boldsymbol{m}, \mathbf{3}), \ldots .$$

Поэтому (в силу предположения об ω -непротиворечивости PA) не может быть доказуемой формула $\neg \forall\, y \neg\, Solv(\boldsymbol{m}, y)$, которая эквивалентна $\exists y\, Solv(\boldsymbol{m}, y)$. Таким образом, формула $\exists y\, Solv(\boldsymbol{m}, y)$ не может быть доказуемой. Получили противоречие.

Как итог заключаем, что формула

$$\forall x \exists y\, Solv(x, y)\,,$$

т.е. аксиома полноты PA неразрешима в PA. Очевидно, что это же верно и по отношению к отрицанию аксиомы полноты, т.е. к аксиоме неполноты

$$\exists x \forall y\, \neg Solv(x, y).$$

Перефразируя популярную формулировку второй теоремы Гёделя о неполноте, мы можем сказать, что арифметика, если она неполна, не может доказать свою собственную неполноту.

Поскольку аксиома полноты неразрешима в PA (т.е. ни она, ни ее отрицание не доказуемы в PA), ее можно присоединить к аксиомам PA, получив в результате непротиворечивую систему (см., например, [6, с. 191]). Эта система очевидно ω -противоречива. Действительно, как показано выше, в ней доказуемы все формулы из списка

$$\neg\, Solv(\boldsymbol{m}, \mathbf{1}), \neg\, Solv\,(\boldsymbol{m}, \mathbf{2}), \neg\, Solv\,(\boldsymbol{m}, \mathbf{3}), \ldots, \neg \forall\, y \neg\, Solv(\boldsymbol{m}, y),$$

где m – гёделев номер неразрешимой гёделевой формулы. Поэтому гёделево доказательство неполноты (без учета модификации Россера [9]) для этой системы незначимо. Но даже независимо от вопроса о полноте системы

PA + аксиома полноты

само по себе наличие непротиворечивой теории, в которой утверждается, что любая формула PA разрешима, в некотором смысле противоречит первой теореме Геделя о неполноте.

Могут возразить, что система PA с присоединенной к ней аксиомой полноты неприемлема в силу ее ω-противоречивости. Как утверждает С. Клини, «мы не хотим, чтобы наша система была ω-противоречивой, даже если она непротиворечива… мы, следуя Гильберту и П. Бернайсу, назвали бы эту систему *внешне противоречивой*, т.е. противоречащей естественной финитной интерпретации. Итак, доказательство простой непротиворечивости само по себе не дает гарантии, что в формализованной системе не окажется выводимой какая-нибудь содержательно ложная формула» [6, с. 191].

Следует сказать, что во всех подобных рассуждениях происходит подмена понятий, когда истинность в формальной арифметике как таковой подменяется «содержательной» истинностью, т.е. истинностью-в-нумерации. Но данные понятия отнюдь не совпадают. В самом деле, нетрудно привести пример формулы, построенной посредством предиката «быть гёделевым номером какого-то выражения арифметики», которая истинна и доказуема в одной нумерации и ложна и недоказуема в другой.

Так, в нумерации, построенной самим Гёделем, номер левой скобки – 11, а номер правой – 13. Рассмотрим предикат «быть гёделевым номером левой скобки». Он G-выразим арифметической формулой $x = \mathbf{11}$. Действительно, если этот предикат выполняется, то $\vdash \mathbf{11} = \mathbf{11}$, а если не выполняется, т.е. $x = k$, где k не равно 11, то $\vdash \neg(\boldsymbol{k} = \mathbf{11})$. Таким образом, оба условия I и II G-выразимости выполняются. Теперь перейдём к нумерации, применяемой Мендельсоном, где номер левой скобки – 3, а номер правой – 5. Тогда, подставив в ту же арифметическую формулу $x = \mathbf{11}$ (новый) номер левой скобки, получим $\mathbf{3} = \mathbf{11}$, т.е. формулу, недоказуемую в PA (доказуемо её отрицание) при условии, что PA непротиворечива. Значит, формула, G-выражающая предикат «быть гёделевым номером левой скобки», в одной нумерации «содержательно» истинна и доказуема, а в другой – ложна и недоказуема.

Таким образом, «содержательные» истинность и доказуемость формул арифметики напрямую зависят от принятой нумерации. Но ведь при оценке истинности или ложности (а также доказуемости или недоказуемости) какой-либо формулы PA имеются в виду ее истинность или ложность (а также доказуемость или недоказуемость) в арифметике как таковой, независимо от выбранной нумерации и вообще от самого факта нумерования выражений арифметики. Отсюда следует, что нет никаких оснований считать аксиому полноты арифметически ложной, а систему «PA + аксиома» полноты арифметически неприемлемой.

Литература

1. *Бессонов А.В.* К интерпретации теорем Гёделя о неполноте арифметики // Вестник Томск.,гос. ун-та. Сер.: Философия, социология, политология. – 2011. – № 4. – С. 177–189.

2.. *Бессонов А.В.* О двух неверных догмах, связанных со второй теоремой Гёделя о неполноте. I // Философия науки. – 2014. – № 4(63). – С. 12–31.

3. *Бессонов А.В.* О двух неверных догмах, связанных со второй теоремой Гёделя о неполноте. II // Философия науки. – 2016. – № 2(69). – С. 42–61.

4. *Бессонов А.В.* Что доказано и что не доказано во второй теореме Гёделя о неполноте арифметики // Сибирский философский журнал. – 2017. – Т. 15, вып. 3. – С. 218–233.

5. *Бессонов А.В.* Аналог теоремы Гёделя о неполноте арифметики с использованием предиката опровержимости // Сибирский философский журнал. – 2018. – Т. 16, вып. 4. – С. 58–68.

6. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. – М.: Изд-во иностр. лит., 1957. – 527 с.

7. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. – М: Наука, 1976. – 320 с.

8. *Gödel K.* Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I // Monatshefte für Mathematik und Physik. 1931. Bd. 38. S. 173–198.

9. *Rosser B.* Extensions of Some Theorems of Gödel and Church // Journal of Symbolic Logic. – 1936. – Vol. 1? No. 3. – P. 87–91.

10. *Zach R.* Hilbert’s Program // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / Ed. by E.N. Zalta – URL: https://plato.stanford.edu/archives/spr2016/entries/hilbert-program/ (дата обращения:15.05.2016).

11. *Zach R.* Hilbert’s Program Then and Now // – Handbook of Philosophy of Science. Vol. 5: Philosophy of Logic/ Ed. by D. Jacquette. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – P. 411–447.

References

1. *Bessonov, A.V.* (2011). K interpretatsii teorem Gedelya o nepolnote arifmetiki [On the interpretation of Gödel’s incompleteness theorems]. Vestnik Tomsk. gos. un-ta. Ser.: Filosofiya, sotsiologiya, politologiya [Bulletin of Tomsk State University. Philosophy, Sociology and Political Science Series], 4, 177–189.

2. *Bessonov, A.V.* (2014). O dvukh nevernykh dogmakh, svyazannykh so vtoroy teoremoy Gedelya o nepolnote. I [On two false dogmas related to Gödel's Second Incompleteness Theorem. I]. Filosophiya nauki [Philosophy of Science], 4 (63), 12–31.

3. *Bessonov, A.V.* (2016). O dvukh nevernykh dogmakh, svyazannykh so vtoroy teoremoy Gedelya o nepolnote. II [On two false dogmas related to Gödel's Second Incompleteness Theorem. II]. Filosophiya nauki [Philosophy of Science], 2 (69), 42–61.

4. *Bessonov, A.V.* (2017). Chto dokazano, i chto ne dokazano vo vtoroy teoreme Gedelya o nepolnote arifmetiki [What is proved and what is not proved in Gödel's Second Incompleteness Theorem]. Sibirskiy filosofskiy zhurnal [Siberian Journal of Philosophy], Vol. 15, Iss. 3, 218–236.

5. *Bessonov, A.V.* (2018). Analog teoremy Gedelya o nepolnote arifmetiki s ispolzovaniem predikata oproverzhimosti [An Analogue of Gödel's Incompleteness Theorem using a falsifiability predicate]. Sibirskiy filosofskiy zhurnal [Siberian Journal of Philosophy], Vol. 16, Iss. 4, 58–68.

6. *Kleene, S.C.* (1957). Vvedenie v metamatematiku [Introduction to Metamathematics], Moscow, Inostrannaya Literatura Publ., 527. (In Russ.).

7. *Mendelson, E.* (1976). Vvedenie v matematicheskuyu logiku [Introduction to Mathematical Logic]. Moscow, Nauka Publ., 320. (In Russ.).

8. *Gödel, K.* (1031). Über formal unentscheidbare Sütze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I [On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems]. Monatshefte fьr Mathematik und Physik [Mathematics and Physics Monthly], 38, 173–198.

9. *Rosser, B.* (1936). Extensions of some theorems of Gödel and Church. Journal of Symbolic Logic, Vol. 1, No. 3, 87–91.

10. *Zach, R.* (2006). Hilbert's Program then and now. In: Jacquette, D. (Ed.). Handbook of Philosophy of Science. Vol. 5. Philosophy of Logic. Amsterdam, Elsevier, 411–447.

11. *Zach, R.* Hilbert's Program. In: Zalta, E.N. (Ed.). The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Available at: https://plato.stanford.edu/archives/spr2016/entries/hilbert-program/ (date of access: 15.05.2016).

Информация об авторе

Бессонов Александр Владимирович – доктор философских наук, ведущий научный сотрудник Института философии и права Сибирского отделения РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8, e-mail: trt@academ.org).

Information about the author

Bessonov Alexandr Vladimirovich – Doctor of Sciences (Philosophy), Leading Researcher at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaeva st., Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: trt@academ.org).

Дата поступления 04.05.2019