

**ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫЙ АЛГОРИТМ СЕГМЕНТАЦИИ  
КОНТУРНЫХ ЛИНИЙ ОБЪЕКТОВ\*****И. С. Грузман***Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск**E-mail: gruzman@ktor.ref.nstu.ru*

Предложена методика определения параметров алгоритма сегментации контурных линий объектов при их параметрическом представлении. Получены аналитические формулы, устанавливающие связь между параметрами алгоритма, характеристиками шума и условной вероятностью ошибки, состоящей в принятии прямолинейного отрезка контурной линии за криволинейный. Показано, что при параметрическом представлении контурных линий эффективность алгоритма сегментации не зависит от ориентации контурной линии на плоскости.

**Введение.** В ряде алгоритмов распознавания изображений используются геометрические характеристики распознаваемых объектов [1, 2]. Для описания геометрии контура объекта применяются алгоритмы сегментации, разбивающие контурную линию на прямолинейные и криволинейные отрезки. В качестве меры, позволяющей отличить кривую линию от прямой, обычно используют кривизну линии на плоскости, значение которой зависит от производных первого и второго порядков [3]. Из-за наличия шума, разрывов контурной линии и искажений, обусловленных первичной обработкой изображений, алгоритмы, опирающиеся на непосредственное вычисление кривизны контурной линии, обладают низкой помехоустойчивостью.

В работе [4] предложен аппроксимативный метод вычисления кривизны, основанный на построении помехоустойчивых оценок производных, которые получены путем аналитической аппроксимации плоских кривых, заданных в виде

$$y = f(x). \quad (1)$$

Дискретная контурная линия  $\{y_x, x = \overline{1, n}\}$ , содержащая  $n$  точек, аппроксимируется в  $m$ -окрестности начала координат многочленом второго порядка

$$y_x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2, \quad x = \overline{-m, m},$$

\* Работа выполнена при поддержке фонда «Научный потенциал».

где коэффициенты  $c_l, l = \overline{0,2}$ , определяются по методу наименьших квадратов. В этом случае аппроксимативная  $m$ -оценка кривизны в точке  $x = 0$  имеет вид

$$\tilde{K}_{m,x} = \left| \frac{c_2}{(1 + c_1^2)^{3/2}} \right|.$$

Основным недостатком предложенного алгоритма является представление линии в виде (1), которое приводит к тому, что характеристики алгоритма зависят от ориентации контурной линии на плоскости [4].

Очевидно, что представление контурной линии в параметрическом виде

$$x = x(t), \quad (2)$$

$$y = y(t) \quad (3)$$

позволит устранить эту зависимость. Кроме того, в литературе отсутствуют методы выбора параметров алгоритмов сегментации контурной линии на отрезки прямых и кривых линий, например размеры  $m$ -окрестности [4] или порог  $S$ , с которым сравнивается решающая статистика в алгоритме сегментации.

Целью предлагаемой работы является создание методики определения параметров аппроксимативного алгоритма сегментации контурной линии, представленной в параметрическом виде, на два класса – отрезки прямых и кривых линий.

**Алгоритм сегментации контурной линии.** Кривизна линии, представленной в параметрическом виде (2), (3), вычисляется по формуле [3]

$$K = \frac{x' y'' - x'' y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}},$$

где  $x', y'$  и  $x'', y''$  – первые и вторые производные от (2) и (3) по параметру  $t$  соответственно.

Пусть дискретная контурная линия содержит  $n$  точек с координатами  $\{x_i, y_i, i = \overline{1, n}\}$ . Так же, как и в [4], будем совмещать каждую  $i$ -ю точку контурной линии, для которой вычисляется кривизна, с началом координат. Дискретные последовательности в  $m$ -окрестности начала координат аппроксимируем полиномами второго порядка

$$\begin{cases} y_k = \sum_{l=0}^2 \tilde{a}_l k^l, \\ x_k = \sum_{l=0}^2 \tilde{b}_l k^l, \end{cases} \quad k = \overline{-m, m}. \quad (4)$$

Коэффициенты аппроксимации  $\{\tilde{a}_l, \tilde{b}_l, l = \overline{0,2}\}$  определим из условия

$$\left\langle \left( Y_k - \sum_{l=0}^2 \tilde{a}_l k^l \right)^2 + \left( X_k - \sum_{l=0}^2 \tilde{b}_l k^l \right)^2 \right\rangle = \min_{\{\tilde{a}_l, \tilde{b}_l, l = \overline{0,2}\}}, \quad (5)$$

где  $\{X_k, Y_k, k = \overline{-m, m}\}$  – наблюдаемые координаты точек контурной линии объекта, принадлежащие  $m$ -окрестности. В (5) и далее угловые скобки обозначают выборочное среднее, вычисленное для точек, принадлежащих  $m$ -окрестности, т. е.  $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=-m}^m (\cdot)$ . В этом случае  $m$ -оценку кривизны для  $i$ -й точки дискретной контурной линии можно вычислить по формуле

$$\tilde{K}(m) = 2 \frac{\tilde{a}_2 \tilde{b}_1 - \tilde{a}_1 \tilde{b}_2}{(\tilde{a}_1^2 + \tilde{b}_1^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

Суть алгоритма сегментации контурной линии состоит в следующем. Выделяются точки, принадлежащие  $m$ -окрестности  $i$ -й точки, и им последовательно присваиваются номера от  $-m$  до  $m$ . Далее вычисляются коэффициенты аппроксимации  $\tilde{a}_l, \tilde{b}_l, l=0,2$ , удовлетворяющие (5), и  $m$ -оценка кривизны (6). Затем гипотеза  $H_0$  принадлежности  $i$ -й точки отрезку прямой линии признается верной, если

$$|\tilde{K}(m)| \leq C. \quad (7)$$

В противном случае, т. е. при

$$|\tilde{K}(m)| > C,$$

признается верной альтернатива  $H_1$  принадлежности  $i$ -й точки криволинейному отрезку. Эта процедура повторяется для всех точек контурной линии. В результате контурная линия разбивается на сегменты двух типов – прямолинейные и криволинейные.

**Определение параметров алгоритма сегментации.** Порог  $C$  выберем, исходя из заранее заданного уровня вероятности принятия решения о том, что точка принадлежит криволинейному отрезку при условии истинности гипотезы  $H_0$ . Обозначим эту вероятность символом  $\alpha$ . Таким образом,

$$\alpha = P(|\tilde{K}(m)| \leq C / H_0) = 1 - \int_{-C}^C w(\tilde{K}(m) / H_0) d\tilde{K}(m), \quad (8)$$

где  $w(\tilde{K}(m) / H_0)$  – условная плотность распределения вероятностей (ПРВ)  $m$ -оценки кривизны (6) при условии, что верна гипотеза  $H_0$ . Вероятность принятия решения о принадлежности точки прямолинейному отрезку при условии истинности альтернативы  $H_1$  обозначим символом  $\beta$ . Условные вероятности ошибок  $\alpha$  и  $\beta$  характеризуют эффективность алгоритма сегментации (7).

Найдем ПРВ  $w(\tilde{K}(m) / H_0)$ . Итак, если истинной является гипотеза  $H_0$ , то наблюдаемыми координатами точек, принадлежащих  $m$ -окрестности, будут

$$\begin{cases} Y_k = a_0 + \mu \sin \phi k + \eta_{y,k}, \\ X_k = b_0 + \mu \cos \phi k + \eta_{x,k}, \end{cases} \quad k = \overline{-m, m},$$

где  $\{\eta_{x,k}, \eta_{y,k}, k = \overline{-m, m}\}$  – шумы наблюдения, обусловленные ошибками алгоритмов выделения контурной линии объекта, дискретностью решетки, на которой задано изображение, и т. п.;  $a_0, b_0, \mu$  и  $\phi$  – параметры, определяющие положение и длину отрезка прямой на плоскости. В частности, длина отрезка прямой равна  $2\mu m$ , а от значения угла  $\phi$  зависит его ориентация. Далее будем полагать, что шумы наблюдения являются независимыми случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковой дисперсией  $D_\eta$ . Независимость шумов наблюдения может быть обеспечена выбором величины шага дискретизации контурной линии. Если истинной является гипотеза  $H_0$ , то оценками коэффициентов  $\{\tilde{a}_l, \tilde{b}_l, l = \overline{1, 2}\}$  аппроксимирующих полиномов второго порядка (4), удовлетворяющими (5), будут:

$$\tilde{a}_1 = \mu \sin \phi + \frac{\langle \eta_{y,k} k \rangle}{\langle k^2 \rangle} = \mu \sin \phi + N_{y1}, \quad (9)$$

$$\tilde{b}_1 = \mu \cos \phi + \frac{\langle \eta_{x,k} k \rangle}{\langle k^2 \rangle} = \mu \cos \phi + N_{x1}, \quad (10)$$

$$\tilde{a}_2 = \frac{\langle \eta_{y,k} k^2 \rangle - \langle \eta_{y,k} \rangle \langle k^2 \rangle}{\langle k^4 \rangle - \langle k^2 \rangle^2} = N_{y2}, \quad (11)$$

$$\tilde{b}_2 = \frac{\langle \eta_{x,k} k^2 \rangle - \langle \eta_{x,k} \rangle \langle k^2 \rangle}{\langle k^4 \rangle - \langle k^2 \rangle^2} = N_{x2}, \quad (12)$$

где символом  $N$  обозначены случайные составляющие оценок аппроксимирующих коэффициентов (9)–(12). Если статистически независимые шумы наблюдения  $\{\eta_{x,k}, \eta_{y,k}, k = \overline{-m, m}\}$  являются гауссовскими, то случайные величины  $N_{x1}, N_{y1}, N_{x2}$  и  $N_{y2}$  будут также гауссовскими. Даже в случае негауссовских шумов наблюдения  $\{\eta_{x,k}, \eta_{y,k}, k = \overline{-m, m}\}$  нормализация  $N_{x1}, N_{y1}, N_{x2}$  и  $N_{y2}$  наступает достаточно быстро с увеличением  $m$ . Поэтому далее будем считать, что  $N_{x1}, N_{y1}, N_{x2}$  и  $N_{y2}$  – гауссовские случайные величины. Нетрудно показать, что в этом случае  $N_{x1}, N_{y1}, N_{x2}$  и  $N_{y2}$  взаимно независимые с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями:

$$D[N_{x1}] = D[N_{y1}] = \frac{D_\eta}{(2m+1)\langle k^2 \rangle} = D_1, \quad (13)$$

$$D[N_{x2}] = D[N_{y2}] = \frac{D_\eta}{(2m+1)(\langle k^4 \rangle - \langle k^2 \rangle^2)} = D_2. \quad (14)$$

Математические ожидания  $M[\cdot]$  и дисперсии  $D[\cdot]$  случайных величин  $N_{x1}, N_{y1}, N_{x2}$  и  $N_{y2}$  вычислены путем усреднения по ансамблю.

Подставив (9)–(12) в (6), получим

$$\tilde{K}(m) = 2 \frac{N_{y2}(\mu \cos \phi + N_{x1}) - N_{x2}(\mu \sin \phi + N_{y1})}{((\mu \sin \phi + N_{y1})^2 + (\mu \cos \phi + N_{x1})^2)^{3/2}}. \quad (15)$$

Таким образом, оценка кривизны  $\tilde{K}(m)$  зависит от истинных значений параметров  $\mu, \phi$  и взаимно независимых гауссовских случайных величин  $N_{x1}, N_{y1}, N_{x2}, N_{y2}$  с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями (13), (14).

Представим формулу (15) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(m) &= 2 \left( N_{y2} \frac{\mu \cos \phi + N_{x1}}{\sqrt{(\mu \sin \phi + N_{y1})^2 + (\mu \cos \phi + N_{x1})^2}} - \right. \\ &\quad \left. - N_{x2} \frac{\mu \sin \phi + N_{y1}}{\sqrt{(\mu \sin \phi + N_{y1})^2 + (\mu \cos \phi + N_{x1})^2}} \right) \frac{1}{(\mu \sin \phi + N_{y1})^2 + (\mu \cos \phi + N_{x1})^2} = \\ &= 2(\cos \phi N_{y2} - \sin \phi N_{x2}) \frac{1}{\rho^2} = Z \frac{1}{\rho^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\phi = \arctg \left( \frac{\mu \sin \phi + N_{y1}}{\mu \cos \phi + N_{x1}} \right),$$

$$\rho = \sqrt{(\mu \sin \phi + N_{y1})^2 + (\mu \cos \phi + N_{x1})^2}$$

– фаза и модуль случайного вектора  $\{\mu \sin \phi + N_{y1}, \mu \cos \phi + N_{x1}\}$  с взаимно независимыми гауссовскими компонентами соответственно. Известно, что в этом случае фаза  $\phi$  и модуль  $\rho$  – статистически независимые случайные величины [5], поэтому также статистически независимыми будут случайные величины  $\rho$  и  $Z$ .

Найдем ПРВ  $w(Z)$  случайной величины  $Z = 2(\cos \phi N_{y2} - \sin \phi N_{x2})$ . Условная ПРВ  $w(Z/\phi)$  является гауссовской с математическим ожиданием

$$M[Z/\phi] = \cos \phi M[N_{y2}] - \sin \phi M[N_{x2}] = 0 \quad (17)$$

и дисперсией

$$\begin{aligned} D[Z/\phi] &= 4(\cos^2 \phi M[(N_{y2})^2] - \\ &\quad - 2\cos \phi \cdot \sin \phi M[N_{y2}N_{x2}] + \sin^2 \phi M[(N_{x2})^2]) = 4D_2, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $D_2$  вычисляется по формуле (14).

Из (17) и (18) следует, что математическое ожидание  $M[Z/\phi]$  и дисперсия  $D[Z/\phi]$  не зависят от  $\phi$ . Поскольку случайная величина  $Z$  является гаус-

совской, то она также статистически не зависит от фазы  $\phi$ . Таким образом, ПРВ  $w(Z) = w(Z/\rho)$  является гауссовской с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$D[Z] = 4D_2.$$

ПРВ модуля вектора  $\{\mu \sin \phi + N_{y1}, \mu \cos \phi + N_{x1}\}$  с взаимно независимыми гауссовскими компонентами с учетом (13) будет [5]

$$w(\rho) = \frac{\rho}{D_1} \exp\left(-\frac{\rho^2 + \mu^2}{2D_1}\right) I_0\left(\frac{\mu\rho}{D_1}\right), \quad (19)$$

где  $I_0(\cdot)$  – функция Бесселя нулевого порядка. С учетом (7), (8), (16) и (19) условная вероятность

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - P(|\tilde{K}(m)| \leq C/H_0) = 1 - P(|Z| \leq \rho^2 C/H_0) = \\ &= 1 - \int_0^\infty w(\rho) \left( \int_{-\rho^2 C}^{\rho^2 C} w(Z) dZ \right) d\rho = 1 - \int_0^\infty w(\rho) 2 \left( F\left(\frac{\rho^2 C}{\sqrt{4D_2}}\right) - 0,5 \right) d\rho = \\ &= 2 \left( 1 - \int_0^\infty \frac{\rho}{D_1} \exp\left(-\frac{\rho^2 + \mu^2}{2D_1}\right) I_0\left(\frac{\mu\rho}{D_1}\right) F\left(\frac{\rho^2 C}{\sqrt{4D_2}}\right) d\rho \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$  – интеграл Лапласа [5]. Поскольку параметры

$\mu$ ,  $D_1$  и  $D_2$ , входящие в (20), не зависят от параметра  $\phi$ , определяющего ориентацию отрезка прямой на плоскости, то вероятность ошибки  $\alpha$  также не зависит от его ориентации. Полученное соотношение можно существенно упростить, если дисперсия шумов наблюдения мала или  $m$ -окрестность достаточно большая, т. е. можно считать, что  $\rho \approx \mu$ , тогда из (16) следует  $\tilde{K}(m) \approx Z/\mu^2$ . В этом случае

$$\alpha \approx 2 \left( 1 - F\left(\frac{\mu^2 C}{\sqrt{4D_2}}\right) \right). \quad (21)$$

Полученные соотношения (20) и (21) устанавливают связь между параметрами алгоритма сегментации, дисперсией шума наблюдения  $D_\eta$  и условной вероятностью ошибки  $\alpha$ . В частности, из этих формул следует, что чем меньше  $D_\eta$  и чем больше длина отрезка прямой линии, определяемая параметрами  $\mu$  и  $m$ , тем меньше вероятность ошибки  $\alpha$ .

**Экспериментальные исследования алгоритма.** На рис. 1 приведены зависимости  $\alpha$  от порога  $C$  при  $m=10$  и  $D_\eta=4$ , рассчитанные по точной формуле (20) (сплошные линии) и по приближенной формуле (21) (штриховые линии). Из приведенных зависимостей следует, что погрешность вычисления условной вероятности ошибки  $\alpha$  с помощью приближенной формулы (21) достаточно мала при  $\frac{\mu}{\sqrt{D_1}} > 12$ .

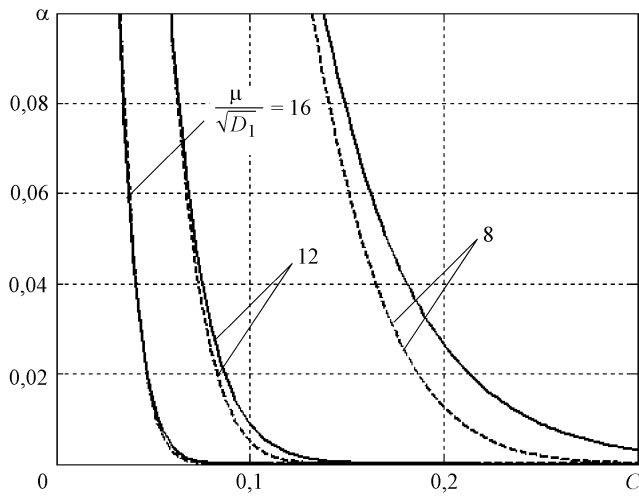


Рис. 1

На рис. 2 приведены зависимости  $\alpha$  от порога  $C$  при  $m=20$ ,  $D_\eta = 4$  и  $\frac{\mu}{\sqrt{D_1}} = 16$  для гауссовской (сплошная линия рассчитана по формуле (20)) и равномерной (пунктирная линия) ПРВ шума наблюдения. Штриховая линия соответствует ПРВ гауссовской случайной величины, возведенной в куб, которая может быть использована для имитации шумов с «тяжелыми хвостами». Две последние зависимости были получены методом математического моделирования. Очевидно, что формула (20) может быть использована для расчета  $\alpha$  при негауссовских шумах наблюдения для  $m > 20$ .

К сожалению, получить аналитические формулы для расчета условной вероятности ошибки сегментации  $\beta$  в общем случае не удастся. Поэтому зависимости  $\beta$  от порога, представленные на рис. 3, были получены методом моделирования при  $m=10$ ,  $D_\eta = 1$  и  $\frac{\mu}{\sqrt{D_1}} = 12$  для двух отрезков прямой ли-

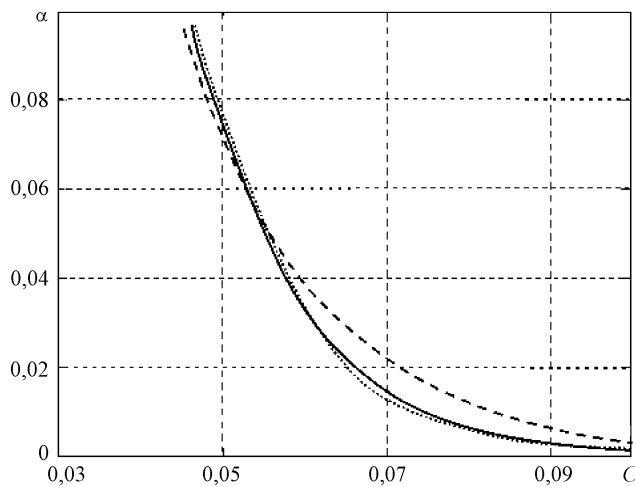


Рис. 2

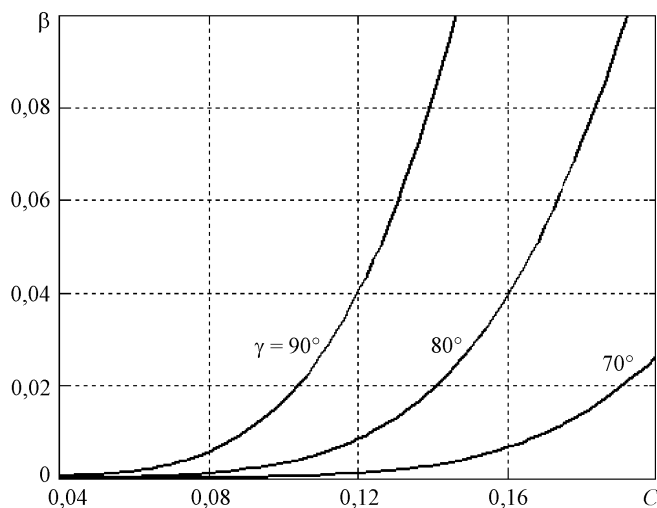


Рис. 3

нии, образующих угол  $\gamma$ . Экспериментальные исследования показали, что, во-первых,  $\beta$  не зависит от ориентации этой фигуры на плоскости; во-вторых, как и следовало ожидать, чем сильнее отличается данная фигура от отрезка прямой линии, тем меньше вероятность условной ошибки сегментации  $\beta$ .

**Заключение.** Таким образом, характеристики алгоритма сегментации контурной линии при ее параметрическом представлении не зависят от ориентации контурной линии на плоскости. Полученные формулы позволяют определить параметры алгоритма исходя из заданного уровня условной вероятности ошибки  $\alpha$ . Экспериментальные исследования показали, что алгоритм сегментации, основанный на параметрическом представлении контурной линии, обладает достаточно высокой помехоустойчивостью.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pratt W. K. Digital Image Processing. N. Y.: Wiley, 2001.
2. Методы компьютерной обработки изображений /Под ред. В. А. Сойфера. М.: Физматлит, 2001.
3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. К. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1986.
4. Бачило С. А., Лепский А. Е., Рыбаков О. С. Анализ двух методов оценивания кривизны дискретной плоской зашумленной кривой // Докл. 3-й Междунар. конф. «Цифровая обработка сигналов и ее применение'2000». М., 2000. Т. 2.
5. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.

Поступила в редакцию 12 декабря 2005 г.